

Врз основа на член 55 став 1 од Законот за организација и работа на органите на државната управа („Службен весник на Република Македонија“ бр. 58/00, 44/02, 82/08, 167/10, 51/11 и „Службен весник на Република Северна Македонија“ бр. 96/2019 и 110/2019) и член 22 став 1 од Закон за средното образование („Службен весник на Република Македонија“ бр. 44/95, 24/96, 34/96, 35/97, 82/99, 29/02, 40/03, 42/03, 67/04, 55/05, 113/05, 35/06, 30/07, 49/07, 81/08, 92/08, 33/10, 116/10, 156/10, 18/11, 42/11, 51/11, 6/12, 100/12, 24/13, 41/14, 116/14, 135/14, 10/15, 98/15, 145/15, 30/16, 127/16, 67/17, 64/18 и „Службен весник на Република Северна Македонија“ бр. 229/20) и член 3 од Закон за математичко-информатичка гимназија („Службен весник на Република Македонија“ бр. 64/18) министерот за образование и наука ја донесе Наставната програма по *математичка анализа* за IV (четврта) година математичко-информатичка гимназија.

МИНИСТЕРСТВО ЗА ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА

БИРО ЗА РАЗВОЈ НА ОБРАЗОВАНИЕТО



Наставна програма

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА

за IV година

Математичко-информатичка гимназија

Скопје, 2023 година

Назив на наставната програма	Математичка анализа
Тип на наставна програма	Задолжителна
Кредитна вредност на наставната програма	7 (седум) ЕЦВЕТ ¹ кредити (5+2, 2 кредита одговараат на 50 часа активности на ученикот од кои 18 часа за домашна работа, 12 часа за подготовка за писмени работи и 20 часа за самостојно учење)
Ниво на квалификација	IV (четврто) ниво
Година на изучување	IV (четврта)
Број на часови неделно/годишно за реализација на наставната програма	3/99
Цели на наставна програма	<p>Ученикот/ученичката:</p> <ul style="list-style-type: none"> - да ги продлабочи знаењата по математика од примена на диференцијалното сметање, неопределен интеграл, определен интеграл, диференцијални равенки и да ги применува во секојдневни ситуации, како и во други наставни предмети; - да постигне самодоверба во примената на стекнатите математички вештини за наоѓање, користење и презентирање на математичките аргументи; - да ја цени убавината, моќта, корисноста и интернационалната димензија на математиката и да извлекува задоволство од постигнатите резултат; - да развива логичко, критичко и креативно математичко мислење.

¹Закон за Националната рамка на квалификации.

<p>Теми/подрачја/модуларни единици на наставната програма</p>	<ul style="list-style-type: none"> • ПРИМЕНА НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОТО СМЕТАЊЕ • НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ • ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ • ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ
<p>Материјално-технички и просторни услови</p>	<p>За постигнување на целите на наставата по <i>математика</i> неопходно е стручно осмислена и планирана примена на различни наставни средства, слики и цртежи, како и помагала: компјутер со соодветни програмски пакети, интернет и ЛЦД проектор.</p>
<p>Норматив на наставен кадар</p>	<p>Наставната програма за IV година може да ја реализира:</p> <ul style="list-style-type: none"> - наставник со завршени студии по математика/наставна или друга насока, VII/1 или VIA според МРК и 240 ЕКТС; <p>Стручно лице кое исполнува најмалку еден од следните услови:</p> <ul style="list-style-type: none"> - да бил ментор на ученик кој бил награден на престижен меѓународен натпревар од соодветната област; - да е запишан на докторски студии соодветната област; - да има стекнато научен степен на доктор на науки на соодветната област.

ПРИМЕНА НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ (36 часа)

Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> -Да ја докажува и применува теоремата на Ферма -Да ја докажува и применува теоремата на Рол -Да ја докажува и применува теоремата на Лагранж -Да ја докажува и применува теоремата на Коши - Да решава задачи со примена на теоремите за средна вредност - Да решава задачи со примена на Лопиталово правило 	<ul style="list-style-type: none"> • Теорема на Ферма (1 час) • Теорема на Рол (1 час) • Теорема на Лагранж (1 часа) • Примена на теоремата на Рол и теоремата на Лагранж (2 часа) • Теорема на Коши (1 час) • Задачи од примена на теоремите за средна вредност (2 часа) • Лопиталово правило (2 часа) • Примена на Лопиталово правило (3 часа) <p>Поими : Теорема на Ферма, теорема на Рол ,теорема на Лагранж, теорема на Коши, Лопиталово правило.</p>	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот ги запознава учениците со поимите и ознаките од математичката логика. • Учениците запишуваат дефиниции на логичките операции, таблици на вистинитост и решаваат поедноставни задачи со примена на логичките операции. • Низ групна работа се врши проверка и докажување на особините на логичките операции. • Наставникот организира работа во парови во која се инсистира на примена на Де Моргановите закони низ различни примери. <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <p>1.1: да ги набројува бројните множества, да разликува конечно и бесконечно множество , да препознава густина и пребројливост;</p> <p>1.2: да дава примери за пребројиви множества и густы множества и да дава примери за конечни и бесконечни множества;</p> <p>1.3: да решава задачи за пребројиви множества ,густы множества, конечни, бесконечни множества;</p> <p>1.4: да докажува дека бројот $\sqrt{2}$ е ирационален број и да докажува дека рационалните бројеви се пребројиви , а реалните бројеви дека не се пребројиви.</p>

2	<ul style="list-style-type: none"> - Да определува екстремни вредности на функција со помош на изводи - Да испитува монотоност на функција со помош на изводи - Да испитува конвексност и конкавност на функција со помош на изводи - Да испитува тек и график на функција 	<ul style="list-style-type: none"> • Екстремни вредности на функции(неравенства, задачи со примена на максимум и минимум)(4 часа) • Монотоност на функции(1 час) • Конвексност и конкавност на функции (1 час) • Тек и график на елементарни функции(повторување)(2 часа) <p>Поими: Екстремни вредности на функции, конвексност и конкавност на функции.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Низ едноставни примери учениците се запознаваат со основните типови на комбинаторно броење на конечно множество. • Со помош на методите на активна настава учениците решаваат задачи со примена на основните принципи на броење кај конечни множества. <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>2.1: да препознава геометриски ред и се сеќава на формулата за збир на бескраен геометриски ред;</p> <p>2.2: да дава примери за конвергентни геометриски редови;</p> <p>2.3: да решава задачи од примена од бескрајен геометриски ред ;</p> <p>2.4: да ја докажува формулата за збирот и решава посложени задачи од примена.</p>
3	<ul style="list-style-type: none"> - Да црта график и испитува тек на рационални функции - Да црта график и испитува тек на ирационални функции - Да црта график и испитува тек на експоненцијални и логаритамски функции - Да црта график и испитува тек на тригонометриски функции и инверзни фнкции на тригонометриски функции - Да црта график и испитува тек на функции дадени во поларни координати 	<ul style="list-style-type: none"> • Тек и график на дробно рационални функции (2 часа) • Тек и график на ирационални функции (2 часа) •Тек и график на експоненцијални и логаритамски функции (2 часа) •Тек и график на тригонометриски и инверзни функции на тригонометриски функции (2 часа) • Тек и график на функции (посложени задачи) и тек и график на функции дадени во поларни координати (4 часа) 	<ul style="list-style-type: none"> • Низ едноставни примери учениците се запознаваат со основните типови на комбинаторно броење на конечно множество. • Со помош на методите на активна настава учениците решаваат задачи со примена на основните принципи на броење кај конечни множества. <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>3.1: да препознава геометриски ред и се сеќава на формулата за збир на бескраен геометриски ред;</p> <p>3.2: да дава примери за конвергентни геометриски редови;</p> <p>3.3: да решава задачи од примена од бескрајен геометриски ред ;</p> <p>3.4: да ја докажува формулата за збирот и решава посложени задачи од примена.</p>

	- Да развива функција во Тајлоров ред - Да развива функција во Маклоренов ред	• Тајлорова формула, Маклоренов ред и нивна примена.(3 часа) Поими: Тајлорова формула, Маклоренов ред.		
НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ (20 часа)				
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	Ученикот/ученичката ќе биде способен/на: - Да пресметува таблични интегрални - Да решава интегрални со метод на замена - Да решава интегрални со примена на парцијална интеграција - Да решава интегрални кои содржат квадратен трином	•Поим за примитивна функција и поим за неопределен интеграл (1час) •Таблични интегрални (1 час) • Интеграција со сведување на таблични интегрални (1 час) • Интеграција со смена на променлива (2 часа) •Парцијална интеграција (3 часа) •Интеграција на квадратен трином (2 часа) Поими: Примитивна функција , неопределен интеграл, таблични интегрални, интеграција со смена на променлива, парцијална интеграција.	Активности: • Наставникот ги запознава учениците со суштината и видовите математички доказ. • Низ групна работа учениците прават споредба меѓу различни видови докази. • Со помош на техниките за активна настава учениците се подготвуваат за изведување посложени математички докази. Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	Ученикот/ученичката може: 1.1: да искажува дефиниција за низа, точка на натрупување и граница на низа; 1.2: да дава примери за монотони, ограничени низи; 1.3: да решава задачи во врска со конвергентни низи; 1.4: да ги докажува теоремите што се изучуваат за низите.
2	- Да интегрира дробно рационални функции	•Интеграција на дробно рационални функции (3 часа)	Активности • Наставникот ги запознава учениците со методот на	2.1: да искажува дефиниција за аритметичка и геометриска прогресија;

	<ul style="list-style-type: none"> - Да интегрира ирационални функции - Да решава интеграл со примена на Ојлерови смени - Да решава интеграл со биномен диференцијал - Да интегрира тригонометриски функции - Да решава интеграл со рекурзија 	<ul style="list-style-type: none"> •Интеграција на некои ирационални функции, Ојлерови смени,биномен диференцијал.(3 часа) •Интеграција на тригонометриски функции, хиперболични смени.(2 часа) •Примена на рекурентни формули во инеграција.(2 часа) <p>Поими: Ојлерови смени, биномен диференцијал хиперболични смени.</p>	<p>математичка индукција како начин на докажување.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Низ групна работа учениците решаваат задачи со примена на методот, <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>2.2: да дава примери за својствата на аритметичка и геометриска прогресија;</p> <p>2.3: да решава задачи за аритметичка и геометриска прогресија;</p> <p>2.4: да ги докажува својствата и формулите за општ член и збирот на првите n членови на аритметичка и геометриска прогресија.</p>
--	--	--	--	--

ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ (25часа)

Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Да решава определен интеграл со примена на Њутн-Лајбницова формула - Да ги применува својствата на определен интеграл - Да решава определен интеграл со метод на замена - Да решава определен интеграл со метод на парцијална интеграција 	<ul style="list-style-type: none"> •Дефиниција на определен интеграл (1 час) •Определен интеграл како гранична вредност на Риманови суми (2 часа) • Формула на Њутн-Лајбниц (1час) • Својства на определен интеграл(2 часа) 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот дефинира бинарна операција и некои основни особини на бинарна операција. • Учениците докажуваат закони за алгебарски структури. • Низ групна работа учениците откриваат поими и законности поврзани со различни алгебарски структури. 	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <p>1.1 да се сеќава на поимот функција и нејзиното претставување;</p> <p>1.2: да дава примери на функции зададени во експлицитен облик, имплицитен облик и параметарски облик ;</p> <p>1.3: да црта графици на функции со помош на графици на елементарни функции;</p>

	<p>- Да ја применува формулата на Валис</p> <p>- Да решава несвојствени интеграли</p>	<ul style="list-style-type: none"> •Смена на променлива во определен интеграл и парцијална интеграција на определен интеграл (2 часа) •Формула на Валис (1 час) •Извод на интеграл по горна граница (1 час) •Пресметување на гранични вредности со помош на интеграл (1 час) • Несвојствени интеграл (1 час) <p>Поими: Поим за определен интеграл, Риманови суми, формула на Њутн-Лајбниц, формула на Валис, несвојствени интеграл.</p>	<p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>1.4: да црта графици на инверзни функции и да црта графици на хиперболични функции.</p>
2	<p>- Да решава задачи со примена на определен интеграл за пресметка на плошина на рамнинска фигура</p> <p>- Да решава задачи со примена на определен интеграл за пресметка на волумен на ротационо тело</p> <p>- Да решава задачи со примена на определен интеграл за пресметка на должина на лак на крива</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Плошина на рамнински фигури (3 часа) • Пресметување на волумен на ротационо тело (2 часа) • Должина на лак на крива (3 часа) • Плошина на ротационо тело (2 часа) • Задачи од примена на определен интеграл (3 часа) 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот ги дефинира поимите прстен, поле и булова алгебра. • Учениците откриваат и докажуваат тврдења поврзани со новите структури. • Низ групна работа учениците решаваат равенки во булова алгебра. 	<p>2.1: да ги набројува својствата на функции;</p> <p>2.2: да дава примери за одредување на дефинициона област, вредност на функција, нули на функција, парност на функција и период на функција;</p> <p>2.3: да решава задачи во врска со дефинициона област, вредност на функција, нули на функција, парност на функција и период на функција,</p>

	- Да решава задачи со примена на определен интеграл за пресметка на плошина на ротационо тело	Поими: Волумен на ротационо тело ,плошина на ротационо тело, должина на лак на крива .	Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	монотоност, ограниченост и локални екстреми на функции ; 2.4: да решава посложени задачи со својствата на функциите.
ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ (18 часа)				
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Да решава сепарабилни диференцијални равенки - Да решава хомогена диференцијална равенка од прв ред - Да решава линеарна диференцијална равенка - Да решава Бернулиева диференцијална равенка - Да решава диференцијални равенки кои содржат интегрален множител - Да решава задачи со примена на диференцијални равенки 	<ul style="list-style-type: none"> • Поим за диференцијална равенка и нејзино решение (2 час) • Диференцијална равенка од прв ред со раздвојиви променливи (2 часа) • Хомогена диференцијална равенка од прв ред (2 час) • Линеарна диференцијална равенка (2 часа) • Бернулиева диференцијална равенка (2 часа) • Интеграционен множител (2 часа) • Примена на диференцијалните равенки од прв ред (2 часа) <p>Поими: Диференцијална равенка, хомогена диференцијална равенка од прв</p>	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот организира продлабочено изучување на полиномите и операциите со нив. • Учениците решаваат задачи во кои ги применуваат операциите со полиноми, формулите за скратено множење и разложувањето на множители. • Низ групна работа се совладуваат основните операции со алгебарски рационални изрази. <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <p>1.1: да искажува дефиниција за извод и да ги запомнува табличните изводи ;</p> <p>1.2: да дава примери за изводи на елементарни функции како и примери за извод од збир ,разлика, производ и количник на две функции ;</p> <p>1.3: да решава задачи од изводи со примена на геометриско толкување и физичко толкување на извод на функција;</p> <p>1.4: да ги докажува теоремите за извод од збир ,разлика, производ и количник на две функции .</p>

		ред, линеарна диференцијална равенка, Бернулиева диференцијална равенка, интеграционен множител.		
2	<p>- Да решава хомогени диференцијални равенки со константни коефициенти од втор ред</p> <p>- Да решава нехомогени диференцијални равенки со константни коефициенти од втор ред</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Хомогени диференцијални равенки со константни коефициенти од втор ред (2 часа) • Нехомогени диференцијални равенки со константни коефициенти од втор ред (2 часа) <p>Поими: Хомогени диференцијални равенки со константни коефициенти од втор ред, нехомогени диференцијални равенки со константни коефициенти од втор ред.</p>	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот организира групна работа преку која учениците се запознаваат со постоењето на други бројни системи и начините за миграција од еден во друг броен систем. • Учениците низ групна работа запишуваат броеви во бинарен броен систем и вршат операции со нив. <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>2.1: да го запомнува одредувањето на извод од сложена функција и извод од инверзна функција, како и изводи од повисок ред;</p> <p>2.2: да дава примери за извод од имплицитно зададена функција, извод од параметарски зададена функција и логаритамски извод;</p> <p>2.3: да одредува изводи од сложени функции и извод од имплицитно зададена функција, извод од параметарски зададена функција и од логаритамски извод;</p> <p>2.4: да ја докажува формулата за извод на сложена функција како и формулата на Лајбниц и да решава посложени задачи од n-ти извод.</p>

<p>Оценување на постигањата на учениците</p>	<p>За да се оценат постигнувањата на ученикот неопходно е:</p> <ul style="list-style-type: none"> - да се согледа иницијалната состојба на ученикот (согледување на неговите претходни искуства, знаење и вештини); - да се разговара со ученикот за да се добијат сознанија за неговото логичко размислување, разбирањето на поими и степенот на разбирање при нивната примена, оспособеноста за решавање задачи; - континуирано следење на односот на ученикот кон работата, соработка со врсниците, покажаната иницијативност, љубопитност, самостојност, точност во искажувањето и истрајност во извршувањето на обврските; - континуирано утврдување и проверка на стекнатите знаења, способности и вештини во модулните единици. <p>Оценувањето на постигањата на учениците ќе биде со бројна оценка (од 1 до 5). Писменото оценување ќе се врши преку изработка на четири писмени работи по две во секое полугодие.</p>
<p>Литература</p>	<p>За реализација на наставната програма неопходен е учебник одобрен од министер за образование и наука, збирка задачи и други извори.</p>
<p>Почеток на имплементација на наставната програма</p>	<p>Учебна 2023/2024 година</p>
<p>Институција/ носител на програмата</p>	<p>Биро за развој на образованието (БРО)</p>
<p>Потпис и датум на донесување на наставната програма</p>	<p>бр. 13-6691/4 4.7.2023 година</p> <p style="text-align: right;">МИНИСТЕР, Doc.Dr. Jeton Shaqiri</p> <hr style="width: 20%; margin-left: auto; margin-right: 0;"/>
<p>Датум на ревизија</p>	