Врз основа на член 55 став 1 од Законот за организација и работа на органите на државната управа управа („Службен весник на Република Македонија" бр. 58/00, 44/02, 82/08, 167/10, 51/11 и „Службен весник на Република Северна Македонија" бр. 96/2019 и 110/2019) и член 22 став 1 од Закон за средното образование („Службен весник на Република Македонија" бр. 44/95, 24/96, 34/96, 35/97, 82/99, 29/02, 40/03, 42/03, 67/04, 55/05, 113/05, 35/06, 30/07, 49/07, 81/08, 92/08, 33/10, 116/10, 156/10, 18/11, 42/11, 51/11, 6/12, 100/12, 24/13, 41/14, 116/14, 135/14, 10/15, 98/15, 145/15, 30/16, 127/16, 67/17, 64/18 и „Службен весник на Република Северна Македонија" бр. 229/20) и член 3 од Закон за математичко-информатичка гимназија („Службен весник на Република Македонија" бр. 64/18) министерот за образование и наука ја донесе Наставната програма по ***алгебра*** за IV (четврта) година математичко-информатичка гимназија.

МИНИСТЕРСТВО ЗА ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА

БИРО ЗА РАЗВОЈ НА ОБРАЗОВАНИЕТО

Наставна програма

АЛГЕБРА

за IV година

Математичко-информатичка гимназија

Скопје, 2023 година

Назив на наставната програма	Алгебра
Тип на наставна програма	Задолжителна
Кредитна вредност на наставната програма	7 (седум) ЕЦВЕТ[1] кредити (5+2, 2 кредита одговараат на 50 часа активности на ученикот од кои 18 часа за домашна работа, 12 часа за подготовка за писмени работи и 20 часа за самостојно учење)
Ниво на квалификација	**IV (четврто) ниво**
Година на изучување	**IV (четврта)**
Број на часови неделно/годишно за реализација на наставната програма	3/99
Цели на наставна програма	Ученикот/ученичката: - да ги продлабочи знаењата по математика од векторски простори и линеарни пресликувања, алгебра на полиноми и неравенства, и да ги применува во секојдневни ситуации, како и во други наставни предмети; - да постигне самодоверба во примената на стекнатите математички вештини за наоѓање, користење и презентирање на математичките аргументи; - да ја цени убавината, моќта, корисноста и интернационалната димензија на математиката и да извлекува задоволство од постигнатите резултат; - да развива логичко, критичко и креативно математичко мислење.
Теми/подрачја/модуларни единици на наставната програма	• ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ И ЛИНЕАРНИ ПРЕСЛИКУВАЊА • ПОЛИНОМИ • НЕРАВЕНСТВА

[1]Закон за Националната рамка на квалификации.

Материјално-технички и просторни услови	За постигнување на целите на наставата по *математика* неопходно е стручно осмислена и планирана примена на различни наставни средства, слики и цртежи, како и помагала: компјутер со соодветни програмски пакети, интернет и ЛЦД проектор.
Норматив на наставен кадар	Наставната програма за IV година може да ја реализира: - наставник со завршени студии по математика/наставна или друга насока, VII/1 или VIA според МРК и 240 ЕКТС; Стручно лице кое исполнува најмалку еден од следните услови: -да бил ментор на ученик кој бил награден на престижен меѓународен натпревар од соодветната област; - да е запишан на докторски студии соодветната област; -да има стекнато научен степен на доктор на науки на соодветната област.

	ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ И ЛИНЕАРНИ ПРЕСЛИКУВАЊА (27 часа)			
Ред. број	**Резултати од учењето**	**Содржини и поими**	**Активности и методи**	**Стандарди за оценување**
1	**Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:** - Да дефинира векторски простор и решава задачи со примена на векторски простор - Да дефинира векторски потпростор и решава задачи со примена на векторски потпростор - Да дефинира линеарна комбинација и линеарна обвивка и решава задачи со нивна примена - Да дефинира збир на потпростори и решава задачи со нивна примена - Да определува база и димензија на векторски простор - Да определува координати на вектор во однос на дадена база - Да решава задачи со примена на матрица на премин	• поим за векторски простор - дефиниција - примери - основни особини (1 час) • поим за векторски потпростор - дефиниција - примери - карактеризација - пресек на потпростори (1 час) • линеарна комбинација и линеарна обвивка - дефиниција - примери - карактеризација (1 час) • збир на потпростори - дефиниција - мрежата од потпростори - поим за директен збир - примери (1 час)	**Активности** • наставникот дефинира векторски простор, а учениците се оспособуваат за докажување со помош на аксиомите за векторски простор • Низ групна работа ученците проверуваат дали одредено множество е векторски потпростор, потоа одредуваат пресек на потпростори, збир и директен збир и линеарна обвивка • Наставникот ги дефинира поимите база и димензија на векториски простор, а учениците одредуваат база и димензија во конкретни примери • Учениците запишуваат координати на вектори при премин од една во друга база на векторски простор • Со помош на техниките за активна настава учениците	**Ученикот/ученичката може:** 1.1: да ги искажува основните дефиниции за поимите наведени во содржините 1.2: да дава примери за векторски простор, потпростор, линеарна комбинација линеарна обвивка, база итн. 1.3: да решава едноставни задачи во врска со конечно-димензионални векторски простори 1.4: да ги докажува теоремите наведени во содржините и да ги применува при решавање посложени задачи

		• повторување за линеарна зависност/независност на систем вектори (1 час) • база и димензија - теорема за надополнување до база - теорема за димензија (на конечно-димензионален) векторски простор - примери - карактеризација на директен збир - поим за изоморфизам меѓу векторски простори - единственост на векторски простор од дадена (конечна) димензија (2 часа) • координати на вектор (во однос на дадена база) (1 час) • матрица на премин (од една во друга база) (2 часа) **Поими :** векторски простор, векторски потпростор,	одредуваат координати на вектор во однос на дадена база и матрица на премин од една во друга база **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	

		линеарна обвивка, збир на потпростори, директен збир на потпростори, база и димензија, координати на вектор, матрица на премин		
2	- Да дефинира линеарно пресликување - Да определува јадро и слика на линеарно пресликување - Да определува дефект и ранг на линеарно пресликување - Да решава задачи си примена на операции со линеарни пресликувања - Да применува матрична репрезентација на линеарно пресликување - Да дефинира и применува линеарен функционал	• поим за линеарно пресликување (1 час) • јадро и слика на линеарно пресликување (1 час) • дефект и ранг на линеарно пресликување (1 час) • неравенства на Силвестер (1 час) • операции со линеарни пресликувања (1 час) • матрична репрезентација на линеарно пресликување (2 часа) • уште еден поглед на систем линеарни равенки (1 час) • поим за линеарен функционал (1 час)	**Активности** • Наставникот дефинира линеарно пресликување, јадро и ранг, а учениците проверуваат за дадени пресликувања дали се линеарни и одредуваат јадро и ранг и нивни димензии во примери. • Низ групна работа учениците се запознаваат со операциите со линеарни пресликувања, матричните претставувања како и неравенствата кои важат за рангот на дадени линеарно пресликување • Наставникот организира повторување за систем линеарни равенки, а учениците дискутираат за примената на линеарни пресликувања во одредување решение на даден систем	2.1: да ги искажува основните дефиниции во врска со линеарни пресликувања (над векторски простори) 2.2: да дава примери за поимите наведени во содржините 2.3: да решава едноставни задачи во врска со линеарни пресликувања над конечно-димензионални векторски простори 2.4: да ги докажува основните теооеми за дефект и ранг, неравенствата на Силвестер и да ги применува при решавање посложени задачи

		Поими : линеарно пресликување, јадро, слика, дефект, ранг, матрична репрезентација, линеарен функционал	• Наставникот дефинира линеарен функционал, а учениците разгледуваат примери **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	
3.	- Да дефинира фактор-простор - Да дефинира афин потпростор - Да определува димензија на афин потпростор - Да дефинира хиперрамнина - Да ги применува теоремите на Каратеодори, Радон и Хели во конкретни задачи	• поим за фактор-простор (1 час) • афин потпростор (афино многуобразие) - дефиниција - карактеризација (врска со потпростор) - димензија на афин потпростор - поим за точка, права, рамнина - простор решенија на систем линеарни равенки - примери (2 часа) • хиперрамнина - врска со линеарен функционал - полупростори (1 час)	**Активности** • Наставникот дефинира афин простор и потпростор, негова димензија, точка, права и рамнина во афин простор • Учениците разгледуваат низ задачи својства поврзани со новите поими • Наставникот дефинира хиперрамнина и конвексно подмножество во реален векторски простор, а учениците разгледуваат својства на поимите • Низ групна работа учениците ги разгледуваат теоремите на Каратеодори, Радон и Хели и нивната примена во задачи	3.1: да ги искажува дефинициите на основните поими за афин потпростор 3.2: да ги објаснува поимите наведени во содржините 3.3: да решава поедноставни задачи во врска со афини потпростори 3.4: да ги докажува наведените теореми и да ги употребува при решавање на посложени задачи

		• конвексно подмножество во реален векториски простор - дефиниција - конвексни комбинации - конвексна обвивка (1 час) • теорема на Каратеодори (1 час) • теорема на Радон (1 час) • теорема на Хели (1 час) **Поими :** фактор-простор, афин потпростор, хиперрамнина, конвексно подмножество, конвексни комбинации, конвексна обвивка	**Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	
	ПОЛИНОМИ (42 часа)			
Ред. број	**Резултати од учењето**	**Содржини и поими**	**Активности и методи**	**Стандарди за оценување**
1.	**Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:** - Да дефинира полиномна форма и определува степен на полиномна форма - Да дефинира полиномна функција	• повторување за полиномни форми - полиномна форма над прстен - степен на полиномна форма - фомула за степен од производ - делење со остаток (1 час)	**Активности** • Наставникот организира повторување за полиномни форми, а учениците одредуваат степен и остаток од делењето на полиномни форми	**Ученикот/ученичката може:** 1.1: да ги искажува дефинициите наведни во содржините 1.2: да ги објаснува преку примери основните поими за полиноми

	- Да определува нула на полиномна форма - Да ја применува теоремата за остаток (Теорема на Безу) - Да ја применува Хорнеровата шема во задачи - Да решава задачи со примена на Тејлоров развој на полином - Да ја применува Лагранжовата интерполациона формула во задачи	• полиномна функција -дефиниција -придружувањето форма ↦ функција во општ случај не е инјективно - поим за нула на полиномна форма (1 час) • теорема за остаток (Безу) и теорема за линеарен фактор (1 час) • Хорнерова шема и Тејлоров развој на полином (2 часа) • кратност на нула - дефиниција (со деливост) - карактеризација (со извод) - врска меѓу кратност на нула на полином и на изводот - ако се нули на , тогаш - (броејќи ги кратностите) секој полином има не повеќе од нули - придружувањето форма ↦ функција е инјективно доколку се работи над бесконечен интегрален домен (2 часа) • Лагранжова интерполациона формула (2 часа)	• Со помош на методите на активна настава учениците се запознаваат со поимите нула на полином, линеарен фактор на полином, кратност на дадена нула и постапките со кои се одредуваат овие поими (Теоремата на Безу, Хорнерова шема и Тејлоров развој на полином) • Низ групна работа учениците одредуваат врска меѓу нулите на даден полином и неговите коефициенти, како и степенот на полиномот со бројот на нули • Наставникот ги запознава учениците со Лагранжовата интерполациона формула, а учениците решаваат задачи со нејзина примена **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	1.3: да ја применува Хорнерова шема, Лагранжова интерполациона формула, и да решава поедноставни задачи во врска со полиноми 1.4: да ги докажува теоремите наведени во содржините и да ги применува при решавање посложени задачи

		Поими : полиномна функција, Хорнерова шема, Тејлоров развој, кратност на нула, Лагранжова интерполациона формула		
2.	- Да ја формулира, докажува и применува основната теорема на алгебрата - Да решава задачи со примена на Виетови формули - Да решава квадратна равенка со комплексни коефициенти - Да решава кубна равенка со комплексни коефициенти - Да решава полиномна равенка од четврти степен со комплексни коефициенти	• основна теорема на алгебра (со доказ) (2 часа) • Виетови формули (1 час) • решавање на квадратна равенка (комплексни коефициенти) (1 час) • решавање на кубна равенка (комплексни коефициенти) (2 часа) • решавање полиномна равенка од четврти степен (комплексни коефициенти) (2 часа) **Поими :** Виетови формули, Формули на Кардано-Ферара	**Активности** • Наставникот изведува доказ за основната теорема на алгебрата • Учениците решаваат задачи со примена на Виетовите формули • Низ групна работа учениците разработуваат техники за решавање на квадратна, кубна и равенка од четврти степен со коефициенти во множеството комплексни броеви • Наставникот користи динамички софтвер за да ги оспособи учениците за графичко решавање полиномни равенки **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	2.1: да ги искажува Виетовите формули и формулите на Кардано-Ферара 2.2: да дава примери за Виетовите формули 2.3: да ги применува Виетовите формули при решавање едноставни задачи за полиноми и да решава полиномни равенки од степен помал или еднаков на 4 2.4: да ги докажува Виетовите формули, основната теорема на алгебрата, и да ги применува при решавање на пословени задачи

3.	- Да претставува дробно-рационална функција како збир од прости рационални функции од прв и втор вид - Да решава задачи со примена на методот на неопределени коефициенти - Да ја применува теоремата на Декарт за реални нули на реален полином - Да ја применува теоремата на Штурм за реални нули на реален полином во даден интервал	• парови од конјугирани нули на реален полином & канонична факторизација (1 час) • дробно-рационална функција - каноничен облик - проста рационална функција од прв вид - проста рационална функција од втор вид - претставување како збир од прости рационални функции (2 часа) • метод на неопределни коефициенти (1 час) • неколку последици од теоремата на Рол кај реални полиноми - повторување за теорема на Рол - последици за реален полином: → меѓу секои две еднoподруги нули на реален полином P има барем една нула на P' → меѓу секои две еднoподруги нули на P' има најмногу една нула на реален полином P → ако сите (комплексни) нули на реален полином P се реални,	**Активности** • Низ активна настава учениците разложуваат полиноми на множители користејќи ги својствата на пар конјугирани комплексни броеви • Наставникот го воведува поимот проста рационална функција од прв и втор вид, а учениците запишуваат дадени дробно-рационални функции како збир од прости дропки со помош на методот на неопределени коефициенти • Низ групна работа учениците согледуваат неколку последици од Теоремата на Рол кои се однесуваат на нулите на даден полином и неговиот прв извод • Низ групна работа учениците ја согледуваат примената на теоремите на Декарт и Штурм за реални нули на полином со реални коефициенти **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку	3.1: да ги искажува поимите наведени во содржините 3.2: да дава примери за канонична факторизација на (реални) полиноми 3.3: да го употребува методот на неопределени коефициенти при решавање поедноставни задачи 3.4: да ги докажува теоремите на Рол, Штурм, Декарт и да ги применува при решавање посложени задачи

		тогаш и сите (комплексни) нули на P' се реални; притоа, нулите на P' ги раздвојуваат нулите на P → ако P' има вкупно r различни реални нули, тогаш и реален полином P има не повеќе од $r+1$ реални нули → ако P е неконстантен реален полином, тогаш секоја сложена (повеќекратна) нула на P' е нула и на P (2 часа) • теорема на Декарт за реални нули на реален полином (3 часа) • теорема на Штурм за реални нули на реален полином во даден интервал (3 часа) **Поими** : конјугирани нули, канонична факторизација, дробно-рационална функција, метод на неопределни коефициенти	откривање, решавање проблеми.	
4.	- Да решава задачи со примена на операциите со мономи	• поим за полиномна форма од повеќе неопределени (над прстен)	**Активности** • Наставникот ги воведува поимите полиномна форма од	4.1: да ги објаснува основните поими во врска со полиномни форми од повеќе неопределени

	- Да определува нули на полиномна функција - Да решава задачи со примена на симетрични полиномни форми	- степен на моном - собирање на слични мономи - множење на мономи - $\mathcal{R}[x_1, \ldots, x_n] = \mathcal{R}[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n]$ - степен на полиномна форма - формулата за степен на производ (1 час) • полиномна функција и нули (1 час) • (пермутациона) група симетрии на полиномна форма - дефиниција - група симетрии на полиномот $\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i - x_j)$ (1 час) • симетрични полиномни форми (4 часа) • combinatorial nullstellensatz (5 часа) **Поими :** степен на полиномна форма, група симетрии на полиномна форма, симетрични полиномни форми, combinatorial nullstellensatz	повеќе променливи, полиномна функција и нули • Учениците низ задачи се запознаваат со поимите (степен на моном, собирање и множење на полиномни форми, степен на полиномна форма) • Низ групна работа учениците одредуваат симетрии на полиномна форма **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	4.2: да дава примери за пермутациона група на полином од повеќе неопределени, и за симетрични полиноми 4.3: да претставува симетричен полином преку елементарни симетрични полиноми 4.4: да ја докажува и применува теоремата combinatorial nullstellensatz

	НЕРАВЕНСТВА (30 часа)			
Ред. број	**Резултати од учењето**	**Содржини и поими**	**Активности и методи**	**Стандарди за оценување**
1.	**Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:** - Да дефинира конвексна функција - Да го докажува и применува неравенството на Јенсен во задачи - Да ги докажува и применува тежинското неравенство и тригонометриските неравенства во триаголник во задачи - Да ги докажува и применува неравенствата на Јанг, Холдер и Минковски во задачи - Да го докажува и применува неравенството на Поповициу	• основни поими за конвексни функции - дефиниции - карактеризација со помош на прв извод - примери (1 час) • неравенство на Јенсен и примери - тежинско неравенство - тригонометриски неравенства во триаголник (3 часа) • неравенства на Јанг, Холдер, Минковски и примери (3 часа) • неравенство на Поповициу (1 час) **Поими :** конвексна функција	**Активности** • Наставникот ги запознава учениците со конвексни функции, а учениците низ примери согледуваат некои основни неравенства за нив • Низ активна настава учениците ги изучуваат неравенствата на Јенсен, Јанг, Холдер, Минковски, Поповициу, тежинските неравенства и тригонометриските неравенства во триаголник **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	**Ученикот/ученичката може:** 1.1: да ја искажува дефиницијата за конвексна функција, и да ги набројува неравенствата наведени во содржините 1.2: да дава примери за конвексни функции и за неведените неравенства 1.3: да решава поедноставни задачи со примена на наведените неравенства 1.4: да ги докажува неравенствата искажани во содржините и да ги применува во посложени задачи
2.	- Да го докажува и применува неравенството на Карамата - Да го докажува и применува неравенството на Мјурхед	• неравенство на Карамата и примери (3 часа)	**Активности** • Наставникот организира изучување на неравенствата на Карамата и Мјурхед, со кои се	2.1: да ги искажува неравенствата на Карамата и Мјурхед 2.2: да дава примери за споменатите неравенства

	- Да решава натпреварувачки задачи	• неравенство на Мјурхед и примери (3 часа) **Поими :** мајоризирање	врши запознавање на учениците со поимот мајоризирање со конечни низи од реални броеви • Низ задачи учениците ги применуваат неравенствата и нивните последици **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	2.3: да ги применува неравенствата на Карамата и Мјурхед при докажување на некои поедноставни неравенства 2.4: да ги докажува неравенствата на Карамата и Мјурхед и да ги применува при докажување на некои посложени неравенства
3.	- Да го докажува и применува неравенството на Шур - Да ги докажува и применува неравенствата на Њутн и Маклорен - Да решава натпреварувачки задачи	• неравенство на Шур и примери (3 часа) • неравенство на Њутн и Маклорен (2 часа) • хомогенизирање и примери (3 часа) **Поими :** хомогенизирање	**Активности** • Наставникот ги воведува неравенствата на Шур, Њутн и Маклорен, а учениците ги применуваат во задачи • Низ активна настава учениците вршат хомогенизирање **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	3.1: да ги искажува неравенствата на Шур, Њутн и Маклорен 3.2: да дава примери за споменатите неравенства 3.3: да ги применува неравенствата на Шур, Њутн и Маклорен при докажување на некои поедноставни неравенства 3.4: да ги докажува неравенствата на Шур, Њутн и Маклорен и да ги применува при докажување на некои посложени неравенства

4.	- Да ја докажува основната теорема за средини - Да го докажува, со помош на изводи, основното експоненцијално неравенство - Да извршува Маклоренов развој на функциите e^x , $\ln(1+x)$, $sinx$, $cosx$ и да ги применува	• доказ на основната теорема за средини (монотоност и множество вредности на функцијата $\alpha \mapsto m_\alpha$) (1 час) • уште еден поглед на основното експоненцијално неравенство (доказ со помош на изводи) (1 час) • уште еден поглед на основното неравенство за експоненцијална функција (доказ со помош на изводи) (1 час) • интегрален метод за докажување неравенства - Маклоренов развој на функцијата e^x - Маклоренов развој на функцијата $\ln(1+x)$ - Маклоренов развој на функцијата $sinx$ - Маклоренов развој на функцијата $cosx$ (5 часа) **Поими :** диференцијален метод за докажување неравенства, интегрален метод за докажување неравенства	**Активности** • Наставникот ги запознава учениците со докази на некои неравенства со помош на изводи и интеграли • Низ активна настава учениците запишуваат Маклоренов развој на функциите e^x, $\ln(1+x)$, $sinx$ и $cosx$ • Низ групна работа учениците ги користат диференцијалниот и интегралниот метод на докажување неравенства **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	4.1: да ја искажува основната теорема за средини, и Маклореновиот развој на функциите набројани во содржините 4.2: да дава примери за неравенства и Маклоренов развој 4.3: да ги применува диференцијалниот и интегралниот метод при докажување на поедноставни неравенства 4.4: да ја докажува основната теорема за средини, да го докажува Маклореновиот развој на наведените функции, и да ги применува диференцијалниот и интегралниот метод при докажување на посложени неравенства

Оценување на постигањата на учениците	За да се оценат постигнувањата на ученикот неопходно е: - да се согледа иницијалната состојба на ученикот (согледување на неговите претходни искуства, знаење и вештини); - да се разговара со ученикот за да се добијат сознанија за неговото логичко размислување, разбирањето на поими и степенот на разбирање при нивната примена, оспособеноста за решавање задачи; - континуирано следење на односот на ученикот кон работата, соработка со врсниците, покажаната иницијативност, љубопитност, самостојност, точност во искажувањето и истрајност во извршувањето на обврските; - континуирано утврдување и проверка на стекнатите знаења, способности и вештини во модуларните единици. Оценувањето на постигањата на учениците ќе биде со бројна оценка (од 1 до 5). Писменото оценување ќе се врши преку изработка на четири писмени работи по две во секое полугодие.
Литература	За реализација на наставната програма неопходен е учебник одобрен од министер за образование и наука, збирка задачи и други извори.
Почеток на имплементација на наставната програма	**Учебна 2023/2024 година**
Институција/ носител на програмата	**Биро за развој на образованието (БРО)**
Потпис и датум на донесување на наставната програма	бр. 13-6691/5 4.7.2023 година МИНИСТЕР, Doc.Dr. Jeton Shaqiri
Датум на ревизија	