

Врз основа на член 55 став 1 од Законот за организација и работа на органите на државната управа („Службен весник на Република Северна Македонија“ бр. 58/00, 44/02, 82/08,167/10,51/11, 96/2019 и 110/2019) и член 22 став 1 од Законот за средно образование („Службен весник на Република Северна Македонија“ бр. 44/95, 24/96, 34/96, 35/97, 82/99, 29/02, 40/03, 42/03, 67/04, 55/05, 113/05, 35/06, 30/07, 49/07, 81/08, 92/08, 33/10, 116/10, 156/10, 18/11, 42/11, 51/11, 6/12, 100/12, 24/13, 41/14, 116/14, 135/14, 10/15, 98/15, 145/15, 30/16, 127/16, 67/17, 64/18 и 229/20) и член 3 од Законот за математичко-информатичка гимназија („Службен весник на Република Северна Македонија“ бр. 64/18) министерот за образование и наука ја донесе Наставната програма по *теорија на графови* за III (трета) година изборен предмет во математичко-информатичка гимназија.

МИНИСТЕРСТВО ЗА ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА

БИРО ЗА РАЗВОЈ НА ОБРАЗОВАНИЕТО



Наставна програма

ТЕОРИЈА НА ГРАФОВИ

ИЗБОРЕН ПРЕДМЕТ

за III година

Математичко-информатичка гимназија

Скопје, 2022 година

Назив на наставната програма	Теорија на графови
Тип на наставна програма	Изборна
Кредитна вредност на наставната програма	5 (пет) ЕЦВЕТ ¹ кредити
Ниво на квалификација	IV (четврто) ниво
Година на изучување	III (трета)
Број на часови неделно/годишно за реализација на наставната програма	3/108
Цели на наставна програма	<p>Ученикот/ученичката:</p> <ul style="list-style-type: none"> - да ги продлабочи знаењата од теоријата на графови почнувајќи од основните принципи, сврзаност на графови, Ојлеровост, Хамилтоновост, да се запознае со основната теорија на насочени графови и транспортни мрежи, класични теореми во врска со пароспојувачи, независност и покривање, како и вовед во хроматската теорија на графови; - да постигне самодоверба во примената на стекнатите математички вештини за наоѓање, користење и презентирање на математичките аргументи; - да ја цени убавината, моќта, корисноста и интернационалната димензија на математиката и да извлекува задоволство од постигнатите резултат; - да развива логичко, критичко и креативно математичко мислење.

¹Закон за Националната рамка на квалификации.

<p>Теми/подрачја/модуларни единици на наставната програма</p>	<ul style="list-style-type: none"> • ОСНОВНИТЕ ПРИНЦИПИ (низ примери и задачи) • СВРЗАНОСТ КАЈ ГРАФОВИ • ОЈЛЕРОВОСТ И ХАМИЛТОНОВОСТ • НАСОЧЕНИ ГРАФОВИ (ДИГРАФОВИ) • ТРАНСПОРТНИ МРЕЖИ • ПАРОСПОЈУВАЊЕ, НЕЗАВИСНОСТ, ПОКРИВАЊЕ • ВОВЕД ВО ХРОМАТСКА ТЕОРИЈА НА ГРАФОВИ
<p>Материјално-технички и просторни услови</p>	<p>За постигнување на целите на наставата по <i>математика</i> неопходно е стручно осмислена и планирана примена на различни наставни средства, слики и цртежи, како и помагала: компјутер со соодветни програмски пакети, интернет и ЛЦД проектор.</p>
<p>Норматив на наставен кадар</p>	<p>Наставната програма за III година може да ја реализира:</p> <ul style="list-style-type: none"> - наставник со завршени студии по математика/наставна или друга насока, VII/1 или VIA според МРК и 240 ЕКТС; <p>Стручно лице кое исполнува најмалку еден од следните услови:</p> <ul style="list-style-type: none"> - да бил ментор на ученик кој бил награден на престижен меѓународен натпревар од соодветната област; - да е запишан на докторски студии соодветната област; - да има стекнато научен степен на доктор на науки на соодветната област.

ОСНОВНИТЕ ПРИНЦИПИ (низ примери и задачи) (13 часа)				
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Да дефинира граф, негов ред, мултиплицитет и соседство на графови - Да дефинира карактеристични графови, циклус, граф на Петерсен, хиперкоцка - Да определува степен на теме - Да ја применува 2-switch теоремата на Berge - Да ррешава задачи со примена на операциите на графови - Да дефинира бипартитност и решава задачи со примена на бипартитност - Да дефинира сврзаност на графови и применува во задачи - Да дефинира дрво - Да ја применува теоремата за карактеризација - Да ја применува лемата за висечко теме - Да ја применува лемата за растење на дрво 	<ul style="list-style-type: none"> • граф (повторување) (1 час) <ul style="list-style-type: none"> - ред - големина - мултиплицитет - соседство • карактеристични графови (1 час) <ul style="list-style-type: none"> - пат - циклус - граф на Петерсен - хиперкоцка • степен на теме (лема за ракување) (1 час) • 2-switch теорема на Berge (1 час) • графовски операции (1 час) <ul style="list-style-type: none"> - унија - пресек - бришење/додавање теме/ребро - супресирање ребро - субдивидирање ребро 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот организира повторување на основните поими поврзано со графови, а учениците низ задачи одредуваат ред, големина, соседство и мултиплицитет на граф • Низ групна работа учениците разгледуваат карактеристични графови, степен на теме, графовски операции, бипартитност и сврзаност на граф • Со помош на техниките за активна настава учениците разгледуваат и докажуваат теореми поврзани со карактеризација на дрво, растење на дрво и скелетно дрво во сврзан граф 	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <ul style="list-style-type: none"> 1.1: да набројува основни графовски параметри, и основни класи графови 1.2: да дава примери за графовски операции 1.3: да решава задачи и препознава употреба на лемата за ракување 1.4: да ја докажува лемата за ракување и 2-switch теоремата на Berge, како и да решава не-едноставни задачи

		<ul style="list-style-type: none"> • бипартитност (2 часа) <ul style="list-style-type: none"> - дефиниција - карактеризација - модели - едноставни примери и задачи • сврзаност (3 часа) <ul style="list-style-type: none"> - растојание - центар - периферија - ексцентрицитет • дрво (повторување) (1 час) <ul style="list-style-type: none"> - теорема за карактеризација - лема за висечко теме - лема за растење на дрво • скелетно дрво во сврзан граф (2 часа) <ul style="list-style-type: none"> - edge-exchanging - BFS - DFS <p>Поими : граф на Петерсен, хиперкоцка, 2-switch, бипартитност, центар, периферија, ексцентрицитет, edge-exchanging.</p>	<p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	
--	--	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------	--

СВРЗАНОСТ КАЈ ГРАФОВИ (15 часа)

Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Да решава задачи од сепарирачко множество темиња - Да дефинира несепарабилност - Да дефинира зглобно теме - Да решава задачи со примена на блокови во граф - Да дефинира k-сврзаност на граф - Да ја применува open ear-decomposition теоремата на Whitney - Да ја применува теоремата на Chartrand-Harary 	<ul style="list-style-type: none"> • сепарирачко множество темиња (1 час) <ul style="list-style-type: none"> - примери - зглобно теме • несепарабилност (2 часа) <ul style="list-style-type: none"> - примери - карактеризација - open ear-decomposition теорема на Whitney • блокови во граф (2 часа) <ul style="list-style-type: none"> - block-tree декомпозиција - алгоритам за наоѓање на блокови со помош на DFS дрво • k-сврзаност на граф (1 час) <ul style="list-style-type: none"> - примери - теорема на Chartrand-Harary <p>Поими: сепарирачко множество темиња,</p>	<p>Активности:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставник дефинира поими за сврзаност кај графови, а учениците ги усвојуваат низ примери • Низ групна работа учениците разгледуваат блокови во граф, типови сврзаност на граф <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <ul style="list-style-type: none"> 1.1: да искажува дефиниција за сепарирачко множество и зглобно теме; 1.2: да ги објаснува поимите 2-сврзаност и k-сврзаност; 1.3: да наоѓа block-tree декомпозиција на граф 1.4: да ги докажува теоремите на Whitney, Chartrand-Harary, и да решава не-едноставни задачи во врска со сврзаност на граф

		несепарабилност, open ear-decomposition, блок, block-tree декомпозиција, k -сврзаност.		
2	<ul style="list-style-type: none"> - Да дефинира дисконектирачко множество ребра и решава задачи со примена на мост - ребро - Да ја применува closed ear-decomposition теоремата на Whitney - Да дефинира k-ребрена-сврзаност на граф 	<ul style="list-style-type: none"> • дисконектирачко множество ребра (1 час) - примери - мост-ребро • графови без мост-ребра (2 часа) - примери - карактеризација - closed ear-decomposition теорема на Whitney • k-ребрена-сврзаност на граф (1 час) <p>Поими: дисконектирачко множество ребра, closed ear-decomposition, k-ребрена-сврзаност</p>	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот дефинира дисконектирачко множество ребра, графови без мост-ребра и k-ребрена-сврзаност, а учениците согледуваат низ примери карактеристични својства и врски за поимите • Низ групна работа учениците докажуваат теореми и ги применуваат знаењата за одредување декомпозиција и видови сврзаност на граф <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>2.1: да искажува дефиниција за дисконектирачко множество и мост ребро</p> <p>2.2: да ги објаснува поимите 2-ребрена-сврзаност и k-ребрена-сврзаност;</p> <p>2.3: да конструира 2-ребрено-сврзани графови (со помош на closed ear-decomposition теоремата)</p> <p>2.4: да ја докажува теорема на Whitney, и да решава не-едноставни задачи во врска со ребрена-сврзаност на граф</p>
3	<ul style="list-style-type: none"> - Да ги применува неравенствата на Whitney - Да ја применува теоремата на Menger (темена и ребрена верзија) - Да ја применува теоремата на Whitney (темена и ребрена верзија) 	<ul style="list-style-type: none"> • неравенства на Whitney (2 часа) - за k, k', δ - кубичен случај • теорема на Menger (2 часа) - темена верзија 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот ги запознава учениците со неколку теореми поврзани со декомпозиција на граф, а учениците разгледуваат последици од теоремите, нивен 	<p>3.1: да ги искажува неравенства на Whitney</p> <p>3.2: да ги објаснува теоремите на Menger и Whitney</p> <p>3.3: да ги применува теоремите на Menger и Whitney</p>

		<ul style="list-style-type: none"> - ребрена верзија • теорема на Whitney (2 часа) - темена верзија - ребрена верзија <p>Поими: неравенства на Whitney</p> <p>Предлог-проект: Неколку последици од теоремата на Whitney (Fan лема и теорема на Dirack за k-сврзаност)</p>	<p>доказ и примена во други задачи</p> <ul style="list-style-type: none"> • Со помош на техниките за активна настава учениците вршат анализа на последиците од теоремата на Whitney <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	3.4: да ги докажува теоремите на Menger и Whitney
--	--	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------

ОЈЛЕРОВОСТ И ХАМИЛТОНОВОСТ (12 часа)				
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Да дефинира Ојлеров граф - Да го користи алгоритмот на Fleury - Да ја применува теоремата на Euler-Hierholzer - Да ја применува теоремата на Listing 	<ul style="list-style-type: none"> • Повторување за Ојлерови графови (3 часа) - мостовите на Кенингсберг - Ојлерови тури - алгоритам на Fleury - теорема на Euler-Hierholzer - теорема на Listing 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Учениците, низ групна работа, повторуваат за Ојлерови графови • Наставникот дефинира граф кој е Ојлерово-поврзан од тема, а учениците одредуваат Ојлерови тури, ги користат алгоритмот на Fleury и 	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <ul style="list-style-type: none"> 1.1: да искажува дефиниција на Ојлеров граф и Ојлерова тура 1.2: да го објаснува алгоритмот на Fleury за наоѓање Ојлерова тура во Ојлеров граф 1.3: да ги користи теоремите во задачи

		<ul style="list-style-type: none"> • граф кој е Ојлерово-поврзан од теме (2 часа) <p>Поими: Ојлерова-поврзаност од теме</p>	<p>теоремите на на Euler-Hierholzer и Listing</p> <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>1.4: да ги докажува теоремите на Euler-Hierholzer, Listing, и издржаноста на алгоритмот на Fleury</p>
2	<ul style="list-style-type: none"> - Да дефинира Хамитонова игра и Хамилтонов циклус - Да докажува дека графот на Петерсен не е Хамилтонов - Да ги применува теоремите на Ore и Dirack - Да дефинира затворац на граф - Да решава задачи со примена на Хамилтоновост на квадрат на 2-сврзан граф - Да ешава задачи со примена на Хамилтоновост на куб на сврзан граф 	<ul style="list-style-type: none"> • Хамилтонова игра (на икосаедар), Хамилтонов циклус (1 час) • графот на Петерсен не е Хамилтонов (1 час) • еден потребен и три доволни услови за Хамилтоновост (3 часа) - теорема на Ore - теорема на Dirack - затворац на граф • Хамилтоновост на квадрат на 2-сврзан граф (1 час) • Хамилтоновост на куб на сврзан граф (1 час) 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Учениците се запознаваат со условите за Хамилтоновост на граф, теоремите на Ore и Dirack • Низ групна работа учениците одредуваат Хамилтоновост на квадрат и куб на граф, Хамилтонов циклус и игра <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>2.1: да препознава присуство на Хамилтонов циклус</p> <p>2.2: да го објаснува поимот Хамилтонов граф, и да дава примери за такви графови</p> <p>2.3: да ги користи теоремите на Ore и Dirack за Хамилтоновост</p> <p>2.4: да ги докажува наведените теореми во врска со Хамилтоновост</p>

		<p>Поими: Хамилтонова игра, Хамилтонов циклус, квадрат и куб на граф</p> <p>Предлог-проект: Панциклични графови</p>		
НАСОЧЕНИ ГРАФОВИ (ДИГРАФОВИ) (20 часа)				
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Да ги дефинира поимите насочен пат, насочен циклус, функционален диграф, претходник, следбеник, степен на влез, степен на излез и решава задачи со нивна примена - Да определува матрица на инцидентност и матрица на соседство - Да ја формулира и применува првата теорема на теорија за диграфови - Да ја применува теоремата на Robins - Да решава задачи со примена на кондезација на диграф 	<ul style="list-style-type: none"> • дефиниции и примери (1 час) <ul style="list-style-type: none"> - насочен пат - насочен циклус - функционален диграф - претходник - следбеник - степен на влез - степен на излез • матрица на инцидентност, матрица на соседство (1 час) <ul style="list-style-type: none"> - прва теорема на теорија за диграфови - бипартизација на диграф • слаба и силна сврзаност (2 часа) <ul style="list-style-type: none"> - теорема на Robins 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот дефинира насочени графови, а учениците разгледуваат насочен пат и циклус, функционален диграф, следбеник и степен на влез и излез на граф • Низ групна работа учениците одредуваат матрица на инцидентност и соседство, бипартизација, слаба и силна сврзаност • Со помош на техниките за активна настава учениците анализираат, вршат претпоставки и докажуваат теореми поврзани со диграфови, компонентите на 	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <ul style="list-style-type: none"> 1.1: да дефинира основни класи насочени графови, и да ги искажува основните поими 1.2: да составува диграф по дадена матрица на инцидентност или соседство, и обратно 1.3: да конструира кондезација на диграф 1.4: да ги докажува наведените основни теореми

		<ul style="list-style-type: none"> - компоненти на силна сврзаност - кондензација на диграф <p>Поими: насочен пат, насочен циклус, функционален диграф, претходник, следбеник, степен на влез, степен на излез, бипартизација на диграф, слаба и силна сврзаност, компоненти на силна сврзаност, кондензација на диграф</p>	<p>силна сврзаност и кондензација на диграф</p> <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	
2	<ul style="list-style-type: none"> - Да дефинира јадро на диграф - Да ја применува теоремата на Richardson - Да применува јадро на диграф во теорија на игри - Да дефинира Ојлерови диграфови - Да дефинира Хамилтонови диграфови - Да ја применува теоремата на Менџиел 	<ul style="list-style-type: none"> • јадро на диграф (теорема на Richardson) (1 час) • примена на поимот јадро во теорија на игри (2 часа) • Ојлерови диграфови (1 час) - тура - прошетка • диграф и тапан на DeBruin (1 час) 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Низ групна работа учениците разгледуваат типови диграфови (Ојлерови, Хамилтонови, на DeBruin) • Со помош на техниките за активна настава учениците ги применуваат знаењата од типовите диграфови за решавање посложени задачи <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>2.1: да ја искажува дефиницијата за Ојлеров диграф и Ојлерова (насочена) тура</p> <p>2.2: да го објаснува поимот јадро во диграф</p> <p>2.3: да го применува поимот јадро во теорија на игри</p> <p>2.4: да ја докажува теоремата на Richardson, и да ја објаснува конструкцијата на тапан на DeBruin</p>

		<ul style="list-style-type: none"> • Хамилтонови диграфови (теорема на Менџиел) (2 часа) <p>Поими: јадро на диграф, Ојлеров диграф, Хамилтонов диграф</p>		
3	<ul style="list-style-type: none"> - Да дефинира турнири и решава примери на мали турнири - Да дефинира и применува транзитивни турнири - Да ја применува теоремата на Мооп - Да определува крал во турнир со примена на теоремата на Landau - Да дефинира Хамилтонов турнир - Да ги применува теоремите на Рој-Галај и Редери - Да ја применува теоремата на Дирак 	<ul style="list-style-type: none"> • основни дефиниции за турнири и примери на мали турнири (над K_2, K_3, K_4, K_5) (1 час) • транзитивни турнири (2 часа) • степенска низа на турнир (2 часа) • силни турнири (теорема на Мооп) (1 час) • крал во турнир (теорема на Landau) (1 час) • Хамилтонов турнир (2 часа) <ul style="list-style-type: none"> - теорема на Рој-Галај - теорема на Редери - аналог кај диграфови на теоремата на Дирак 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот ги запознава учениците со основните поими и дефиниции поврзани со турнири • Низ групна работа учениците разгледуваат транзитивни турнири, силни турнири, хамилтонов турнир, како и докажување на теореме поврзани со типовите турнири <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>3.1: да дава едноставни примери за турнири и да одредува степенска низа на турнир</p> <p>3.2: да ги објаснува поимите транзитивен и силен турнир</p> <p>3.3: да ги толкува теоремите на Мооп, Landau и Редери во задачи</p> <p>3.4: да ги докажува наведените теореме во врска со турнири, и да решава не-едноставни задачи</p>

		Поими: турнир, транзитивност на турнир, степенска низа на турнир, силен турнир, крал во турнир, Хамилтонов турнир		
--	--	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--

ТРАНСПОРТНИ МРЕЖИ (10 часа)				
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Да дефинира транспортна мрежа - Да дефинира проток низ транспортна мрежа - Да определува вредност на проток - Да ја применува max-flow min-cut теоремата - Да го применува алгоритмот на Ford-Fulkerson - Да ја применува теоремата на Menger 	<ul style="list-style-type: none"> • поим за транспортна мрежа - извор и слив во диграф - капацитетна функција <p style="text-align: right;">(1 час)</p> <ul style="list-style-type: none"> • поим за проток низ транспортна мрежа - конзервација - сатурираност/несатурираност - основна теорема <p style="text-align: right;">(2 часа)</p>	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот ги дефинира поимите поврзани со транспортни мрежи, а учениците низ задачи разгледуваат конзервација и сатурираност на мрежа • Низ групна работа учениците одредуваат вредност на проток капацитет на засек и аугментирање 	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <p>1.1: да ги објаснува основните поими во контекст на транспортни мрежи</p> <p>1.2: да дава примери за проток и засек во транспортна мрежа, и да одредува вредност на проток и капацитет на засек</p> <p>1.3: да го применува алгоритмот на Ford-Fulkerson</p> <p>1.4: да ја докажува max-flow min-cut теоремата и издржаноста на алгоритмот на Ford-Fulkerson</p>

		<ul style="list-style-type: none"> • вредност на проток и максимум проток (1 час) • капацитет на засек и минимум засек (1 час) • аугментирање (1 час) • max-flow min-cut теорема (1 час) • алгоритам на Ford-Fulkerson (1 час) • теорема на Menger <ul style="list-style-type: none"> - ребрена верзија - темена верзија (1 час) <p>Поими: транспортна мрежа, извор/слив, капацитетна функција, проток, конзервација, сатурираност/несатурираност, вредност на проток, максимум проток, капацитет на засек, минимум засек, аугментирање</p> <p>Предлог-проект: Алгоритам на Edmonds-Karp</p>	<p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	
--	--	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------	--

ПАРОСПОЈУВАЊЕ, НЕЗАВИСНОСТ, ПОКРИВАЊЕ (20 часа)

Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Да дефинира пароспојувач - Да ја применува теоремата на Berge - Да ги формулира условот и теоремата на Hall - Да ја применува 2-factor теорема на Petersen - Да решава натпреварувачки задачи 	<ul style="list-style-type: none"> • поим за пароспојувач (1 час) - сатурирано теме - несатурирано теме - максимален пароспојувач - максимум пароспојувач • М-аугментирачки пат и теорема на Berge (1 час) • пароспојување во бипартитен граф (2 часа) - услов на Hall - теорема на Hall - теорема за бракови • унгарски алгоритам (2 часа) • 2-factor теорема на Petersen (1 час) 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот дефинира пароспојувач, сатурирано и несатурирано теме, максимален пароспојувач, а учениците ги разгледуваат основните карактеристики на поимите • Низ групна работа се разгледуваат теореми поврзани со пароспојувачи (Теоремата на Hall, стабилен брак, Petersen) • Со помош на техниките за активна настава учениците разгледуваат натпреварувачки задачи каде ги применуваат и продлабочуваат знаењата од темата <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <p>1.1: да прави разлика помеѓу сатурирано и несатурирано теме, и помеѓу максимален и максимум пароспојувач</p> <p>1.2: дава примери за пароспојувачи во бипартитен граф и препознава исполнетост/неисполнетост на услов на Hall</p> <p>1.3: да го применува унгарски алгоритам, и да ја користи теорема за бракови во едноставни задачи</p> <p>1.4: да ги докажува наведените теореми и да препознава нивна употреба во не-едноставни задачи</p>

		<ul style="list-style-type: none">• систем различни претставници (2 часа)• натпреварувачки задачи (2 часа) <p>Поими: пароспојувач, сатурирано теме, несатурирано теме, максимален пароспојувач, максимум пароспојувач, аугментирачки пат, систем различни претставници</p> <p>Предлог-проект: Стабилно пароспојување (алгоритам на Gale-Shapley)</p>		
--	--	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--

2	<ul style="list-style-type: none"> - Да дефинира совршен пароспојувач - Да ја применува 1-factor теоремата на Tutte - Да ја применува теоремата на Petersen за кубични графови 	<ul style="list-style-type: none"> • совршен пароспојувач (1 час) • 1-factor теорема на Tutte (3 часа) • теорема на Petersen за кубични графови (1 час) <p>Поими: совршен пароспојувач (1-factor)</p> <p>Предлог-проект: Теорема на Ерера за кубични графови</p>	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот организира активна настава преку која учениците разгледуваат примена на теоремата на Petersen за кубични графови, теоремата на Tutte и совршен пароспојувач • Учениците докажуваат тврдења поврзани со теоремите, разгледуваат својства и анализираат ситуации <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>2.1: да препознава постоење на совршен пароспојувач во мали графови</p> <p>2.2: да ја објаснува 1-factor теоремата на Tutte</p> <p>2.3: да ги користи теоремите на Tutte и Petersen во врска со постоење на совршен пароспојувач</p> <p>2.4: да ги докажува наведените теореми</p>
---	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

3	<ul style="list-style-type: none"> - Да ја употребува формулата на Tutte- Berge - Да ја формулира и применува теоремата на Галај - Да ја формулира и применува теоремата на Кониг-Егервари 	<ul style="list-style-type: none"> • формула на Tutte- Berge (1 час) • покривање на темиња/ребра (1 час) • теорема на Галај (1 час) • теорема на Кониг-Егервари (1 час) <p>Поими: покривка</p> <p>Предлог-проект: Доминација во граф</p>	<p>Активности:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот ја дефинира формулата на Tutte- Berge, а учениците ја применуваат таа формула во конкретни задачи • Низ групна работа учениците ги разгледуваат доказите на теоремите на Галај и Кониг-Егервари и ситуацијата на минимална покривка со максимален број на пароспојувачи <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>3.1: да ја искажува формулата на Tutte- Berge, и теоремите на Галај и Кониг-Егервари</p> <p>3.2: да дава примери за покривки (на темиња, на ребра) во граф</p> <p>3.3: решава задачи со примена на наведените теореми</p> <p>3.4: да ги докажува наведените теореми</p>
---	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Да дефинира хроматски број на граф - Да ги применува равенствата и неравенствата за хроматски број на граф - Да ја применува теоремата на Brooks - Да применува модели на поење на темиња 	<ul style="list-style-type: none"> • правилно боење на темиња <ul style="list-style-type: none"> - едноставни примери - хроматски број на граф (1 час) • едноставни равенства и неравенства за хроматскиот број (1 час) • модели на боења на темињата (1 час) • колор-критични графови (1 час) • теорема на Brooks (1 час) • конструкција на Micielsky (1 час) <p>Поими: правилно боење на темиња, хроматски број, колор-критичен граф</p> <p>Предлог-проект: Теорема на Nordhaus-Gaddum</p>	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот дефинира правилно боење на темиња во граф и хроматски број на граф • Низ групна работа учениците разгледуваат едноставни равенства и неравенства за хроматски број на граф, модели на боења и колор-критични графови <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <p>1.1: да разликува правилно од неправилно боење, да го објаснува параметарот χ, и да ја искажува теоремата на Brooks</p> <p>1.2: да дава примери за правилно боење, и да составува графови согласно конструкцијата на Micielsky</p> <p>1.3: да ги применува едноставните равенства и неравенства за хроматскиот број на граф во задачи</p> <p>1.4: да ги докажува наведените теореми, и да решава не-едноставни задачи во врска со боење на темиња</p>

2	<ul style="list-style-type: none"> - Да знае правилно боење на ребра - Да дефинира хроматски индекс на граф - Да ја применува теоремата на Vizing - Да ја применува теоремата на Кониг 	<ul style="list-style-type: none"> • правилно боење на ребра - едноставни примери - хроматски индекс на граф (1 час) • две едноставни неравенства за хроматскиот индекс (1 час) • теорема на Vizing (за едноставни графови) (2 часа) • класа I и класа II - теорема на Кониг - Petersen граф е во класа II - едноставен доволен услов за припадност во класа II (2 часа) <p>Поими: правилно боење на ребра, хроматски индекс, класа I и класа II</p> <p>Предлог-проект: Теореме на Vizing-Gupta и Shannon</p> <p>Предлог-проект: Снарки</p>	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Учениците разгледуваат правилно боење на ребра и хроматски индекс на граф • Низ групна работа учениците одредуваат доволен услов за припадност во класа I и класа II • Со техниките за активна настава учениците ги разгледуваат доказите на теоремите на Vizing и Кониг и нивната примена во боењето графови <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>2.1: да дава едноставни примери за боење на ребра, да го објаснува параметарот χ', и да ја искажува теорема на Vizing</p> <p>2.2: да објаснува што е граф од класа I и граф од класа II</p> <p>2.3: да решава задачи со користење на теоремите на Vizing и Кониг</p> <p>2.4: да ги докажува наведените теореме, и да решава не-едноставни задачи во врска со ребрени-боења графови</p>
---	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

3	<p>- Да ги дефинира параметрите χ_l и χ'_l</p> <p>- Да ги докажува и применува неравенствата</p> $\chi \leq \chi_l \leq 1 + \Delta$ $\chi' \leq \chi'_l \leq 2\Delta - 1$ <p>- Да ја применува теоремата на Galvin</p>	<ul style="list-style-type: none"> • поим за параметрите χ_l и χ'_l (1 час) • неравенствата $\chi \leq \chi_l \leq 1 + \Delta$ (1 час) • неравенствата $\chi' \leq \chi'_l \leq 2\Delta - 1$ (1 час) • хипотеза на Diniz, LCC, и теорема на Galvin (3 часа) <p>Поими: боене од листа</p>	<p>Активности:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот ги дефинира параметрите χ_l и χ'_l, а учениците разгледуваат неравенства поврзани со тие параметри и степенот на граф • Низ групна работа учениците ги разгледуваат хипотезата на Diniz, LCC и теорема на Galvin <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>3.1: да ги објаснува параметрите χ_l и χ'_l</p> <p>3.2: да дава едноставни примери за правилно боене на темиња/ребра од листи</p> <p>3.3: да ги користи наведените неравенства во задачи</p> <p>3.4: да ја докажува теоремата на Galvin</p>
---	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>Оценување на постигањата на учениците</p>	<p>За да се оценат постигнувањата на ученикот неопходно е:</p> <ul style="list-style-type: none"> - да се согледа иницијалната состојба на ученикот (согледување на неговите претходни искуства, знаење и вештини); - да се разговара со ученикот за да се добијат сознанија за неговото логичко размислување, разбирањето на поими и степенот на разбирање при нивната примена, оспособеноста за решавање задачи; - континуирано следење на односот на ученикот кон работата, соработка со врсниците, покажаната иницијативност, љубопитност, самостојност, точност во искажувањето и истрајност во извршувањето на обврските; - континуирано утврдување и проверка на стекнатите знаења, способности и вештини во модуларните единици. <p>Оценувањето на постигањата на учениците ќе биде со бројна оценка (од 1 до 5). Писменото оценување ќе се врши преку изработка на четири писмени работи по две во секое полугодие.</p>
<p>Литература</p>	<p>За реализација на наставната програма неопходен е учебник одобрен од министер за образование и наука, збирка задачи и други извори.</p>
<p>Почеток на имплементација на наставната програма</p>	<p>Учебна 2022/2023 година</p>
<p>Институција/ носител на програмата</p>	<p>Биро за развој на образованието (БРО)</p>
<p>Потпис и датум на донесување на наставната програма</p>	<p>бр. 13-7336/14 22.6.2022 година</p> <p style="text-align: right;">МИНИСТЕР, Doc.Dr. Jeton Shaqiri</p> <hr style="width: 20%; margin-left: auto; margin-right: 0;"/>
<p>Датум на ревизија</p>	