Врз основа на член 55 став 1 од Законот за организација и работа на органите на државната управа („Службен весник на Република Северна Македонија" бр. 58/00, 44/02, 82/08,167/10,51/11, 96/2019 и 110/2019) и член 22 став 1 од Законот за средно образование („Службен весник на Република Северна Македонија" бр. 44/95, 24/96, 34/96, 35/97, 82/99, 29/02, 40/03, 42/03, 67/04, 55/05, 113/05, 35/06, 30/07, 49/07, 81/08, 92/08, 33/10, 116/10, 156/10, 18/11, 42/11, 51/11, 6/12, 100/12, 24/13, 41/14, 116/14, 135/14, 10/15, 98/15, 145/15, 30/16, 127/16, 67/17, 64/18 и 229/20) и член 3 од Законот за математичко-информатичка гимназија („Службен весник на Република Северна Македонија" бр. 64/18) министерот за образование и наука ја донесе Наставната програма по ***теорија на броеви*** за III (трета) година изборен предмет во математичко-информатичка гимназија.

МИНИСТЕРСТВО ЗА ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА

БИРО ЗА РАЗВОЈ НА ОБРАЗОВАНИЕТО

Наставна програма

ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

ИЗБОРЕН ПРЕДМЕТ

за III година

Математичко-информатичка гимназија

Скопје, 2022 година

Назив на наставната програма	Теорија на броеви
Тип на наставна програма	Изборна
Кредитна вредност на наставната програма	5 (пет) ЕЦВЕТ[1] кредити
Ниво на квалификација	**IV (четврто) ниво**
Година на изучување	**III (трета)**
Број на часови неделно/годишно за реализација на наставната програма	3/108
Цели на наставна програма	Ученикот/ученичката: - да ги продлабочи знаењата по математика елементарна теорија на деливост, конгруенции, аритметички функции, квадратни остатоци и Диофантови равенки, и да ги применува во секојдневни ситуации, како и во други наставни предмети; - да постигне самодоверба во примената на стекнатите математички вештини за наоѓање, користење и презентирање на математичките аргументи; - да ја цени убавината, моќта, корисноста и интернационалната димензија на математиката и да извлекува задоволство од постигнатите резултат; - да развива логичко, критичко и креативно математичко мислење.

[1]Закон за Националната рамка на квалификации.

Теми/подрачја/модуларни единици на наставната програма	• ОСНОВНИТЕ ПРИНЦИПИ (низ примери и задачи) • АРИТМЕТИЧКИ ФУНКЦИИ • РЕД НА ЕЛЕМЕНТ ПО МОДУЛ $\boldsymbol{n}$ • СТРУКТУРА НА ГРУПАТА $\boldsymbol{U}(\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}})(\cdot)$ • КВАДРАТНИ ОСТАТОЦИ • ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ
Материјално-технички и просторни услови	За постигнување на целите на наставата по *математика* неопходно е стручно осмислена и планирана примена на различни наставни средства, слики и цртежи, како и помагала: компјутер со соодветни програмски пакети, интернет и ЛЦД проектор.
Норматив на наставен кадар	Наставната програма за III година може да ја реализира: - наставник со завршени студии по математика/наставна или друга насока, VII/1 или VIA според МРК и 240 ЕКТС; Стручно лице кое исполнува најмалку еден од следните услови: -да бил ментор на ученик кој бил награден на престижен меѓународен натпревар од соодветната област; - да е запишан на докторски студии соодветната област; -да има стекнато научен степен на доктор на науки на соодветната област.

<table>
<tr><th></th><th colspan="4">ОСНОВНИТЕ ПРИНЦИПИ (низ примери и задачи) (15 часа)</th></tr>
<tr><th>Ред. број</th><th>Резултати од учењето</th><th>Содржини и поими</th><th>Активности и методи</th><th>Стандарди за оценување</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:
- Да решава натпреварувачки задачи со примена на принцип на екстрем
- Да решава натпреварувачки задачи со примена на принцип на Дирихле
- Да решава натпреварувачки задачи со примена на модуларна аритметика
- Да решава натпреварувачки задачи со примена на бесконечно опаѓање (примена на методот на Ферма)
- Да решава натпреварувачки задачи со примена на Кинеска теорема на остатоци</td><td>• Принцип на екстрем
- едноставни примери (1 час)
- натпреварувачки задачи (2 часа)

• Принцип на Дирихле
- едноставни примери (1 час)
- натпреварувачки задачи (2 часа)

• Модуларна аритметика
- едноставни примери (1 час)
- натпреварувачки задачи (2 часа)

• Бесконечно опаѓање (метод на Ферма)
- едноставни примери (1 час)
- натпреварувачки задачи (2 часа)

• Кинеска теорема на остатоци
- едноставни примери (1 час)
- натпреварувачки задачи (2 часа)

Поими : Принцип на екстрем, модуларна аритметика, бесконечно опаѓање.</td><td>Активности
• Наставникот организира активна настава за совладување на техниките на докажување низ задачи од принципот на екстрем, примена на принципот на Дирихле, модуларната аритметика, принципот на бесконечно опаѓање и кинеската теорема на остатоци
• Учениците ги совладуваат техниките на докажување преку решавање на натпреварувачки задачи

Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</td><td>Ученикот/ученичката може:

1.1: да ги искажува основните принципи
1.2: да дава едноставни примери за основните принципи
1.3: да решава задачи користејќи ги основните принципи
1.4: да докажува теореми и решава посложени задачи со помош на основните принципи</td></tr>
</table>

	АРИТМЕТИЧКИ ФУНКЦИИ (25 часа)			
Ред. број	**Резултати од учењето**	**Содржини и поими**	**Активности и методи**	**Стандарди за оценување**
1	**Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:** - Да дефинира аритметичка функција $f\colon \mathbb{Z}^{+} \to \mathbb{C}$ - Да дефинира сумациона функција $F = sum(f) : F(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{d\mid n} f(d)$ - Да дефинира Мобиусова функција μ - Да ја применува Мобиусовата формула за инверзија - Да дефинира мултипликативни функции - Да ја дефинира и докажува Ојлеровата функција - Да применува производ на Дирихле	• аритметичка ф-ја $f\colon \mathbb{Z}^{+} \to \mathbb{C}$, сумациона функција $F = sum(f) : F(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{d\mid n} f(d)$ - $\tau = sum\,(1), \sigma = sum(id)$ - дали постои аритметичка ф-ја f таква што $sum(f)(n) = \begin{cases} 1 : & n = 1 \\ 0 : & n > 1 \end{cases}$ (1 час) • Мобиусова функција μ - дефиниција - Мобиусова формула за инверзија - $sum\colon f \mapsto sum(f)$ претставува пермутација на множеството аритметички функции (2 часа) • Мултипликативни функции - дефиниција и основни примери $(1, id)$ - f е мултипликативна акко $sum(f)$ е мултипликативна	**Активности:** • Наставникот ги запознава учениците со функциите f, F, τ, σ и μ и нивните својства • Учениците низ групна работа ги совладуваат формулите и својствата на функциите, решаваат задачи со примена на производот на Дирихле $*$ и мултипликативни функции **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	**Ученикот/ученичката може:** 1.1: да ги набројува основните аритметички функции 1.2: да ги објаснува низ примери аритметичките функции 1.3: да ги применува аритметичките функции во задачи 1.4: да докажува теореми во врска со аритметички, мултипликативни функции

		- повторување за формулите за τ и σ (1 час) - повторување за Ојлерова ф-ја φ , што е $sum(\varphi)$? → прв доказ (на Гаус, со броење) дека $sum(\varphi) = id$, односно дека $n = \sum_{d\|n} \varphi(d)$ → $\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d\|n} \frac{\varphi(d)}{d}$ → $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ (1 час) -вежби за Ојлеровата функција (2 часа) • производ на Дирихле $*$ -комутативност, асоцијативност, инвертибилност на $*$ - ако барем две од функциите $f, g, f * g$ се мултипликативни, тогаш таква е и третата (2 часа) **Поими:** аритметичка функција, сумациона функција. Мултипликативна функција, Мобиусова функција, производ на Дирихле.		

2	- Да решава натпреварувачки задачи со примена на p - адична валуација ν_p и локален-глобален принцип за ν_p и деливост - Да решава натпреварувачки задачи со примена на $\nu_p(a^n - b^n)$ (lifting the exponent lemma) - Да решава натпреварувачки задачи со примена на функција на Лежандр e_p	• p - адична валуација ν_p -карактеристични особини -локален-глобален принцип за ν_p и деливост/равенство (1 час) - едноставни примери (1 час) - натпреварувачки задачи (2 часа) - $\nu_p(a^n - b^n)$ (lifting the exponent lemma) (2 часа) - едноставни примери (1 час) - натпреварувачки задачи (2 часа) • функција на Лежандр e_p - формули на Лежандр (1 час) - едноставни примери (1 час) - натпреварувачки задачи (2 часа) - теорема на Кумер за биномни коефициенти (1 час) - последици (2 часа)	**Активности** • Наставникот ги запознава учениците со p - адична валуација ν_p, функција на Лежандр e_p и теоремата на Кумер за биномни коефициенти низ дефиниции и поедноставни примери • Учениците низ групна работа ги применуваат стекнатите знења низ решавање натпреварувачки задачи **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	2.1: да искажува дефинициите на p - адична валуација и функција на Лежандр 2.2: да дава примери за локален-глобален принцип за ν_p и деливост/равенство 2.3: да решава задачи со користење на функциите ν_p и e_p 2.4: да докажува теореми во врска со ν_p и e_p , и да решава посложени задачи

		Поими: p - адична валуација, функција на Лежандр.		

	РЕД НА ЕЛЕМЕНТ ПО МОДУЛ n (14 часа)			
Ред. број	**Резултати од учењето**	**Содржини и поими**	**Активности и методи**	**Стандарди за оценување**
1	**Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:** - Да ја докажува малата теорема на Ферма и да ја применува во едноставни примери. - Да ја докажува теоремата на Вилсон и да ја применува во едноставни примери. - Да ја докажува теоремата на Ојлер и да ја применува во едноставни примери. - Да решава натпреварувачки задачи со примена на малата теорема на Ферма, теоремите на Вилсон и Ојлер	• Повторување за малата теорема на Ферма - едноставни примери (1 час) - натпреварувачки задачи (2 часа) • Повторување за теоремата на Вилсон - едноставни примери (1 час) - натпреварувачки задачи (2 часа) • Повторување за теорема на Ојлер - едноставни примери (1 час)	**Активности** • Наставникот организира повторување за малата теорема на Ферма, теоремите на Вилсон и Ојлер низ поедноставни примери • Со помош на техниките за активна настава учениците работат на посложени задачи **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	**Ученикот/ученичката може:** 1.1: да ги искажува теоремите на Ферма, Вилсон и Ојлер 1.2: да дава примери и препознава употреби на овие теореми 1.3: да ги користи и/или адаптира теоремите во конкретни задачи 1.4: да ги докажува теоремите, и да ги употребува истите при решавање на посложени задачи

		- натпреварувачки задачи (2 часа) **Поими:** **Предлог-проект:** псевдо-прости и броеви на Карлмишел		
2	- Да дефинира ред на елемент a по модул n , и да решава едноставни примери - Да дефинира примитивен корен - Да определува за кои броеви n $(2 \leq n \leq 11)$ постои примитивен корен по модул n - Да решава натпреварувачки задачи со примена на примитивен корен	• ред на елемент a по модул n - дефиниција и основни особини - едноставни примери (1 час) - натпреварувачки задачи (2 часа) -дали за $n > 1$ и $(a, n) = 1$ важи $\{x :\ a^x \equiv -1\ (mod\ n)\} \neq \emptyset$? (1 час) - поим за примитивен корен - експеримент: за кои броеви n $(2 \leq n \leq 11)$ постои примитивен корен по модул n ? (1 час)	**Активности** • Наставникот дефинира ред на елемент и примитивен корен по даден модул • Учениците низ групна работа решаваат посложени задачи поврзани со овие поими **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	2.1: да ја објаснува дефиницијата на ред на елемент по модул 2.2: да одредува ред на елемент по мал модул и да проверува постоење на примитивен корен 2.3: да го користи поимот за ред на елемент по модул и/или примитивен корен при решавање на задачи 2.4: да ги докажува основните особини за поимот ред на елемент по модул, и да ги користи при решавање на посложени задачи

		Поими: ред на елемент, примитивен корен.		

	СТРУКТУРА НА ГРУПАТА $\boldsymbol{U}(\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}})(\cdot)$ (15 часа)			
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	**Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:** - Да дефинира група, подгрупа, ред на група - Да ја применува теоремата на Лагранж - Да дефинира циклична подгрупа, ред на елемент во група, експонент на група - Да решава задачи со примена на група, подгрупа, ред на група, теорема на Лагранж , циклична подгрупа, ред на елемент во група, експонент на група - Да ја докажува и применува теоремата на Лежандр	• повторување и проширување на потребните алгебарски поими - група, подгрупа, ред на група, теорема на Лагранж (1 час) - циклична подгрупа, ред на елемент во група, експонент на група (1 час) -циклична група (постоење и единственост до изоморфизам) од произволен конечен или бесконечен ред, → конечна Абелова група е циклична акко експонент=ред (1 час) -сите подгрупи од циклична група се циклични, подгрупи од конечна циклична група, број на генератори и (повторно)	**Активности** • Наставникот организира повторување и проширување на алгебарските поими (група, подгрупа, ред на група, теорема на Лагранж, циклична подгрупа, ред на елемент во група, експонент на група и циклична група) • Учениците продлабочено ги изучуваат алгебарските поими низ задачи, докажување теореми и формулирање својства **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	**Ученикот/ученичката може:** 1.1: да ги искажува потребните алгебарски поими (од содржината) 1.2: да дава примери и да пресметува примитивен корен по модул мал прост број 1.3: да решава задачи со помош на индексно сметање 1.4: да ги докажува основните теореми (наведени во содржината)

		идентитет на Гаус $n = \sum_{d\|n} \varphi(d)$ (1 час) → нека G е конечна Абелова група т.ш. за секој $d \big\| \|G\|$ равенката $x^d = 1$ има најмногу d решенија $\Rightarrow G$ е циклична. (Лежандр) → ако $\mathbb{F}$ е поле, тогаш секоја конечна подгрупа $H \leq \mathbb{F}^*(\cdot)$ е циклична → за секој прост број p постои примитивен корен по модул p (1 час) • индексно сметање (2 часа) **Поими:** експонент на група, генератор, индексно сметање. **Предлог-проект:** Теорема на Гаус за збирот на примитивни корени по модул p.		

2	- Да ја формулира и докажува Кинеската теорема на остатоци - Да го докажува основниот изоморфизам $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{{p_1}^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{{p_k}^{\alpha_k}}$ - Да докажува групата $\boldsymbol{U}(\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}})(\cdot)$ е циклична $\Rightarrow n = 2,4, p^{\alpha}, 2p^{\alpha}$, за прост $p > 2$ - Да ја применува функцијата на Карлмишел - Да ја докажува и применува теоремата на Карлмишел - Да илустрира колку подобра е теоремата на Карлмишел од теоремата на Ојлер	• повторување за изоморфноста $U(\mathbb{Z}_n) \cong U\left(\mathbb{Z}_{{p_1}^{\alpha_1}}\right) \times \cdots \times U(\mathbb{Z}_{{p_k}^{\alpha_k}})$ - повторување за Кинеска теорема на остатоци и основниот изоморфизам $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{{p_1}^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{{p_k}^{\alpha_k}}$ (1 час) - групата $\boldsymbol{U}(\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}})(\cdot)$ е циклична $\Rightarrow n = 2,4, p^{\alpha}, 2p^{\alpha}$, за прост $p > 2$ (1 час) • доказ на обратната импликација (3 часа) • структура на групата $U(\mathbb{Z}_{2^{\alpha}})$ (1 час) • експонентот $\lambda(n)$ на групата $U(\mathbb{Z}_n)(\cdot)$ - функција на Карлмишел, теорема на Карлмишел (1 час) - илустрација колку подобра е теоремата на Карлмишел од теоремата на Ојлер (1 час) **Поими:** функција на Карлмишел	**Активности** • Наставникот организира повторување на основните својства за групата $U(\mathbb{Z}_n)(\cdot)$ • Учениците разгледуваат различни докази, прават споредба, донесуваат заклучок за разгледуваните својства низ систем задачи и со помош на групна работа **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	2.1: да разликува кога $\boldsymbol{U}(\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}})(\cdot)$ е циклична 2.2: да ја искажува низ едноставни примери структурната теорема за групата $\boldsymbol{U}(\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}})(\cdot)$ 2.3: да пресметува експонент на групата $U(\mathbb{Z}_n)(\cdot)$ и да ја применува теоремата на Карлмишел 2.4: да ја докажува структурната теорема за групата $\boldsymbol{U}(\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}})(\cdot)$

	КВАДРАТНИ ОСТАТОЦИ (15 часа)			
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	**Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:** - Да дефинира квадратни остатоци и квадратни неостатоци по модул прост број p - Да дефинира симбол на Лежандр - Да ја дефинира и применува теоремата на Ојлер (за симболот на Лежандр) - Да ја формулира и докажува лемата на Гаус - Да го формулира и докажува законот за квадратна реципрочност	• k - остатоци и k - неостатоци по модул n $(k, n \geq 2)$ - поими - основна теорема (на Ојлер) доколку постои примитивен корен по соодветниот модул - едноставни примери (1 час) • квадратни остатоци и квадратни неостатоци по модул прост број p - поими, симбол на Лежандр, мултипликативност на симболот на Лежандр, теорема на Ојлер (за симболот на Лежандр), вредноста на $\left(\frac{-1}{p}\right)$ (1 час) -множество на Гаус по модул прост број p, лема на Гаус (1 час) -вредностите $\left(\frac{2}{p}\right)$ и $\left(\frac{-2}{p}\right)$ (1 час)	**Активности** • Наставникот ги запознава учениците со дефинициите на поимите k - остатоци и k - неостатоци по модул n каде $k, n \geq 2$, квадратни остатоци и квадратни неостатоци по модул прост број p, вредноста на $\left(\frac{-1}{p}\right)$ и законот за квадратна реципрочност • Учениците решаваат посложени задачи во врска со наведените поими и изведуваат докази на теореми **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	**Ученикот/ученичката може:** 1.1: да ги искажува поимите за квадратен остаток и неостаток по модул прост број 1.2: да ги одредува квадратните остатоци по модул мал прост број 1.3: да ја применува теоријата на квадратни остатоци при решавање задачи 1.4: да ги докажува лема на Гаус, теорема на Ојлер, закон за квадратна реципрочност, и да ја применува теоријата на квадратни остатоци при решавање на посложени задачи

		• закон за квадратна реципрочност -формулација на законот и (пресметковни) примери (1 час) -доказ (Ајзенштајн) на законот (2 часа) **Поими:** остатоци, неостатоци, симбол на Лежандр, множество на Гаус, квадратна реципрочност.		
2	- Да решава задачи од квадратни остатоци по модул сложен број - Да решава задачи од симбол на Јакоби - Даја формулира и применува лемата на Хенсел - Да ја докажува лемата на Хенсел - Да ја решава диофантовата равенка $x^2 + y^2 = n$, за даден број n - Да ја формулира и докажува теоремата на Ферма-Ојлер - Да ја решава диофантовата равенка $x^2 + 3y^2 = n$, за даден број n	• квадратни остатоци по модул сложен број - симбол на Јакоби и (пресметковни) примери (1 час) - формален извод на полином и формулација на лема на Хенсел (1 час) - доказ на лема на Хенсел → ако $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, тогаш a е квадратен остаток по модул p^k за секој $k \geq 1$ (1 час) • две интересни квадратни Диофантови равенки	**Активности** • Наставникот ги воведува поимите квадратни остатоци по модул сложен број и симболот на Јакоби • Учениците низ активна настава решаваат посложени задачи, докажуваат теореми изведуваат заклучоци **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	2.1: да ги искажува поимите за квадратен остаток и неостаток по модул сложен број 2.2: да го пресметува симболот на Јакоби, и да ја воочува разликата со симболот на Лежандр 2.3: да ја применува теоремата на Ферма-Ојлер при решавање задачи 2.4: да ја докажува теоремата на Ферма-Ојлер и теоремата на Ојлер (за решливост на Диофантовите равенки $x^2 + y^2 = n$ и $x^2 + 3y^2 = n$)

		-$x^2 + y^2 = n$ → теорема на Ферма-Ојлер (доколку n е прост број) (2 часа) → решливост и број на решенија за даден број n (1 час) - $x^2 + 3y^2 = n$ → решливост и за даден број n (2 часа) **Поими:** формален извод на полином.		

	ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ (24 часа)			
Ред. број	**Резултати од учењето**	**Содржини и поими**	**Активности и методи**	**Стандарди за оценување**
1	**Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:** - Да ја решава линеарната диофантова равенка $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ (во случај кога $n = 2$) со помош на Евклидов алгоритам	• линеарна Дифантова равенка $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ - случајот $n = 2$, наоѓање решение со помош на Евклидов алгоритам (1 часа)	**Активности** • Наставникот ги запознава учениците со линеарни диофантови равенки • Учениците разгледуваат решливост на дадена равенка, совладуваат методи за	**Ученикот/ученичката може:** 1.1: да го препознава проблемот на Фробениус во конкретна ситуација 1.2: да дава примери за линеарна Диофантова равенка и проблем на Фробениус

	- Да испитува решливост на линеарната диофантова равенка $$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b$$ во ненегативни цели броеви (проблем на Фробениус)	- општ случај $n\geq 2$ (1 час) - проблем на Фробениус: решливост на равенката $$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b$$ во ненегативни цели броеви (3 часа) **Поими:** проблем на Фробениус	решавање (Евклидов алгоритам) **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	1.3: да решава линеарна Диофантова равенка 1.4: да ги докажува познатите теореми во врска со проблемот на Фробениус

2	- Да наоѓа Питагорови тројки кои се решенија на равенката $x^2+y^2=z^2$ - Да наоѓа „негативни" Питагорови тројки и определува општо решение на равенката $x^{-2}+y^{-2}=z^{-2}$ - Да испитува решливост и нерешливост во позитивни цели броеви на системот $$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\x^2-y^2=b^2\end{cases}$$ - Да определува решение на равенката $x^4+y^4=z^2$ во множество на цели броеви - Да определува решение на равенката $x^4-y^4=z^2$ во множество на цели броеви	• Питагорови тројки - примитивни тројки и општо решение на $x^2+y^2=z^2$ (1 час) - „негативни" Питагорови тројки и општо решение на равенката $x^{-2}+y^{-2}=z^{-2}$ (1 час) - нерешливост во позитивни цели броеви на системот $$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\x^2-y^2=b^2\end{cases}$$ (2 часа) - равенката $x^4+y^4=z^2$ (1 час) - равенката $x^4-y^4=z^2$ (1 час) **Поими:** Питагорови тројки, примитивни тројки, „негативни" тројки.	**Активности** • Наставникот ги води учениците низ продлабочено изучување на видови Диофантови равенки преку воведување на поимот Питагорови тројки броеви и разгледување на посебни равенки **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	2.1: да препознава примитивни Питагорови тројки 2.2: да конструира примитивни Питагорови тројки 2.3: да решава задачи со користење на општото решение на $x^2+y^2=z^2$ 2.4: да докажува решливост или нерешливост на одредени Диофантови равенки и системи од Диофантови равенки со помош на општото решение на $x^2+y^2=z^2$

3	- Да ја формулира равенката на Пел $(d \in \mathbb{Z}^+ \not\ni \sqrt{d})$ $$x^2 - dy^2 = 1$$ - Да определува фундаментално решение на равенката на Пел - Формуллација и доказ на основната теорема и нејзин матричен запис - Да определува фундаментално решение на равенката на Пел со помош на верижни дропки	• равенка на Пел $(d \in \mathbb{Z}^+ \not\ni \sqrt{d})$ $$x^2 - dy^2 = 1$$ -историјат, тривијално решение, фундаментално решение, основна теорема (формулација, матричен запис, примери) (2 часа) - доказ на теоремата (3 часа) - како до фундаментално решение со помош на верижни дропки (2 часа) **Поими:** равенка на Пел, тривијално решение, фундаментално решение. **Предлог-проект:** „негативна“ равенка на Пел $(d \in \mathbb{Z}^+ \not\ni \sqrt{d})$ $$x^2 - dy^2 = -1$$	**Активности:** • Наставникот ги запознава учениците со равенката на Пел и постоењето на тривијално и фундаментално решение • Учениците решаваат равенки на Пел, разработуваат својства на равенката и дискутираат за решливоста **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	3.1: да препознава равенка на Пел 3.2: да прави разлика помеѓу тривијално, фундаментално, и општо решение на равенка на Пел 3.3: да одредува фундаментално и општо решение на равенка на Пел 3.4: да ја докажува основната теорема, и да ја користи теоријата при решавање на посложени задачи

4	- Да дефинира Гаусов прстен - Да определува Питагорови тројки со помош на Гаусовиот прстен - Да ја решава равенката на Лебег $$x^2 + 1 = y^n \quad (n \geq 2)$$ со помош на Гаусовиот прстен - Да ја решава равенката на Ферма $$x^2 + 4 = y^3$$ со помош на Гаусовиот прстен	• Гаусов прстен $\mathbb{Z}[i]$ - Евклидовост, конјугати, асоцијати, норма, единици, прости броеви (во прстенот) (3 часа) - Питагорови тројки со помош на Гаусовиот прстен (1 час) - равенка на Лебег $$x^2 + 1 = y^n \quad (n \geq 2)$$ со помош на Гаусовиот прстен (1 час) - равенка на Ферма $$x^2 + 4 = y^3$$ со помош на Гаусовиот прстен (1 час) **Поими:** Гаусов прстен, равенка на Лебег, равенка на Ферма. **Предлог-проект:** интегралниот домен $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$: Евклидовост, решенија на равенката $$x^2 + 2 = y^3$$ со помош на овој прстен.	**Активности:** • Наставникот ги запознава учениците со поимите гаусов прстен, равенка на Лебег и Ферма, како и одредувањето на питагорови тројки броеви со помош на Гаусовиот прстен • Учениците низ групна настава решаваат равенки со примена на усвоените поими, својства и закони **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	4.1: да ја искажува дефиниција за Гаусови броеви 4.2: да изведува основна аритметика во $\mathbb{Z}[i]$, да искажува кои се прости броеви во Гаусовиот прстен, и да факторизира број во истиот 4.3: да демонстрира како постоењето на единствена факторизација во $\mathbb{Z}[i]$ се користи за решавање на равенките Питагора, Лебег, и Ферма 4.4: да докажува Евклидовост на $\mathbb{Z}[i]$, и истата да ја користи при решавање на посложени задачи

Оценување на постигањата на учениците	За да се оценат постигнувањата на ученикот неопходно е: - да се согледа иницијалната состојба на ученикот (согледување на неговите претходни искуства, знаење и вештини); - да се разговара со ученикот за да се добијат сознанија за неговото логичко размислување, разбирањето на поими и степенот на разбирање при нивната примена, оспособеноста за решавање задачи; - континуирано следење на односот на ученикот кон работата, соработка со врсниците, покажаната иницијативност, љубопитност, самостојност, точност во искажувањето и истрајност во извршувањето на обврските; - континуирано утврдување и проверка на стекнатите знаења, способности и вештини во модуларните единици. Оценувањето на постигањата на учениците ќе биде со бројна оценка (од 1 до 5). Писменото оценување ќе се врши преку изработка на четири писмени работи по две во секое полугодие.
Литература	За реализација на наставната програма неопходен е учебник одобрен од министер за образование и наука, збирка задачи и други извори.
Почеток на имплементација на наставната програма	**Учебна 2022/2023 година**
Институција/ носител на програмата	**Биро за развој на образованието (БРО)**
Потпис и датум на донесување на наставната програма	бр. 13-7336/16 22.6.2022 **година** МИНИСТЕР, Doc.Dr. Jeton Shaqiri ____________________
Датум на ревизија	