

Врз основа на член 55 став 1 од Законот за организација и работа на органите на државната управа („Службен весник на Република Северна Македонија“ бр. 58/00, 44/02, 82/08,167/10,51/11, 96/2019 и 110/2019) и член 22 став 1 од Законот за средно образование („Службен весник на Република Северна Македонија“ бр. 44/95, 24/96, 34/96, 35/97, 82/99, 29/02, 40/03, 42/03, 67/04, 55/05, 113/05, 35/06, 30/07, 49/07, 81/08, 92/08, 33/10, 116/10, 156/10, 18/11, 42/11, 51/11, 6/12, 100/12, 24/13, 41/14, 116/14, 135/14, 10/15, 98/15, 145/15, 30/16, 127/16, 67/17, 64/18 и 229/20) и член 3 од Законот за математичко-информатичка гимназија („Службен весник на Република Северна Македонија“ бр. 64/18) министерот за образование и наука ја донесе Наставната програма по *алгебра* за III (трета) година задолжителен предмет во математичко-информатичка гимназија.

МИНИСТЕРСТВО ЗА ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА

БИРО ЗА РАЗВОЈ НА ОБРАЗОВАНИЕТО



Наставна програма

АЛГЕБРА

за III година

Математичко-информатичка гимназија

Скопје, 2022 година

Назив на наставната програма	Алгебра
Тип на наставна програма	Задолжителна
Кредитна вредност на наставната програма	7 (седум) ЕЦВЕТ ¹ кредити (5+2, 2 кредита одговараат на 50 часа активности на ученикот од кои 18 часа за домашна работа, 12 часа за подготовка за писмени работи и 20 часа за самостојно учење)
Ниво на квалификација	IV (четврто) ниво
Година на изучување	III (трета)
Број на часови неделно/годишно за реализација на наставната програма	3/108
Цели на наставна програма	<p>Ученикот/ученичката:</p> <ul style="list-style-type: none"> - да ги продлабочи знаењата по математика, елементарна теорија на броеви, линеарна алгебра, неравенства и дискретна веројатност, и да ги применува во секојдневни ситуации, како и во други наставни предмети; - да постигне самодоверба во примената на стекнатите математички вештини за наоѓање, користење и презентирање на математичките аргументи; - да ја цени убавината, моќта, корисноста и интернационалната димензија на математиката и да извлекува задоволство од постигнатите резултат; - да развива логичко, критичко и креативно математичко мислење.

¹Закон за Националната рамка на квалификации.

<p>Теми/подрачја/модуларни единици на наставната програма</p>	<ul style="list-style-type: none"> • ФУНКЦИИТЕ ЦЕЛ ДЕЛ И ДРОБЕН ДЕЛ • ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА • НЕРАВЕНСТВА • ВЕРИЖНИ ДРОПКИ • ДИСКРЕТНА ВЕРОЈАНТНОСТ
<p>Материјално-технички и просторни услови</p>	<p>За постигнување на целите на наставата по <i>математика</i> неопходно е стручно осмислена и планирана примена на различни наставни средства, слики и цртежи, како и помагала: компјутер со соодветни програмски пакети, интернет и ЛЦД проектор.</p>
<p>Норматив на наставен кадар</p>	<p>Наставната програма за III година може да ја реализира:</p> <ul style="list-style-type: none"> - наставник со завршени студии по математика/наставна или друга насока, VII/1 или VIA според МРК и 240 ЕКТС; <p>Стручно лице кое исполнува најмалку еден од следните услови:</p> <ul style="list-style-type: none"> - да бил ментор на ученик кој бил награден на престижен меѓународен натпревар од соодветната област; - да е запишан на докторски студии соодветната област; - да има стекнато научен степен на доктор на науки на соодветната област.

ФУНКЦИИТЕ ЦЕЛ ДЕЛ И ДРОБЕН ДЕЛ (6 часа)				
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Да ги дефинира функциите цел дел и дробен дел - Да решава задачи со примена на функциите цел дел и дробен дел - Да ги докажува основните особини на функцијата цел дел и да ги применува во конкретни задачи $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$ $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & : x \in \mathbb{Z} \\ -1 & : x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n \quad (n \in \mathbb{Z})$ $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ $\lfloor x - y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x - y \rfloor + 1$ $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \leq \lfloor xy \rfloor \leq \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \quad (x, y \geq 0)$	<ul style="list-style-type: none"> • дефиниции на функциите цел дел и дробен дел & едноставни примери (1 час) • докажување на основните особини на функцијата цел дел <ul style="list-style-type: none"> - $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$ - $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & : x \in \mathbb{Z} \\ -1 & : x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ - $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n \quad (n \in \mathbb{Z})$ - $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ - $\lfloor x - y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x - y \rfloor + 1$ - $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \leq \lfloor xy \rfloor \leq \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \quad (x, y \geq 0)$ - идентитет на Лаплас (доказот со помош на периодичност) (2 часа) • теорема на Бети (1 час) • натпреварувачки задачи (2 часа) <p>Поими: цел дел, дробен дел</p>	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот ги воведува поимите цел дел и дробен дел, а учениците решаваат едноставни задачи, скицираат график испитуваат едноставни својства на функциите • Низ групна работа учениците докажуваат некои од основните својства на функцијата цел дел • Преку техниките за активна настава учениците ги изведуваат доказите на идентитетот на Лаплас и теоремата на Бети • Учениците разгледуваат натпреварувачки задачи преку кои ја совладуваат примената на знаењата од функциите цел и дробен дел <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.1: да ги дефинира функциите цел и дробен дел и да ги илустрира со едноставни примери 1.2: да дава примери за основните особини на функцијата цел дел 1.3: да ги користи основните особини во решавање задачи 1.4: да ги докажува наведените особини и теоремата на Бети, и да решава не-едноставни задачи во контекст на функциите цел и дробен дел

	<ul style="list-style-type: none"> - Да го применува во задачи идентитетот на Лаплас - Да ја применува теоремата на Бети 			
--	--	--	--	--

ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА (36 часа)

Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Да дефинира пермутација на конечно множество - Да дефинира и применува инверзна пермутација - Дефинира и користи во задачи циклична пермутација - Да дефинира „скоро циклична“ пермутација - Да определува парност на пермутација - Да определува број на инверзии на пермутација - Да решава натпреварувачки задачи 	<ul style="list-style-type: none"> • повторување за пермутации на конечно множество - функционална ознака - множење (компонирање) на пермутации - инверзна пермутација <p style="text-align: right;">(1 час)</p> <ul style="list-style-type: none"> • групата $S_n(\cdot)$ - примери (кај S_1, S_2, S_3, S_4, S_5) - број на елементи на S_n - дали $S_n(\cdot)$ е абелова? <p style="text-align: right;">(1 час)</p> <ul style="list-style-type: none"> • циклична пермутација - примери (кај S_3, S_4, S_5) - број на циклични пермутации (во S_n) 	<p>Активности:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот организира повторување на поимот пермутации на конечно множество, а учениците низ задачи разгледуваат својства на множеството од сите пермутации на множество со n елементи • Низ групна работа учениците разгледуваат својства на симетричната група, дефиниција и својства на инверзна и циклична пермутација, степен и ред 	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <p>1.1: да искажува дефиниции на поимите: пермутација, циклична пермутација, „скоро циклична“ пермутација;</p> <p>1.2: да дава примери за групата $S_n(\cdot)$, циклична и „скоро циклична“ пермутација, транспозиција, инверзија, итн.</p> <p>1.3: да декомпонира пермутација на „скоро циклични“ пермутации, да одредува знак на пермутација, да степенува пермутација, да одредува ред на пермутација</p>

		<ul style="list-style-type: none"> - насочен циклус придружен на циклична пермутација - степенување на циклична пермутација - ред на циклична пермутација (1 час) • „скоро циклична“ пермутација - ред на „скоро циклична“ пермутација - број на „скоро циклични“ пермутации од даден ред (1 час) • декомпонирање на пермутација на „скоро циклични“ пермутации - примери(кај S_3, S_4, S_5) - насочени циклуси придружени на пермутација - степенување на пермутација - ред на пермутација (2 часа) • транспозиција - запишување на „скоро циклична“ пермутација како производ од транспозиции - запишување на пермутација како производ од транспозиции 	<ul style="list-style-type: none"> • Со помош на техниките за активна настава учениците вршат декомпонирање на пермутација и одредуваат парност на пермутација • Наставникот организира разгледување на натпреварувачки задачи преку кои учениците разгледуваат својства на пермутации, запишување на пермутации и испитување парност на пермутации <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>1.4: да ја докажува издржаноста на поимот знак на пермутација, и да ги користи поимите за парна и непарна пермутација во не-едноставни задачи</p>
--	--	--	--	--

		<ul style="list-style-type: none"> - парност (знак) на пермутација σ, ознака $sgn(\sigma)$ - инверзија на пермутација σ, број на инверзии $inv(\sigma)$ - формула $sgn(\sigma) = (-1)^{inv(\sigma)}$ (3 часа) • подгрупата \mathcal{A}_n и аритметика во $\mathcal{S}_n/\mathcal{A}_n$ - број на парни пермутации - број на непарни пермутации - $sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma)sgn(\tau)$ (1 час) • неколку натпреварувачки задачи во кои се применува поимот парност/непарност на пермутација (2 часа) <p>Поими: циклична пермутација, „скоро циклична“ пермутација, транспозиција, парност (знак) на пермутација, инверзија</p> <p>Предлог-проект: сложувалка</p>		
2	<ul style="list-style-type: none"> - Да врши операции со матрици - Да пресметува детерминанти од ред 2, 3, 4 и ги знае нивните особини 	<ul style="list-style-type: none"> • повторување за матрици - множење на матрица со скалар ($\in \mathbb{F}$) - собирање на матрици 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот организира повторувањена поимот за матрица, операции со матрици, 	<p>2.1: да искажува дефиниција за детерминанта</p> <p>2.2: да пресметува детерминанти со помош на графички формули</p>

	<p>- Да определува минори и алгебарски компоненти на детерминанта</p> <p>- Да определува инверзна матрица</p> <p>- Да го користи Крамеровите правила</p>	<p>- множење на матрици (1 час)</p> <p>- транспонирање</p> <p>• поим за детерминанта на квадратна матрица</p> <p>- дефиниција</p> <p>- испишување на детерминанти од ред 2, 3, 4 (1 час)</p> <p>• графички формули за пресметување на детерминанти од ред 2, 3, 4 (1 час)</p> <p>• основни особини на детерминантите</p> <p>- $\det(A) = \det(A^T)$</p> <p>- линеарност (адитивност и хомогеност) по редица/колона</p> <p>- пермутирање на редици/колони: $\det(B) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \det(A)$</p> <p>→ транспонирање го менува знакот на детерминантата</p> <p>→ на што е еднаква детерминанта со две исти редици/колони?</p> <p>- детерминантата останува непроменета при додавање на</p>	<p>видови матрици, детерминанта на квадратна матрица</p> <p>• Низ групна работа учениците разгледуваат транспонирана детерминанта, трансформации на редици и колони и својства на тие трансформации</p> <p>• Со помош на техниките за активна настава учениците одредуваат адјунгирана матрица, вршат поврзување на систем од n линеарни равенки со n непознати и детерминанта преку Крамерови формули</p> <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>2.3: да развива детерминанта по редица/колона и да решава задачи со примена на детерминанти</p> <p>2.4: да ги докажува основните особини за детерминанти, да ги докажува формулите на Лаплас и формулите на Лајбниц</p>
--	--	---	---	--

		<p>мултиплум од редица/колона на друга редица/колона - $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ (3 часа)</p> <ul style="list-style-type: none"> • минори и алгебарски комплементи - формули на Лаплас - адјунгирана матрица (2 часа) <ul style="list-style-type: none"> • инвертибилност на матрица - детерминантен критериум - формула - примери (2 часа) <ul style="list-style-type: none"> • детерминанти придружени на систем од n линеарни равенки со n непознати - дефиниција - примери - Крамеров систем - формули на Лајбниц (Крамерови формули) (2 часа) <p>Поими: детерминанта, минор, алгебарски комплемент, адјунгирана матрица, Крамеров систем</p>		
--	--	--	--	--

		<p>Предлог-проект: Лапласов развој на детерминанта</p> <p>Предлог-проект: Вандермондеова детерминанта</p> <p>Предлог-проект: Циклична детерминанта</p>		
3	<ul style="list-style-type: none"> - Да дефинира n-димензионален вектор - Да врши операции со n-димензионални вектори - Да испитува линеарна зависност на вектори - Да претставува даден вектор како линеарна комбинација од други вектори - Да дефинира ранг на систем вектори и да го наоѓа во конкретни примери - Да наоѓа редичен, колониен ранг - Да врши елементарни трансформации на матрица - Да ја применува теоремата на Кронекер - Капели - Да решава хомоген систем линеарни равенки 	<ul style="list-style-type: none"> • повторување за n-димензионален вектор - вектор-редица и множеството \mathbb{F}^n - вектор-колона и множеството \mathbb{F}_n - множење на вектор со скалар - собирање на вектори - $m \times n$ матрица се состои од m вектор -редици и n вектор-колони <p style="text-align: right;">(1 час)</p> <ul style="list-style-type: none"> • поим за линеарна зависност на (конечен) систем вектори - примери - линеарна независност - потсистем/надсистем <p style="text-align: right;">(1 час)</p> <ul style="list-style-type: none"> • поим за линеарна комбинација на систем вектори - критериум за линеарна зависност на систем 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот организира повторувањена поимот за n-димензионален вектор, а учениците решаваат задачи од операции со вектори • Наставникот дефинира линеарна зависност/независност на вектори, ранг на систем вектори • Учениците низ групна работа одредуваат ранг на матрица и се оспособуваат за примена на елементарните трансформации на матрици при решавање систем со помош на Теоремата на Кронекер-Капели 	<p>3.1: да разликува вектор-редица и вектор-колона и да ги искажува поимите линеарна зависност/независност на систем вектори, ранг на систем вектори и матрица</p> <p>3.2: да дава примери за линеарно зависни/независни системи вектори</p> <p>3.3: да одредува ранг на матрица, и да ја применува теоремата на Кронекер-Капели за решавање на систем линеарни равенки</p> <p>3.4: да ги докажува наведените теореми</p>

		<p>- основна теорема: Нека $m > n$ и секој вектор од систем (a_1, \dots, a_m) е линеарна комбинација на векторите од систем (b_1, \dots, b_n). Тогаш системот (a_1, \dots, a_m) е линеарно зависен.</p> <p>- примери (2 часа)</p> <ul style="list-style-type: none"> • поим за ранг на систем вектори <p>-основната теорема интерпретирана преку поимот ранг</p> <p>-примери</p> <p>-елементарни трансформации на систем вектори & инваријантност на ранг (2 часа)</p> <ul style="list-style-type: none"> • редичен и колоничен ранг на матрица <p>-елементарни редични трансформации</p> <p>-елементарни колонични трансформации</p> <p>-примери (1 час)</p> <ul style="list-style-type: none"> • детерминантен ранг на матрица 	<p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	
--	--	--	--	--

		<ul style="list-style-type: none"> - дефиниција - примери - детерминатен ранг=редичен ранг=колоничен ранг - еквивалентни матрици - две матрици имаат ист ранг ако се еквивалентни <p style="text-align: right;">(2 часа)</p> <ul style="list-style-type: none"> • теорема на Кронекер-Капели <p style="text-align: right;">(2 часа)</p> <ul style="list-style-type: none"> • хомоген систем линеарни равенки <p style="text-align: right;">(1 час)</p> <p>Поими: линеарна зависност, линеарна независност, линеарна комбинација, ранг на систем вектори, редичен, колоничен и детерминатен ранг на матрица, еквивалентни матрици</p> <p>Предлог-проект: Ако K_n се декомпонира на комплетни бипартитни графови H_1, H_2, \dots, H_m тогаш $m \geq n - 1$.</p>		
--	--	---	--	--

НЕРАВЕНСТВА (32 часа)

Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Да го знае подредувањето на реалните броеви - Да ги знае и применува основните својства на релациите $<$ и \leq - Да дефинира апсолутна вредност и решава задачи со примена на апсолутна вредност - Да решава задачи со примена на функционално неравенство 	<ul style="list-style-type: none"> • природно подредување на реалните броеви - $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$ - \mathbb{R}^+ е затворено за операциите $+$ и \cdot - $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad x^2 \in \mathbb{R}^+$ - релацијата $<$: $x < y \stackrel{def}{\iff} y - x \in \mathbb{R}^+$ - релацијата \leq : $x \leq y \stackrel{def}{\iff} y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ - пример: ако $a \geq b$ и $c \geq d$, тогаш што е поголемо: $ac + bd$ или $ad + bc$? <p>(1 час)</p> <ul style="list-style-type: none"> • основни својства на релациите $<$ и \leq - транзитивност - компатибилност со собирање - компатибилност со множење - трихотомија <p>(1 час)</p> <ul style="list-style-type: none"> • апсолутна вредност 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот дефинира релација подредување и основни својства на релацијата во множеството реални броеви, а учениците докажуваат теореми, воочуваат својства • Низ групна работа учениците разгледуваат својства на апсолутна вредност и основни неравенства со апсолутна вредност • Учениците решаваат неравенки <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <p>1.1: да ги искажува основните својства на релацијата подредување во множеството \mathbb{R}, и да разликува бројно од функционално неравенство, како и неравенство од равенка</p> <p>1.2: да одредува множество решенија на равенки и неравенки со апсолутни вредности</p> <p>1.3: да докажува бројни неравенства</p> <p>1.4: да ги докажува основните својства на релацијата подредување во множеството \mathbb{R},</p>

		<ul style="list-style-type: none"> - основни особини - неравенство на триаголник (основен облик) - неравенство на триаголник (општ облик) <p style="text-align: right;">(1 час)</p> <ul style="list-style-type: none"> • поим за бројно и функционално неравенство - дефинициона област на функционално неравенство (D) -множество решенија на функционално неравенство (M) - функционални неравенства од класа I ($M = D$: идентични неравенства) - функционални неравенства од класа II ($M \subsetneq D$: неравенки) → неравенства се докажуваат, а неравенки се решаваат! • неравенства и неравенки со апсолутна вредност (2 часа) <p>Поими: природно подредување, трихотомија, неравенство на триаголник, функционално неравенство, неравенка</p>		
--	--	---	--	--

2	<ul style="list-style-type: none"> - Да определува дискриминанта на квадратен трином - Да наоѓа решенија на квадратна равенка - Да решава натпреварувачки задачи 	<ul style="list-style-type: none"> • дискриминанта на квадратен трином и решенија на квадратна равенка (1 час) • секој полн квадрат е ненегативен - едноставни примери - натпреварувачки задачи (3 часа) <p>Поими: дискриминанта</p>	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот организира повторување за дискриминанта на квадратен трином, а учениците решаваат поедноставни и посложени задачи со примена на дискриминанта <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>2.1: да наведува формула за дискриминанта и решенија на квадратна равенка</p> <p>2.2: да дава примери за природата на решенијата на квадратна равенка</p> <p>2.3: да одредува множество решенија на квадратна равенка и неравенка</p> <p>2.4: да решава не-едноставни задачи кои се сведуваат на фактот дека секој полн квадрат е ненегативен</p>
3	<ul style="list-style-type: none"> - Да ги дефинира и применува средните величини - Да ја применува основната теорема на функцијата $m: \alpha \mapsto m_\alpha$ во задачи - Да ги докажува неравенствата <ul style="list-style-type: none"> AC \geq GC (\geq XC) КвС \geq AC КвС \geq AC \geq GC \geq XC $>$ ($\forall x, \alpha \in \mathbb{R}^+$) $x^\alpha = 1$ $<$ - Да решава натпреварувачки задачи од неравенства со примена на средните величини 	<ul style="list-style-type: none"> • поим за средни величини: за дадени $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $m_\alpha(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} \left(\frac{a_1^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)^{1/\alpha} & : \alpha \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} & : \alpha = 0 \end{cases}$ - основната теорема за функцијата: $m: \alpha \mapsto m_\alpha$ (без доказ) (1 час) • докажување на неравенството AC \geq GC (\geq XC) 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот ги дефинира средните величини, а учениците се оспособуваат за изведување докази на неравенствата меѓу средните величини и нивна примена во докази на посложени неравенства • Низ групна работа учениците решаваат задачи со примена на неравенствата меѓу средините и експоненцијалното неравенство 	<p>3.1: да ги искажува дефинициите на основните средни величини</p> <p>3.2: да дава примери за основните неравенства меѓу средините</p> <p>3.3: да решава едноставни задачи со примена на основните неравенства меѓу средини</p> <p>3.4: да ги докажува наведените основни неравенства меѓу средините, и да ги применува при решавање натпреварувачки задачи</p>

		<p>- доказ на Коши (со регресивна индукција) - доказ со „мазнење“ (2 часа)</p> <p>• докажување на неравенството $KBC \geq AC$ (доказ со „мазнење“) (1 час)</p> <p>• натпреварувачки задачи кои се сведуваат на неравенството $KBC \geq AC \geq GC \geq XC$ (2 часа)</p> <p>• експоненцијално неравенство $(\forall x, \alpha \in \mathbb{R}^+) x^\alpha = 1 + \alpha(x - 1)$ (2 часа)</p> <p>Поими: средни величини, аритметичка средина, геометриска средина, хармониска средина, квадратна средина, „мазнење“, експоненцијално неравенство</p>	<p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	
--	--	---	--	--

		<p>Предлог-проект: Бројот e и основното неравенство за функцијата \exp</p> <p>(1) $(\forall x \geq 1)$</p> $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ <p>(2) $(\forall x \in \mathbb{R}) e^x \geq 1 + x$ со равенство ако $x = 0$</p>		
4	<ul style="list-style-type: none"> - Да ја применува Абелова сумациона формула - Да ги применува неравенствата на Абел - Да ги користи неравенствата за преуредување - Да го докажува и применува неравенството на Коши - Шварц 	<ul style="list-style-type: none"> • Абелова сумациона формула и неравенства на Абел <ul style="list-style-type: none"> - докази - примери на натпреварувачки задачи (3 часа) • неравенства за преуредување <ul style="list-style-type: none"> - прво неравенство за преуредување (три докази: (1) со индукција (2) со „мазнење“ (3) со Абелова сумациона формула) (2 часа) - неколку последици (Несбит, Коши-Шварц, Чебишев) (2 часа) - второ неравенство за преуредување (1 час) - примери со натпреварувачки задачи (2 часа) 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот ги запознава учениците со Абелова сумациона формула, неравенства на Абел и неравенствата за преуредување • Учениците низ групна работа разгледуваат докази на неравенствата и ги користат за решавање на натпреварувачки задачи • Со помош на техниките за активна настава учениците разгледуваат докази и на други поважни неравенства и нивни последици <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку</p>	<p>4.1: да ги искажува познатите неравенства: на Абел, за преуредување, Коши-Шварц, итн.</p> <p>4.2: да дава примери за наведените неравенства</p> <p>4.3: да ги користи познатите неравенства при докажување на поедноставни неравенства</p> <p>4.4: да ги докажува познатите неравенства, и да ги користи истите при решавање на натпреварувачки задачи</p>

		<ul style="list-style-type: none"> • неравенство на Коши-Шварц - доказ со дискриминанта на квадратен трином & доказ со идентитет (1 час) - облик на Артур Енгелс (доказ со индукција) (1 час) - примери со натпреварувачки задачи (2 часа) <p>Поими: Абелова сумациона формула, неравенства за преуредување, неравенства на Коши-Шварц, облик на Артур Енгелс, Чебишев</p>	откривање, решавање проблеми.	
ВЕРИЖНИ ДРОПКИ (16 часа)				
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Да дефинира конечна едноставна верижна дропка - Да го применува Евклидовиот алгоритам - Да применува Евклидови матрици 	<ul style="list-style-type: none"> • Евклидов алгоритам и конечни едноставни верижни дропки (2 часа) • конвергенти и Евклидови матрици (1 час) • единственост (?) на запис како конечна едноставна верижна дропка (1 час) 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот ги запознава учениците со Евклидовиот алгоритам и конечни едноставни верижни дропки • Низ групна работа учениците разгледуваат начини на запишување на рационален 	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <p>1.1: да ја искажува врската меѓу Евклидов алгоритам и претставување како верижна дропка</p> <p>1.2: да дава примери за претставување на рационален број како конечна едноставна верижна дропка</p>

		<ul style="list-style-type: none"> рационални броеви и конечни едноставни верижни дробки (1 час) <p>Поими: конечна верижна дробка, конвергенти</p>	<p>број со помош на конечни едноставни верижни дробки</p> <ul style="list-style-type: none"> Со помош на техниките за активна настава учениците истражуваат за Евклидови матрици и докази на тврдења поврзани со конечни едноставни верижни дробки <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>1.3: да одредува конечна едноставна верижна дробка за даден рационален број</p> <p>1.4: да ја докажува двојственоста на записот</p>
2	<ul style="list-style-type: none"> Да испитува конвергенција на бесконечни едноставни верижни дробки Да го формулира и докажува алгоритмот за претставување на ирационален број како бесконечна едноставна верижна дробка Да решава натпреварувачки задачи 	<ul style="list-style-type: none"> бесконечни едноставни верижни дробки конвергенти конвергенција еднозначност примери (3 часа) алгоритам за претставување на ирационален број како бесконечна едноставна верижна дробка формулација доказ примери 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> Учениците разгледуваат запишување на ирационален број со помош на бесконечни верижни дробки, разгледуваат примери и ги користат како рационални апроксимации-конвергенти на ирационален број учениците усвојуваат алгоритам, разгледуваат доказ, вршат анализа и донесуваат заклучок 	<p>2.1: да ги искажува поимите за бесконечна верижна дробка и конвергенти</p> <p>2.2: да дава примери за бесконечни едноставни верижни дробки</p> <p>2.3: да го применува алгоритмот за претставување на ирационален број како бесконечна едноставна верижна дробка</p> <p>2.4: да ја докажува единственоста на записот како бесконечна едноставна верижна дробка, и издржаноста на алгоритмот</p>

		(2 часа) Поими: бесконечна верижна дробка, конвергенти	Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	
3	- Да ја употребува во задачи основната теорема за периодични бесконечни едноставни верижни дробки - Да го претставува \sqrt{a} како периодична бесконечна едноставна верижна дробка	• основна теорема за периодични бесконечни едноставни верижни дробки (2 часа) • чисто-периодични бесконечни едноставни верижни дробки (2 часа) • претставување на \sqrt{a} како периодична бесконечна едноставна верижна дробка Поими: периодична бесконечна верижна дробка,	Активности • Учениците ја докажуваат и применуваат теоремата за периодични бесконечни едноставни верижни дробки • Низ групна работа учениците го запишуваат \sqrt{a} како периодична бесконечна едноставна верижна дробка Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	3.1: да ја искажува основната теорема за периодични бесконечни едноставни верижни дробки 3.2: да дава примери за периодични и чисто-периодични бесконечни едноставни верижни дробки 3.3: да претставува квадратни ирационалности како периодична бесконечна едноставна верижна дробка 3.4: да ја докажува основната теорема за периодични бесконечни едноставни верижни дробки

		чисто периодична бесконечна верижна дропка		
--	--	---	--	--

ДИСКРЕТНА ВЕРОЈАТНОСТ (18 часа)				
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Да дефинира елементарен настан - Да ги употребува операциите со елементарни настани во задачи 	<ul style="list-style-type: none"> • елементарни настани (1 час) • настани и операции со нив (1 час) • веројатносен модел на експеримент со конечно многу исходи (1 час) 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот организира групна работа низ која учениците разгледуваат експерименти со конечно многу исходи и различни настани за кои пресметуваат веројатност 	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <p>1.1: да препознава елементарни настани при реализација на експеримент</p> <p>1.2: да дава примери за веројатносни модели</p>

	<ul style="list-style-type: none"> - Да ја применува класичната дефиниција за веројатност - Да ги применува основните особини на веројатносна функција - Да користи веројатносен модел на експеримент со преброиво многу исходи 	<ul style="list-style-type: none"> • примери на еднакво веројатни исходи (класична дефиниција на веројатност) (3 часа) • примери со нееднакво веројатни исходи (1 час) • основни особини на веројатносна функција (2 часа) • веројатносен модел на експеримент со преброиво многу исходи (1 час) <p>Поими: елементарен настан, настан, веројатносен модел, веројатносна функција</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Со помош на техниките за активна настава учениците дефинираат веројатносна функција, разгледуваат нејзини особини и ги применуваат знаењата за експерименти со преброиво многу исходи <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>1.3: да одредува веројатност на (не-елементарни) настани</p> <p>1.4: да ги докажува основните особини на веројатносна функција</p>
2	<ul style="list-style-type: none"> - Да ја користи условната веројатност во задачи - Да ја формулира и употребува формулата за тотална веројатност - Да ја применува формулата на Бајес - Да проверува дали дадени настани се независни - Да ја користи Бернулиевата шема 	<ul style="list-style-type: none"> • поим и примери за условна веројатност (1 час) • основни особини на функција на условна веројатност (1 час) • формула за тотална веројатност (2 часа) • формула на Бајес (1 час) • независност на настани (1 час) • серија независни експерименти & Бернулиева шема <p>Поими: условна веројатност, независност</p>	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот дефинира условна и тотална веројатност, а учениците низ задачи ги согледуваат својствата на видовите веројатност, докажуваат тврдења поврзани со нив • Низ групна работа се совладуваат формулите, се применуваат знаењата за решавање посложени задачи 	<p>2.1: да разликува (безусловна) веројатност од условна веројатност</p> <p>2.2: да дава примери за условна веројатност</p> <p>2.3: да решава задачи со примена на формулата за тотална веројатност, формулата на Бајес, и Бернулиева шема</p> <p>2.4: да ги докажува наведените формули</p>

			Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	
--	--	--	---	--

Оценување на постигањата на учениците

За да се оценат постигнувањата на ученикот неопходно е:

- да се согледа иницијалната состојба на ученикот (согледување на неговите претходни искуства, знаење и вештини);

	<ul style="list-style-type: none"> - да се разговара со ученикот за да се добијат сознанија за неговото логичко размислување, разбирањето на поими и степенот на разбирање при нивната примена, оспособеноста за решавање задачи; - континуирано следење на односот на ученикот кон работата, соработка со врсниците, покажаната иницијативност, љубопитност, самостојност, точност во искажувањето и истрајност во извршувањето на обврските; - континуирано утврдување и проверка на стекнатите знаења, способности и вештини во модуларните единици. <p>Оценувањето на постигањата на учениците ќе биде со бројна оценка (од 1 до 5). Писменото оценување ќе се врши преку изработка на четири писмени работи по две во секое полугодие.</p>
Литература	За реализација на наставната програма неопходен е учебник одобрен од министер за образование и наука, збирка задачи и други извори.
Почеток на имплементација на наставната програма	Учебна 2022/2023 година
Институција/ носител на програмата	Биро за развој на образованието (БРО)
Потпис и датум на донесување на наставната програма	<p>бр. 13-7336/7 22.6.2022 година</p> <p style="text-align: right;">МИНИСТЕР, Doc.Dr. Jeton Shaqiri</p> <hr style="width: 20%; margin-left: auto; margin-right: 0;"/>
Датум на ревизија	