Врз основа на член 55 став 1 од Законот за организација и работа на органите на државната управа („Службен весник на Република Северна Македонија" бр. 58/00, 44/02, 82/08,167/10,51/11, 96/2019 и 110/2019) и член 22 став 1 од Законот за средно образование („Службен весник на Република Северна Македонија" бр. 44/95, 24/96, 34/96, 35/97, 82/99, 29/02, 40/03, 42/03, 67/04, 55/05, 113/05, 35/06, 30/07, 49/07, 81/08, 92/08, 33/10, 116/10, 156/10, 18/11, 42/11, 51/11, 6/12, 100/12, 24/13, 41/14, 116/14, 135/14, 10/15, 98/15, 145/15, 30/16, 127/16, 67/17 и 64/18) и член 3 од Законот за математичко-информатичка гимназија („Службен весник на Република Северна Македонија" бр. 64/18) министерот за образование и наука ја донесе Наставната програма по ***алгебра*** за II (втора) година математичко-информатичка гимназија.

МИНИСТЕРСТВО ЗА ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА

БИРО ЗА РАЗВОЈ НА ОБРАЗОВАНИЕТО

Наставна програма

АЛГЕБРА

за II година

Математичко-информатичка гимназија

Скопје, 2021 година

Назив на наставната програма	Алгебра
Тип на наставна програма	Задолжителна
Кредитна вредност на наставната програма	7 (седум) ЕЦВЕТ[1] кредити (5+2, 2 кредити одговараат на 50 часа активности на ученикот од кои 18 часа за домашна работа, 12 часа за подготовка за писмени работи и 20 часа за самостојно учење)
Ниво на квалификација	IV (четврто) ниво
Година на изучување	II (втора)
Број на часови неделно/годишно за реализација на наставната програма	3/108
Цели на наставната програма	Ученикот/ученичката: - да ги продлабочи знаењата по математика од матрично сметање, теорија на деливост, комбинаторно броење, основи на теорија на графови и да ги применува во секојдневни ситуации, како и во други наставни предмети; - да постигне самодоверба во примената на стекнатите математички вештини за наоѓање, користење и презентирање на математичките аргументи; - да ја цени убавината, моќта, корисноста и интернационалната димензија на математиката и да извлекува задоволство од постигнатите резултати; - да развива логичко, критичко и креативно математичко мислење.
Теми/подрачја/модуларни единици на наставната програма	• ОСНОВНИ ПОИМИ ОД МАТРИЧНО СМЕТАЊЕ • ТЕОРИЈА НА ДЕЛИВОСТ И КОНГРУЕНЦИИ • КОМБИНАТОРНО БРОЕЊЕ

[1]Закон за Национална рамка на квалификации.

	• ГРАФОВИ: ВОВЕДНИ ПОИМИ
Материјално-технички и просторни услови	За постигање на целите на наставата по *математика* неопходно е стручно осмислена и планирана примена на различни наставни средства, слики и цртежи, како и помагала: компјутер со соодветни програмски пакети, интернет и ЛЦД проектор.
Норматив на наставен кадар	Наставната програма за II година може да ја реализира: - наставник со завршени студии по математика/наставна или друга насока, VII/1 или VIA според МРК и 240 ЕКТС; стручно лице кое исполнува најмалку еден од следните услови: -да бил ментор на ученик кој бил награден на престижен меѓународен натпревар од соодветната област; - да е запишан на докторски студии од соодветната област; -да има стекнато научен степен на доктор на науки на соодветната област.

	ОСНОВИ НА МАТРИЧНО СМЕТАЊЕ (22 часа)			
Ред. број	**Резултати од учењето**	**Содржини и поими**	**Активности и методи**	**Стандарди за оценување**
1.	**Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:** - да дефинира n-димензионален вектор над произволно поле F, дефинира $m \times n$ матрица; - да извршува операции со матрици; - да утврдува дали дадена квадратна матрица е симетрична, антисиметрична, ортогонална, идемпотентна, нилпотентна; - да решава задачи со примена на триаголни матрици; - да решава задачи со примена на дијагонални матрици; -да решава задачи од инвертибилност на квадратна матрица;	• Поим за n-димензионален вектор над произволно поле F (вектор-редици и множеството F^n, вектор-колони и множеството F_n), поим за $m \times n$ матрица (редици, колони, множеството $M_{m,n}(\mathrm{F})$) (1 час) • Векторските простори F^n , F_n, $M_{m,n}(\mathrm{F})$ (множење на матрица со скалар, собирање на матрици, стандардни бази) (1 час) • Поим за линеарно пресликување $f: \mathrm{F}^m \to \mathrm{F}^n$, т.е. $f \in \mathcal{L}(\mathrm{F}^m, \mathrm{F}^n)$ (детерминираност на f од $f(e_1), \dots, f(e_m)$) (1 час) • Матрица како линеарно пресликување, основна биекција $M_{m,n}(\mathrm{F}) \to \mathcal{L}(\mathrm{F}^m, \mathrm{F}^n)$ (1 час) • Множење на матрици, некои особини и не-особини (3 часа) • Видови матрици (квадратна, симетрична, антисиметрична,	**Активности** • Наставникот ги запознава учениците со поимот матрица од ред $m \times n$ (редици, колони и елементи во дадена матрица). • Учениците одредуваат збир на две матрици и производ на матрица со број • Наставникот организира работа во парови преку која учениците разгледуваат линеарни пресликувања, одредуваат слики на базни вектори запишуваат матрица на дадено пресликување. • Низ групна работа се врши проверка и докажување на особините на операцијата множење на матрици. • Наставникот организира работа во парови во која се инсистира на дефинирање на различни видови матрици и нивни особини, како и операции со нив.	**Ученикот/ученичката може:** 1.1. да искажува дефиниции за основните поими на матричното сметање; 1.2. да објаснува поими од матрично сметање; 1.3. да решава пресметковни задачи со матрици; 1.4. да докажува особини во врска со матрично сметање;

		горно-триаголна, долно-триаголна, дијагонална) (1 час) • Собирање и множење на триаголни матрици, собирање и множење на дијагонални матрици (1 час) • Множење на $A \in M_{m,n}(\mathrm{F})$ со елементи од стандардна база на F^m односно F_n (карактеризација на центарот на $M_n(\mathrm{F})$) (1 час) • Степени на квадратна матрица и матричен полином (1 час) • Инвертибилност на квадратна матрица (1 час) • Транспонирање на матрица (основни особини) (1 час) **Поими:** вектор, матрица, редица, колона, векторски простор, стандардна база, линеарно пресликување, горно-триаголна, долно-триаголна, дијагонална матрица, транспонирана матрица.	• Со помош на техниките за активна настава учениците одредуваат инверзна матрица на квадратна матрица. **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	

2.	- да запишува систем линеарни равенки со n непознати во вид на проширена матрица; - да решава систем линеарни равенки со n непознати со примена на Гаусов метод; - да наоѓа инверзна матрица со помош на елементарни матрици.	• Поим за линеарна равенка со n непознати, поим за систем линеарни равенки со n непознати, матрица и проширена матрица на систем (1 час) • Множество решенија на линеарен систем, еквивалентни системи (1 час) • Елементарни трансформации на систем, основна теорема (1 час) • Гаусов метод за решавање на линеарни системи (3 часа) • Пресметување на инверзна матрица (со помош на елементарни матрици) (3 часа) **Поими:** проширена матрица на систем, елементарни трансформации на матрица, елементарни матрици.	**Активности** • Наставникот дефинира линеарна равенка со n непознати и систем линеарни равенки со n непознати. • Учениците запишуваат проширена матрица на систем и вршат елементарни трансформации на систем. • Со помош на техниките за активна настава учениците го користат Гаусовиот метод за решавање систем линеарни равенки. • Учениците низ групна работа согледуваат егзистенција на инверзна матрица, а потоа и ја пресметуваат **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	2.1. да разликува матрица од проширена матрица на систем линеарни равенки; 2.2. дава примери на системи линеарни равенки; 2.3. да решава системи линеарни равенки, и да пресметува инверзни матрици; 2.4. да ја докажува логичката издржаност на Гаусовиот метод и на наоѓањето инверзна матрица со помош на елементарни матрици.

	ТЕОРИЈА НА ДЕЛИВОСТ И КОНГРУЕНЦИИ (32 часа)			
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
 1.	**Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:** - да решава задачи со примена на деливост во цели броеви; - да решава задачи со примена на основна теорема на аритметика; - да решава задачи со примена на основните поими за деливост во интегрален домен; - да решава задачи со примена на основните операции на идеали во интегрален домен; - да решава задачи со примена на основните теореми за интегрален домен на главни идеали; - да решава задачи со примена на Евклидов домен;	• Повторување за деливост во цели броеви - $a\|b$ & $b\|a \Leftrightarrow a=\pm b$ - нзд (заемна простост), нзс - множество линеарни комбинации за конечно многу цели броеви - решливост на равенката $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ (1 час) • Повторување за иредуцибилни и прости броеви во $\mathbb{Z}$ - основна теорема (Ојлер): иредуцибилност ⇔ простост - пример за иредуцибилност ⇏ простост: $M=\{4n+1: n\in\mathbb{N}_0\}$ иредуцибилни: $5,9,13,17,21,29,33,\dots,77,\dots$ неиредуцибилни: $25,\dots,693=9\cdot 77=21\cdot 33$ → иредуцибилност ⇎ простост (1 час)	**Активности** • Низ групна работа учениците се потсетуваат на основните поими од деливост на цели броеви. • Со помош на техниките за активна настава учениците согледуваат кои броеви се иредуцибилни, а кои не и вршат компарација на својствата со прости броеви. • Наставникот дефинира деливост во интегрален домен , идеал и операции со идеали. • Низ групна работа учениците решаваат посложени задачи од операции со идеали. • Наставникот дефинира Евклидов домен, а учениците одредуваат домен на главни идеали низ различни примери.	**Ученикот/ученичката може:** 1.1. да ги искажува поимите за: units, associates, суштинска единственост на факторизација, идеал, главен идеал; 1.2. да објаснува и дава примери за: units, associates, суштинска единственост на факторизација, идеал, главен идеал, домен на главни идеали, Евклидов домен; 1.3. да решава задачи во врска со елементарна теорија на деливост; 1.4. да докажува тврдења и теореми во врска со: деливост, иредуцибилност, домен на главни идеали, Евклидов домен;

		• Основна теорема на аритметика (анализа на ланскиот доказ) - дали во наведениот пример секогаш постои факторизација на иредуцибилни броеви? дали записот е еднозначен (до пермутација на множителите)? - дали „проблемот“ се должи на непостоење на операции $\pm$ во M (1 час) • Повторување за прстен и интегрален домен - $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n, \mathbb{R}[x]$ - за кое n прстенот $\mathbb{Z}_n$ е интегрален домен? за кое n прстенот $\mathbb{Z}_n$ е поле? - секој конечен интегрален домен е поле (доказ) (1 час) • Основни поими за деливост во интегрален домен - units & associates (кои се units во $\mathbb{Z}$, во $\mathbb{Z}_n$, во $\mathbb{R}[x]$?) - иредуцибилен наспроти прост (простост $\Rightarrow$ иредуцибилност) (1 час) • $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ (1 час)	**Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	

		• Поим комплетна факторизација и нејзина суштинска единственост (1 час) • Поим за идеал во интегрален домен - основни операции: пресек и збир на идеали, заемно прости идеали - што се $(a)+(b)$ и $(a)\cap(b)$ во интегралниот домен $\mathbb{Z}$? - навраќање кон множество лин. комбинации за конечно многу цели броеви и равенката $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ - опис на идеалот $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ (2 часа) • Поим за главен идеал и инт. домен на главни идеали - деливост како инклузија меѓу главни идеали - кога $(a)=(b)$? - $\mathbb{Z}$ е инт. домен на главни идеали (доказ) - иредуцибилност и простост на јазик на идеали (2 часа) • Основни теореми за инт. домен на главни идеали - не постои бесконечна низа од вистински инклузии		

		$(d_1) \subsetneq (d_2) \subsetneq \cdots$ (доказ) → постои комплетна факторизација - постои нзд (доказ) - иредуцибилност ⇔ простост (доказ) → секоја комплетна факторизација е суштински единствена ⇉ постои суштински единствена комплетна факторизација (2 часа) • Поим за Евклидов домен - $\mathbb{Z}, \mathbb{R}[x], \mathbb{Z}[i]$ - секој Евклидов домен е домен на главни идеали (доказ) → во секој Евклидов домен постои суштински единствена комплетна факторизација (2 часа) **Поими:** units, associates, суштинска единственост, идеал, главен идеал, домен на главни идеали, Евклидов домен.		
2.	- да решава задачи со примена на степен на полином;	• Поим за прстенот $R[x]$, каде R е произволен комутативен	**Активности**	2.1. да ги искажува поимите за: units, associates, степен на полином,

	- да решава задачи со примена на делење со остаток во $\mathrm{F}[x]$, каде F е произволно поле; - да решава задачи со примена на критериумот за иредуцибилност на Ајзенштајн; - да ја применува теоремата на Гаус;	прстен со единица, поим за степен на полином, доказ дека $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ во $D[x]$, каде D е произволен интегрален домен, кои се units во $D[x]$ (1 час) • Делење со остаток во $\mathrm{F}[x]$, каде F е произволно поле (1 час) • $\mathrm{F}[x]$ е Евклидов домен → домен на главни идеали → домен со суштински единствена комплетна факторизација (1 час) • Иредуцибилност во $\mathbb{Q}[x]$ наспроти иредуцибилност во $\mathbb{Z}[x]$ за $f \in \mathbb{Z}[x] \subsetneq \mathbb{Q}[x]$ -теорема на Гаус -критериум за иредуцибилност на Ајзенштајн - иредуцибилност на полиноми $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$, каде p е прост број - обопштен критериум на Ајзенштајн (4 часа)	• Наставникот организира повторување на алгебарските структури кои се изучени претходната година и ги воведува поимите степен на полином и операции со степени во интегрален домен. • Низ групна работа учениците решаваат задачи со делење со остаток во Евклидов домен, примена на критериумот на Ајзенштајн **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	суштинска единственост на факторизација во прстенот $R[x]$, идеал, главен идеал во прстенот $R[x]$; 2.2. да објаснува и дава примери за деливост на полиноми, разложување на полиноми на иредуцибилни фактори; 2.3. да решава задачи во врска со полиноми, деливост на полиноми, иредуцибилност на полиноми; 2.4. да докажува тврдења во врска со иредуцибилност на полиноми, и да ги докажува теоремите на Гаус и Ајзенштајн;

		Поими: / **(*) Предлог-проект:** Критериум за иредуцибилност на Думас		
3.	- да решава системи од две линеарни конгруентни равенки со една непозната; - да решава задачи со примена на Кинеска теорема на остатоци; - да решава систем од три или повеќе линеарни конгруентни равенки со една непозната; - да ја докажува Кинеската теорема на остатоци.	• Повторување за конгруенции во $\mathbb{Z}$ (1 час) • Систем од две линеарни конгруентни равенки со една непозната - основна теорема + доказ - Кинеска теорема на остатоци во случај на две равенки (2 часа) • Систем од три или повеќе линеарни конгруентни равенки - примери со модули кои не се попарно заемно прости (итерирање на случај на две конгруенции) - Кинеска теорема на остатоци (1. доказ со индукција 2. доказ со користење дека $(m_i, m_j) = 1$, $(\forall i, j = 1, \dots, k, i \neq j) \Leftrightarrow \left(\frac{\prod m_i}{m_1}, \dots, \frac{\prod m_i}{m_k}\right) = 1$) - примери со старо-кинески задачи (3 часа)	**Активности** • Наставникот организира повторување за конгруенции во $\mathbb{Z}$ и основните својства за конгруенции. • Низ групна работа учениците ги совладуваат методите за решавање систем од две, три или повеќе линеарни конгруентни равенки со една непозната. • Наставникот изведува доказ на кинеската теорема на остатоци, а учениците ја применуваат во задачи. • Со помош на техниките за активна настава учениците се запознаваат со постоењето изиморфизми меѓу групоиди и прстени и мултипликативноста на $\varphi(m)$.	3.1. да ги искажува својствата на конгруенциите и формулацијата на Кинеска теорема за остатоци; 3.2. да објаснува и дава примери за системи линеарни конгруентни равенки и природниот изоморфизам; 3.3. да решава задачи со системи линеарни конгруентни равенки; 3.4. да ја докажува Кинеската теорема на остатоци и теоремата за природниот изморфизам $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$, каде $n = m_1 m_2 \cdots m_k$ е канонска факторизација.

		• Природниот изоморфизам $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$, каде $n = m_1 m_2 \cdots m_k$ е канонска факторизација -подготовка за формулацијата на теоремата (што е изоморфизам кај групоиди и прстени, што е директен производ на групоиди и прстени) -формулација на теоремата -доказ на теоремата -последица: $U(\mathbb{Z}_n) \cong U(\mathbb{Z}_{m_1}) \times \cdots \times U(\mathbb{Z}_{m_k})$ -последица: $\varphi(m) = \varphi(m_1) \cdot \cdots \cdot \varphi(m_k)$ (4 часа) **Поими:** Кинеска теорема на остатоци, изоморфизам, природен изоморфизам. **(*) Предлог-проект:** Како множеле Вавилонците?	**Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	
	КОМБИНАТОРНО БРОЕЊЕ (22 часа)			
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување

1.	**Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:** - да знае да ги докажува и применува во задачи основните биномни идентитети; - да решава задачи со примена на биномна формула; - да ја применува теоремата на Шпернер за антивериги;	• Повторување за: - комбинаторно толкување на биномни коефициенти - Паскалова формула - алгебарска формула (1 час) • Докажување на некои основни биномни идентитети: - $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+r}{r}=\binom{n+r+1}{r}$ два докази: (1) со Паскалова формула (2) комбинаторно - $\binom{n}{r}\binom{r}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}=\binom{n}{r-k}\binom{n-r+k}{k}$ два докази: (1) со алгебарска формула (2) комбинаторно (2 часа) • Повторување за биномна формула и две основни последици: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$ $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$ (1 час) • Вандермондеова конволуција	**Активности** • Низ едноставни примери учениците се потсетуваат за биномните коефициенти и Паскаловиот триаголник. • Со помош на методите на активна настава учениците се подготвуваат за докази на некои биномни идентитети, нивни врски и примена. • Наставникот организира воведување на поимите конволуција и антиверига, а учениците решаваат посложени задачи со нивна примена. **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	**Ученикот/ученичката може:** 1.1. да ги искажува основните формули и идентитети со биномни коефициенти; 1.2. да препознава и разликува алгебарски од комбинаторен доказ; 1.3. да решава задачи со примена на биномна формула; 1.4. да дава алгебарски и комбинаторни докази на биномни идентитети, да ја докажува теоремата на Шпернер за антивериги.

		два докази: (1) алгебарски (2) комбинаторно (1 час) • Унимодалност на биномни коефициенти (кои формираат редица во Паскаловиот триаголник) и теорема на Шпернер за антивериги во делумно подредено. множество $(\wp(\{1,2,\ldots,n\}),\subseteq)$ (2 часа) **Поими:** Вандермондеова конволуција, унимодалност. **(*) Предлог-проект:** Дополнителни идентитети со биномни коефициенти		
2.	- да определува број на пермутации на мултимножество со конечни кратности на елементите - да го докажува равенството $\left\langle{n \atop r}\right\rangle = \binom{n+r-1}{r}$ - да наоѓа број на решенија на равенката $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ во (а) $\mathbb{N}^n$, (б) ${\mathbb{N}_0}^n$	• Поим за мултимножество, кратност на елемент (конечна, бесконечна), r-пермутација, број на r-пермутации на мултимножество со бесконечни кратности на елементите (1 час)	**Активности** • Наставникот организира активности преку кои учениците ќе се запознаат со мултимножество и кратност на елемент, број на пермутации и мултиномен коефициент.	2.1. да ги искажува поимите за: мултимножество, пермутација на мултимножество, комбинација на мултимножество, мултиномен коефициент; 2.2. да објаснува и дава примери за: мултимножество, пермутација на мултимножество, комбинација на

	- да ја применува комбинаторната теорема на Моавр; - да ја применува обопштената комбинаторна теорема на Моавр;	• Број на пермутации на мултимножество со конечни кратности на елементите, поим за мултиномен коефициент (1 час) • r-комбинација на мултимножество M, множеството $\mathcal{M}_r(M)$ и ознаката $\left\langle {n \atop r} \right\rangle \overset{\text{def}}{=} \lvert\mathcal{M}_r(M)\rvert$, каде $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ (1 час) • Два доказа на равенството $$\left\langle {n \atop r} \right\rangle = \binom{n+r-1}{r}$$ - со биекција - со прегради (2 часа) • Комбинаторна теорема на Моавр (1 час) • Рав-ката $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ број на нејзини решенија во: (а) $\mathbb{N}^n$, (б) $\mathbb{N}_0{}^n$ (1 час) • Мултиномна теорема и број на различни собироци (1 час) • Обопштена комбинаторна теорема на Моавр (1 час)	• Учениците низ групна работа вршат докази на теореми, прават споредба и решаваат посложени задачи со примена на мултиномна теорема. **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	мултимножество, мултиномен коефициент; 2.3. да решава задачи во врска со пермутации, варијации, комбинации на мултимножества и мултиномна формула; 2.4. да ги докажува: - равенството $\left\langle {n \atop r} \right\rangle = \binom{n+r-1}{r}$ - комбинаторна теорема на Моавр - мултиномна теорема;

		Поими: мултимножество, кратност, мултиномен коефициент, мултиномна теорема. **(*) Предлог-проект:** „Кружната" (аналогна) теорема на Каплански		
3.	- да решава едноставни примери на рекурзивност; - да применува Кула на Ханој; - да решава линеарна рекурентна равенка од прв и втор ред (хомогена, нехомогена).	• Едноставни примери на рекурзивност - рекурентна врска за $p(n) \stackrel{\text{def}}{=}$број на пермутации на множеството $[n] = \{1,2, \dots , n\}$ - рекурентна врска за $l(n) \stackrel{\text{def}}{=}$број на делови на кои рамнината е поделена од n прави во општа положба (1 час) • Кула на Ханој (1 час) • Стирлингови броеви (од прв и втор вид) (2 часа) • Линеарна рекурентна равенка со константни коефициенти - од прв ред - од втор ред (хомогена, нехомогена)	**Активности** • Наставникот ги воведува поимите рекурзија и линеарна рекурентна равенка со константни коефициенти од прв и втор ред. • Учениците низ групна работа одредуваат рекурентни врски и решаваат линеарна рекурентна равенка со константни коефициенти од прв и втор ред. **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	3.1. да дава едноставни примери за рекурзивност; 3.2. да објаснува и дава примери за рекурзивност; 3.3. да решава задачи во врска со рекурентни зависности, да решава линеарни рекурентни равенки од прв и втор ред; 3.4. да докажува затворен облик на формули користејќи рекурентност.

		(2 часа) **Поими:** рекурзивност, рекурентна врска, Стирлингови броеви. **(*) Предлог-проект:** Број на триангулации на конвексен n-аголник		

	ГРАФОВИ: ВОВЕДНИ ПОИМИ (32 часа)			
Ред. број	**Резултати од учењето**	**Содржини и поими**	**Активности и методи**	**Стандарди за оценување**
1.	**Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:** - да решава задачи со примена на конечен граф; - да решава задачи со примена на матрица на инцидентност, матрица на соседство, матрица на соседство над F_2 , бипартитна матрица на соседство; - да определува степен на теме;	•Поим за (конечен) граф, ред и големина, претставување (дијаграм) на граф, значајни фамилии графови: комплетни, циклуси, патишта, комплетни бипартитни, бипартитни (1 час) • Матрица на инцидентност, матрица на соседство, матрица на соседство над F_2 ,	**Активности** • Наставникот дефинира конечен граф, начин на претставување и основни својства. • Учениците одредуваат матрица на инцидентност, матрица на соседство и бипартитна матрица на соседство.	**Ученикот/ученичката може:** 1.1. да искажува основни поими и теореми во врска со графови; 1.2. да ги објаснува поимите и да дава примери за илустрација на основните теореми; 1.3. да решава задачи со графови, и задачи кои се сведуваат на примена на основните теореми; 1.4. да ги докажува основните теореми, и да докажува во врска со графови;

	- да проверува дали даден граф е регуларен; - да ја докажува и применува „Прва теорема“ од теорија на графови; - да ја применува теоремата на Хавет-Хакими; - да определува растојание во граф; - да ја применува теоремата на Ојлер-Хиелхолцер; - да ја применува теоремата на Листинг;	бипартитна матрица на соседство (1 час) • Степен на теме -изолирано теме -висечко теме (лист) - параметрите $\delta(G), \Delta(G), d(G)$ - регуларен граф (карактеризација на 1-регуларни и 2-регуларни графови; може ли да се карактеризираат 3-регуларните графови?) (1 час) • „Прва теорема“ од теорија на графови (како последица: лема за ракување) (1 час) • Графичка низа, теорема (алгоритам) на Хавет-Хакими (1 час) • Изоморфизам, автоморфизам, темена-транзитивност (1 час) • Сврзаност, компоненти на сврзаност (1 час) • Прошетка (маршрута), број на маршрути со дадена должина (1 час) • Растојание во граф (1 час)	• Низ групна работа учениците откриваат поими и законитости поврзани со графови, изоморфизам, сврзаност и најпознати патишта и тури. **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	

		• Бришење на темиња и ребра (поим за подграф, скелетен подграф, индуциран подграф) (1 час) • Зглобно теме и мост-ребро (1 час) • Ојлерова тура (алгоритам на Флеури) (1 час) • Теорема на Ојлер-Хиелхолцер и теорема на Листинг (2 часа) **Поими:** граф, комплетен граф, циклус, пат, бипартитен граф, матрица на инцидентност, матрица на соседство, бипартитна матрица на соседство, степен на теме, минимален степен, максимален степен, просечен степен, регуларен граф, графичка низа, изоморфизам, автоморфизам, сврзаност, прошетка, подграф, зглобно теме, мост-ребро, Ојлерова тура. **(*) Предлог-проект:** Граф кој е произволно Ојлеров од теме - Дефиниција		

		- Примери - Карактеризација **(*) Предлог-проект:** Лема на Шпернер		
2.	- да ја формулира теоремата за карактеризација на дрва; - да ја докажува лемата за висечко теме; - да ја докажува лемата за „растење“ на дрво; - да ја применува и докажува формулата на Кели за број на скелетни дрва на K_n; - да применува Пруферов код; - да применува BFS алгоритам; - да применува DFS алгоритам; - да го применува алгоритамот на Хафман.	• Поим за дрво, примери на мали дрва (ред ≤ 5), формулација на теоремата за карактеризација на дрва (1 час) • Доказ на теоремата - лема за висечко теме - лема за „растење“ на дрво (1 час) • Карактеризација на графичка низа на дрво (1 час) • Изоморфни дрва (алгоритам) (3 часа) • Скелетно дрво во сврзан граф (два алгоритми за генерирање на скелетно дрво) (1 час) • Формула на Кели за број на скелетни дрва на K_n (доказ со помош на графичка низа и мултиномна теорема) (1 час) • Како да се запамти дрво (по оптимално отколку со матрица на соседство)?	• Наставникот дефинира дрво и наведува примери на мали дрва. • Учениците одредуваат изоморфни дрва и скелетни дрва во сврзан граф. • Низ групна работа учениците откриваат поими и законитости поврзани со дрва и видови алгоритми кои се користат. **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	2.1. да искажува основните поими и алгоритми во врска со (графовски) дрва; 2.2. да ги објаснува постапките за реализирање на алгоритми во врска со дрва; 2.3. да решава задачи со примена на наведените алгоритми; 2.4. да докажува: -формула на Кели; -логичка издржаност на Пруферов код -логичка издржаност на алгоритам на Хафман.

		- Поим за кореново дрво, татко, син - Татковски код (илустрација дека не е оптимален во смисла дека не секој „код“ дава дрво) - Пруферов код (проширен, скратен) - втор доказ на формулата на Кели (3 часа) • BFS алгоритам (и растојание во сврзан граф) (2 часа) • DFS алгоритам (и наоѓање на зглобни темиња во сврзан граф) (2 часа) • Бинарни коренови дрва и префикс кодови (1 час) • Алгоритам на Хафман (2 часа) **Поими:** дрво, скелетно дрво, кореново дрво, татковски код, Пруферов код, BFS алгоритам, DFS алгоритам, бинарно кореново дрво, префикс код, алгоритам на Хафман.		

Оценување на постигањата на учениците	За да се оценат постигањата на ученикот неопходно е: - да се согледа иницијалната состојба на ученикот (согледување на неговите претходни искуства, знаење и вештини); - да се разговара со ученикот за да се добијат сознанија за неговото логичко размислување, разбирањето на поими и степенот на разбирање при нивната примена, оспособеноста за решавање задачи; - континуирано следење на односот на ученикот кон работата, соработка со врсниците, покажаната иницијативност, љубопитност, самостојност, точност во искажувањето и истрајност во извршувањето на обврските; - континуирано утврдување и проверка на стекнатите знаења, способности и вештини во модуларните единици. Оценувањето на постигањата на учениците ќе биде со брочајна оценка (од 1 до 5). Писменото оценување ќе се врши преку изработка на четири писмени работи по две во секое полугодие.
Литература	**За реализација на наставната програма неопходен е учебник одобрен од министер за образование и наука, збирка задачи и други извори.**
Почеток на имплементација на наставната програма	Учебна 2021/2022 година
Институција/ носител на програмата	Биро за развој на образованието (БРО)
Потпис и датум на донесување на наставната програма	бр. ______________ ___________________ година МИНИСТЕРКА, Мила Царовска ______________________________
Датум на ревизија	