Врз основа на член 55 став 1 од Законот за организација и работа на органите на државната управа („Службен весник на Република Северна Македонија" бр. 58/00, 44/02, 82/08,167/10,51/11, 96/2019 и 110/2019) и член 22 став 1 од Законот за средно образование („Службен весник на Република Северна Македонија" бр. 44/95, 24/96, 34/96, 35/97, 82/99, 29/02, 40/03, 42/03, 67/04, 55/05, 113/05, 35/06, 30/07, 49/07, 81/08, 92/08, 33/10, 116/10, 156/10, 18/11, 42/11, 51/11, 6/12, 100/12, 24/13, 41/14, 116/14, 135/14, 10/15, 98/15, 145/15, 30/16, 127/16, 67/17 и 64/18) и член 3 од Законот за математичко-информатичка гимназија („Службен весник на Република Северна Македонија" бр. 64/18) министерот за образование и наука ја донесе Наставната програма по ***алгебра*** за I (прва) година математичко-информатичка гимназија.

МИНИСТЕРСТВО ЗА ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА

БИРО ЗА РАЗВОЈ НА ОБРАЗОВАНИЕТО

Наставна програма

АЛГЕБРА

за I година

Математичко-информатичка гимназија

Скопје, 2019 година

Назив на наставната програма	Алгебра
Тип на наставна програма	Задолжителна
Кредитна вредност на наставната програма	7 (седум) ЕЦВЕТ[1] кредити (5+2, 2 кредита одговараат на 50 часа активности на ученикот од кои 18 часа за домашна работа, 12 часа за подготовка за писмени работи и 20 часа за самостојно учење)
Ниво на квалификација	IV (четврто) ниво
Година на изучување	I (прва)
Број на часови неделно/годишно за реализација на наставната програма	3/108
Цели на наставна програма	Ученикот/ученичката: - да ги продлабочи знаењата по математика од математичка логика и множества, методи за докажување теореми, принцип на математичка индукција, основи на комбинаторно броење,основни алгебарски структури, алгебарски рационални изрази, елементарна теорија на деливост во множеството цели броеви и да ги применува во секојдневни ситуации, како и во други наставни предмети; - да постигне самодоверба во примената на стекнатите математички вештини за наоѓање, користење и презентирање на математичките аргументи; - да ја цени убавината, моќта, корисноста и интернационалната димензија на математиката и да извлекува задоволство од постигнатите резултат; - да развива логичко, критичко и креативно математичко мислење.

[1]Закон за Националната рамка на квалификации.

Теми/подрачја/модуларни единици на наставната програма	• МАТЕМАТИЧКА ЛОГИКА И МНОЖЕСТВА • МЕТОДИ НА ДОКАЖУВАЊЕ ТЕОРЕМИ. ПРИНЦИП НА МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА • ОСНОВИ НА КОМБИНАТОРНО БРОЕЊЕ • ОСНОВНИ АЛГЕБАРСКИ СТРУКТУРИ • АЛГЕБАРСКИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ • ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРИЈА НА ДЕЛИВОСТ ЗА МНОЖЕСТВОТО ЦЕЛИ БРОЕВИ
Материјално-технички и просторни услови	За постигнување на целите на наставата по *математика* неопходно е стручно осмислена и планирана примена на различни наставни средства, слики и цртежи, како и помагала: компјутер со соодветни програмски пакети, интернет и ЛЦД проектор.
Норматив на наставен кадар	Наставната програма за I година може да ја реализира: - наставник со завршени студии по математика/наставна или друга насока, VII/1 или VIA според МРК и 240 ЕКТС; Стручно лице кое исполнува најмалку еден од следните услови: -да бил ментор на ученик кој бил награден на престижен меѓународен натпревар од соодветната област; - да е запишан на докторски студии соодветната област; -да има стекнато научен степен на доктор на науки на соодветната област.

<table>
<tr><th></th><th colspan="4">МАТЕМАТИЧКА ЛОГИКА И МНОЖЕСТВА   (18 часа)</th></tr>
<tr><th>Ред. број</th><th>Резултати од учењето</th><th>Содржини и поими</th><th>Активности и методи</th><th>Стандарди за оценување</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:
-да одредува вистинитосни вредности на исказни формули и да утврдува кои од нив се тавтологии,
- да ги применува Де Моргановите закони во разни задачи,
- да решава задачи со примена на логичките операции и закони.</td><td>• Поими и ознаки од математичка логика (1 час)
• Конјукција, дисјункција (вклучна и исклучна), негација (1 час)
• Импликација, еквиваленција (2 часа)
• Квантификатори (1 час)
• Исказни формули, тавтологија, контрадикција (2 часа)
• Особини на логичките операции (комутативност, асоцијативност, идемпотентност, инволуторност, дистрибутивност, неутрален елемент) (2 часа)
• Логички закони и правила за заклучување (1 час)
• Де Морганови закони (1 час)</td><td>Активности
• Наставникот ги запознава учениците со поимите и ознаките од математичката логика.
• Учениците запишуваат дефиниции на логичките операции, таблици на вистинитост и решаваат поедноставни задачи со примена на логичките операции.
• Низ групна работа се врши проверка и докажување на особините на логичките операции.
• Наставникот организира работа во парови во која се инсистира на примена на Де Моргановите закони низ различни примери.</td><td>Ученикот/ученичката може:

1.1:да искажува дефиниции за основните логички операции;
1.2:да користи особини на логичките операции;
1.3:да упростува исказни формули;
1.4:да докажува тавтологии со примена на логичките закони.</td></tr>
</table>

		Поими : конјукција, дисјункција, негација, импликација, еквиваленција, квантификатор, исказна формула, тавтологија, контрадикција, идемпотентност, инволуторност, неутрален елемент.	**Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	
2	- да го објаснува поимот множество, да решава задачи со примена на операциите со множества; -да дефинира релација; -да испитува дали една релација е еквиваленција или подредување.	• Поим за множество, инклузија, еднаквост (1 час) • Унија и пресек, дистрибутивност (1 час) • Разлика, комплемент, симетрична разлика (1 час) • Партитивно множество (1 час) • Подреден пар, Декартов производ (1 час) • Поим за релација, еквиваленција, подредување (2 часа) **Поими :** инклузија, унија, пресек, разлика, комплемент, симетрична разлика,	**Активности** • Наставникот ги дефинира основните поими поврзани со поимот за множество. • Учениците запишуваат дефиниции на операции и релации со множества. • Со помош на техниките за активна настава учениците ги откриваат и докажуваат законите со множества. **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	2.1:да ги искажува дефинициите на операциите со множества; 2.2:да ја утврдува поврзаноста помеѓу логичките операции и операциите со множества; 2.3:да решава задачи во врска со операциите со множества; 2.4:да докажува некои закони во врска со множествата.

		партитивно множество, подреден пар, Декартов производ, релација, еквиваленција, подредување. **(*) Предлог-проект:** Подредено множество -линеарна подреденост -инклузија како подредување -теорема „големо“ ⟹ „високо“ или „широко“.		

	МЕТОДИ НА ДОКАЖУВАЊЕ ТЕОРЕМИ. ПРИНЦИП НА МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА (23 часа)			
Ред. број	**Резултати од учењето**	**Содржини и поими**	**Активности и методи**	**Стандарди за оценување**
1	**Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:** -да докажува тврдења и теореми со директен доказ, индиректен доказ, доказ со контрадикција.	• Математички доказ (што е? зошто ни е потребен?) (2 часа) -Разбирањето на „доказ“ се менува низ вековите -Значењето на старогрчката математика за дедуктивен заклучок -Зенонови апории • Директен доказ (2 часа)	**Активности:** • Наставникот ги запознава учениците со суштината и видовите математички доказ. • Низ групна работа учениците прават споредба меѓу различни видови докази. • Со помош на техниките за активна настава учениците се	**Ученикот/ученичката може:** 1.1:да ги искажува видовите докази; 1.2:да утврдува за каков вид на доказ станува збор; 1.3:да демонстрира конструктивни, неконструктивни, директни, индиректни докази и докази со контрадикција; 1.4:да докажува тврдења и теореми.

		Техника за докажување на импликација $P \Rightarrow Q$ преку претпоставување вистинитост на исказот P и дедуктивен аргумент за вистинитост на Q. <u>Примери</u>: - ако n^2 е парен тогаш n е парен; - ако производот е непарен, множителите се непарни; - ако двата собироци се парни, тогаш збирот е парен; - ако двата собироци се непарни, тогаш збирот е парен; - $a\|b \wedge c\|d \Rightarrow ac\|bd$; - $a\|b \wedge a\|c \Rightarrow (\forall m, n \in \mathbb{Z})\ a\|(mb + nc)$. • Индиректен доказ (2 часа) Техника за докажување на импликација $P \Rightarrow Q$ преку директен доказ на импликација $\neg Q \Rightarrow \neg P$. <u>Примери</u>:	подготвуваат за изведување посложени математички докази. **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	

		- ако n^2 е непарен тогаш n е непарен; - $a \nmid bc \Rightarrow a \nmid b$; - $a, b, c, d \in \mathbb{Z} \wedge d\|a, d\|b, d \nmid c \Rightarrow$ равенката $ax + by = c$ нема решение во цели броеви x, y; - ако n^2 е делив со 3 тогаш n е делив со 3; • Доказ со контрадикција (2 часа) Техника за докажување на импликација $P \Rightarrow Q$ преку докажување дека $P \wedge \neg Q$ повлекува противречност. <u>Примери</u>: - (ирационалност на $\sqrt{2}$) ако $x \in \mathbb{Q}$ тогаш $x^2 \neq 2$; - (ирационалност на $\sqrt{3}$) ако $x \in \mathbb{Q}$ тогаш $x^2 \neq 3$; - бесконечно многу прости броеви (доказ на Евклид); - бесконечно многу прости броеви од облик $4k + 3$; - простост $\Rightarrow$ иредуцибилност;		

		- ако $m, n \in \mathbb{Z}$ тогаш $m^2 - 4n \neq 2$. • Разгледување случаи (1 час) Користење на тавтологијата $((A \vee B) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (A \Rightarrow Q) \wedge (B \Rightarrow Q)$ при докажување на тврдење од облик $(A \vee B) \Rightarrow Q$ <u>Примери</u>: - ако $n \in \mathbb{Z}$ тогаш $n^2 + n$ е парен; - ако $n \in \mathbb{Z}$ тогаш $(-1)^n(2n - 1) + 1$ е делив со 4; - секој содржател на 4 има облик $(-1)^n(2n - 1) + 1$ за некој $n \in \mathbb{N}$. • Ако и само ако (1 час) Користење на тавтологијата $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ при докажување на тврдење од облик $P \Leftrightarrow Q$ <u>Примери</u>:		

		- За $a, b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $a\|b \wedge b\|a \Leftrightarrow a = \pm b$; - За $a, b \in \mathbb{Z}$, ab е непарен $\Leftrightarrow a$ и b се непарни. • Квантификатори во теореми (1 час) $(\forall x \in U)P(x)$, $(\exists x \in U)P(x)$, $(\exists!\, x \in U)P(x)$ • Конструктивен наспроти неконструктивен доказ (2 часа) Егзистенцијалните докази се од два типа: конструктивни и неконструктивни. Секој конструктивен доказ посочува (експлицитен) пример кој го потврдува егзистенцијалното тврдење, додека секој неконструктивен доказ го докажува постоењето без посочување на пример. Примери: -Покажи дека постојат ирационални броеви x, y т.ш. x^y е рационален број (да се презентира конструктивен и неконструктивен доказ);		

		- Најчеста состојка на неконструктивен доказ во „конечна“ математика е т.н. принцип на Дирихле (кој во слаба форма гласи: ако $n + 1$ топчиња се разместат во n кутии тогаш постои кутија во која има повеќе од едно топче). Да се илустрира принципот на Дирихле со примери од типот: роденден во ист месец, роденден во ист ден, во секоја група луѓе има двајца со ист број познаници (во групата). **Поими:** доказ, директен доказ, индиректен доказ, доказ со контрадикција, конструктивен доказ, неконструктивен доказ.		
2	- да решава задачи со примена на математичка индукција; - да докажува со помош на слаба или јака индукција; - да докажува со помош на минимален контрапример.	• Добра подреденост на природните броеви, поим за математичка индукција и структура на доказ со математичка индукција: индуктивна база, индуктивен чекор, индуктивна претпоставка (да се илустрира	**Активности** • Наставникот ги запознава учениците со методот на математичка индукција како начин на докажување. • Низ групна работа учениците решаваат задачи со примена на методот,	2.1: да го искажува принципот на математичка индукција (слаба и јака форма); 2.2: да го утврдува редоследот и значењето на секој чекор при доказ со математичка индукција; 2.3: да демонстрира докази со математичка индукција и минимален контрапример;

		со пример за збирот на првите n природни броеви) (1 час) • Доказ со слаба индукција (3 часа) <u>Воведни примери</u>: Да се докаже дека 1) $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$; 2) $1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; 3) $n \geq 5 \Rightarrow\ n^2 < 2^n$. <u>Примери за грешки во „доказ“</u>: 1) $n = n + 1$; 2) $2n - 1$ е парен број за секој n; 3) Во произволна група од n жени сите имаат иста боја на коса. <u>Дополнителни примери</u>: 1) Колку квадрати има на квадратна nxn табла?; 2) $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}$; 3) Слаба индукција ⇒ добра подреденост на природните броеви; 4) Слаба индукција ⇒ јака индукција. • Доказ со јака индукција (2 часа)	**Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	2.4: да докажува тврдења и теореми со помош на математичка индукција и „со“ минимален контрапример.

		<u>Примери</u>: 1) Јака индукција ⇒ слаба индукција; 2) секој природен број ≥ 2 може да се претстави како производ од прости броеви; 3) За природни броеви x_i, y_j важи $x_1 + \cdots + x_m = y_1 + \cdots + y_n < mn$. Покажи дека може да се прецртаат неколку (не сите) собироци т.ш. равенството продолжи да важи. • Доказ со регресивна индукција (2 часа) <u>Примери</u>: 1) $AM \geq GM$ (доказ на Коши); 2) $\sqrt{2\sqrt{3 \ldots \sqrt{n}}} < 3$; • Доказ „со“ минимален контрапример (2 часа) <u>Примери</u>: 1) ирационалност на $\sqrt{2}$; 2) ирационалност на $\sqrt{3}$; 3) „ирационалност“ на $\sqrt{4}$; 4) ирационалност на $\sqrt{n}$ кога n не е полн квадрат.		

		Поими: добра подреденост, математичка индукција, слаба индукција, јака индукција, контрапример. **(*) Предлог-проект:** Броеви на Фибоначи, Лука, и Гибоначи (докажување на идентитети).		
	ОСНОВИ НА КОМБИНАТОРНО БРОЕЊЕ (13 часа)			
Ред. број	**Резултати од учењето**	**Содржини и поими**	**Активности и методи**	**Стандарди за оценување**
1	**Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:** - да применува комбинаторен принцип на еквиваленција; комбинаторен принцип на собирање; - да решава задачи со принцип на вклучување и исклучување.	• Поим за број на елементи на конечно множество, комбинаторен принцип на еквиваленција (2 часа) • Комбинаторен принцип на собирање (1 час) • Принцип на вклучување и исклучување(2 часа) **Поими:** конечно множество, принцип на еквиваленција, принцип на собирање, принцип на вклучување и исклучување	**Активности** • Низ едноставни примери учениците се запознаваат со основните типови на комбинаторно броење на конечно множество. • Со помош на методите на активна настава учениците решаваат задачи со примена на основните принципи на броење кај конечни множества. **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	**Ученикот/ученичката може:** 1.1: да ги искажува поимите за конечно множество и број на елементи на конечно множество; 1.2: да ги објаснува комбинаторните принципи на еквиваленција и собирање; 1.3: да ги применува комбинаторните принципи на еквиваленција и собирање; 1.4: да одредува број на елементи на множество со помош на принцип на вклучување и исклучување.

2	- да употребува комбинаторен принцип на производ; - да дефинира пермутација, варијација и комбинација и решава задачи со нивна примена; - да решава задачи со примена на биномна формула.	• Комбинаторен принцип на производ (1 час) • Пермутации на конечно множество, ознака $n!$ (2 часа) • Варијации (со и без повторување) над конечно множество (2 часа) • Комбинации над конечно множество, биномни коефициенти (2 часа) • Паскалов триаголник (1 час) **Поими:** принцип на производ, пермутација, факториел, варијација, комбинација, биномен коефициент, Паскалов триаголник **(*) Предлог-проект:** Обопштен принцип на вклучување и исклучување **(*) Предлог-проект:** Мултимножество, пермутации, варијации, комбинации над мултимножество, мултиномни коефициенти, комбинаторна теорема на Моавр.	**Активности** • Наставникот организира активности со кои се овозможува продлабочено изучување на различни комбинаторни конфигурации (пермутации, комбинации и варијации). • Учениците низ групна работа прават споредба и вршат избор на најсоодветната комбинаторна конфигурација за одредена ситуација. **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	2.1: да го искажува комбинаторниот принцип на производ, и дефинициите за пермутација, варијација и комбинација; 2.2: да утврдува разлика меѓу варијации и комбинации; 2.3: да решава задачи во врска со пермутации, варијации, комбинации и биномна формула; 2.4: да дава комбинаторни докази.

	ОСНОВНИ АЛГЕБАРСКИ СТРУКТУРИ (18 часа)			
Ред. број	**Резултати од учењето**	**Содржини и поими**	**Активности и методи**	**Стандарди за оценување**
1	**Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:** - да дефинира бинарна операција, групоид, моноид, полугрупа, група, подгрупа, циклична група и решава задачи во врска со нив.	• Поим за бинарна операција (1 час) • Основни особини на бинарна операција (асоцијативност, комутативност, неутрален елемент, регуларни елементи, инверзен елемент) (2 часа) • Поим за групоид, полугрупа, моноид (1 час) • Општ асоцијативен закон, општ комутативен закон (докази со јака индукција) (1 час) • Поим за степен со природен експонент во полугрупа (1 час) • Поим за група и подгрупа (2 часа)	**Активности** • Наставникот дефинира бинарна операција и некои основни особини на бинарна операција. • Учениците докажуваат закони за алгебарски структури. • Низ групна работа учениците откриваат поими и законостости поврзани со различни алгебарски структури. **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	**Ученикот/ученичката може:** 1.1: да искажува поими за групоид, полугрупа, моноид и основните својства на бинарна операција; 1.2: да ги користи основната аритметика со степени во полугрупа и група; 1.3: да решава задачи од степени и пресметува ред на елемент во група; 1.4: да докажува општ асоцијативен и комутативен закон.

		• Поим за степен со целоброен експонент во група (1 час) • Циклична подгрупа, ред на елемент во група (1 час) **Поими:** бинарна операција, регуларен елемент, инверзен елемент, групоид, полугрупа, моноид, група, подгрупа, циклична подгрупа, ред на елемент во група **(*) Предлог-проект:** Теорема на Лагранж за конечни групи, и последица дека во конечна група важи: редот на секој елемент го дели редот на групата.		
2	- да дефинира прстен, интегрален домен, поле, електрични кола со прекинувачи и решава задачи во врска со нив.	• Две бинарни операции над едно множество; поим за (асоцијативен) прстен (1 час) • Биномна формула за комутативен прстен (два докази: со слаба индукција и комбинаторен) (1 час) • Поим за интегрален домен (1 час)	**Активности** • Наставникот ги дефинира поимите прстен, поле и булова алгебра. • Учениците откриваат и докажуваат тврдења поврзани со новите структури.	2.1: да искажува поими за прстен, интегрален домен, поле, булова алгебра; 2.2: да дава едноставни примери за прстен, интегрален домен, поле, булова алгебра; 2.3: да решава задачи со примена на биномна формула, и решава равенки

		• Група од регуларни (инвертибилни) елементи во интегрален домен; поим за поле (1 час) • Поим за булова алгебра; равенки во булова алгебра (2 часа) • Електрични кола со прекинувачи (2 часа) **Поими:** прстен, биномна формула, интегрален домен, поле, булова алгебра **(*) Предлог-проект:** Полиномна формула.	• Низ групна работа учениците решаваат равенки во булова алгебра. **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	во булова алгебра и електрични кола со прекинувачи; 2.4: да ја докажува биномната формула.

	РАЦИОНАЛНИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ (10 часа)			
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	**Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:** - да решава задачи со полиноми, - употребува формули за скратено множење; - да разложува полином на множители; - да решава задачи со алгебарски дропки.	• Поим за полином (полиномна форма), степен на полином, и основна аритметика со полиноми (1 час) • Делење на полином со полином (2 часа) • Формули за скратено множење на полиноми (1 час) • Разложување на некои полиноми на множители (2 часа) • Алгебарски дропки и основна аритметика (2 часа) • Алгебарски рационални изрази (2 часа) **Поими:** полином, степен на полином, разложување на полином, алгебарска дропка, алгебарски рационален израз	**Активности** • Наставникот организира продлабочено изучување на полиномите и операциите со нив. • Учениците решаваат задачи во кои ги применуваат операциите со полиноми, формулите за скратено множење и разложувањето на множители. • Низ групна работа се совладуваат основните операции со алгебарски рационални изрази. **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	**Ученикот/ученичката може:** 1.1: да искажува основни поими во врска со полиноми; 1.2: да ги користи основните аритметички операции со полиноми; 1.3: да решава задачи со алгебарски рационални изрази; 1.4: да докажува идентитети во врска со полиноми.

	ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРИЈА НА ДЕЛИВОСТ ЗА МНОЖЕСТВОТО ЦЕЛИ БРОЕВИ (26 часа)			
Ред. број	**Резултати од учењето**	**Содржини и поими**	**Активности и методи**	**Стандарди за оценување**
1	**Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:** - да ја применува теоремата за делење со остаток; - да решава задачи со примена на основната теорема на аритметиката; - да ги дефинира и пресметува функциите τ и σ и ги применува во конкретни задачи; - да определува НЗД со примена на Евклидов алгоритам.	• Поим за деливост; основни особини на деливоста (1 час) • Теорема за делење со остаток (1 час) • секоја подгрупа од циклична група е циклична; подгрупи од $\mathbb{Z}(+)$ (1 час) • Множество линеарни комбинации над дадено конечно множество од цели броеви; постоење на НЗД (1 час) • Поим за иредуцибилен број и поим за прост број; доказ на Евклид за еквивалентност на двата поими (1 час) • Основна теорема на аритметика (доказ); канонска факторизација (1 час) • Функциите τ и σ (со доказ на формулите) (1 час) • Алгоритам на Евклид за барање НЗД (2 часа)	**Активности** • Наставникот организира продлабочување и проширување на поимот деливост на множеството цели броеви. • Учениците се запознаваат со својствата на алгебарските структури поврзани со деливоста, како и со функциите број на делители и збир на делители на даден број, како и Евклидовиот алгоритам за одредување НЗД. • Низ групна работа се докажуваат тврдења од наставниот материјал. **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	**Ученикот/ученичката може:** 1.1: да искажува поим за деливост, основните особини на деливост, поим за прост број и основната теорема на аритметиката; 1.2: да дели со остаток, одредува НЗД со помош на Евклидов алгоритам, и наоѓа канонска факторизација на „мали“ броеви; 1.3: да решава задачи со цели броеви во врска со деливос;т 1.4: да докажува тврдења и теореми во врска со деливост на цели броеви.

		Поими: линеарна комбинација, иредуцибилен број, прост број, канонска факторизација, алгоритам **(*) Предлог-проект:** Проблем на Фробениус (за поштенски марки).		
2	- да решава задачи од бројни системи.	• Бројни системи (2 часа) • Бинарен броен систем (1 час) **Поими:** броен систем **(*) Предлог-проект:** -Теорема на Кумер за биномни коефициенти; - Непарни броеви во Паскалов триаголник.	**Активности** • Наставникот организира групна работа преку која учениците се запознаваат со постоењето на други бројни системи и начините за миграција од еден во друг броен систем. • Учениците низ групна работа запишуваат броеви во бинарен броен систем и вршат операции со нив. **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	2.1: да објаснува за бројни системи; 2.2: да претвора еден број од еден во друг броен систем; 2.3: да решава задачи во броен систем различен од декаден; 2.4: да докажува еднозначност на претставување во даден броен систем и решава посложени задачи со премин во друг броен систем.

3	- да решава задачи од конгруенции во множеството цели броеви; - да ги докажува признаците за деливост со 3,7,9,11,13,17; - да решава задачи со комплетен и редуциран систем на остатоци; - да ја применува функцијата на Ојлер во разни задачи; - да применува теорема на Вилсон и мала теорема на Ферма; - да решава задачи од линеарни конгруентни равенки.	• Поим за конгруенција во $\mathbb{Z}$; основни особини (2 часа) • Прстенот $\mathbb{Z}_n$, комплетен систем остатоци (2 часа) • Признаци за деливост со 3, 7, 9, 11, 13, 17 (2 часа) • „Брзо“ степенување во $\mathbb{Z}_n$ (1 час) • „Проблемот“ со делење во $\mathbb{Z}_n$; регуларни (инвертибилни) елементи во $\mathbb{Z}_n(\cdot)$ (1 час) • Групата $U(\mathbb{Z}_n)$, редуциран систем остатоци (2 часа) • Функцијата φ и теорема на Ојлер (1 час) • Формула за пресметување на $\varphi(n)$ (1 час) • Мала теорема на Ферма; теорма на Вилсон (1 час) • Линеарна конгруентна равенка со една непозната (1 час) **Поими:** конгруенција, прстенот $\mathbb{Z}_n$, комплетен систем остатоци, групата $U(\mathbb{Z}_n)$, редуциран систем остатоци	**Активности** • Наставникот дефинира релација на конгруенција во множеството цели броеви. • Учениците докажуваат својства на релацијата на конгруенција и изведуваат докази на признаците за деливост со некои природни броеви. • Со помош на методите за активна настава учениците дискутираат за својствата и „проблемите“ кај релацијата за конгруенција. • Наставникот ја демонстрира примената на Ојлеровата функција, теоремите на Ферма и Вилсон, како и методите за решавање на линеарна конгруентна равенка со една непозната. **Методи:** дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	3.1: да искажува поим за конгруенција, прстенот $\mathbb{Z}_n$, комплетен систем остатоци, редуциран систем остатоци, признаци за деливост, како и теорема на Ојлер, мала теорема на Ферма, и теорема на Вилсон; 3.2: да ги користи признаците за деливост, врши пресметки со конгруенции; 3.3: да применува конгруенции во решавање на задачи, решава линеарна конгруентна равенка со една непозната. 3.4: да докажува теореми, признаци за деливост, и решава посложени задачи од елементарна теорија на броеви

		(*) Предлог-проект: Теорема на Лука за биномни коефициенти ($mod\ p$). **(*) Предлог-проект:** Кинеска теорема на остатоци.		

Оценување на постигањата на учениците	За да се оценат постигнувањата на ученикот неопходно е: - да се согледа иницијалната состојба на ученикот (согледување на неговите претходни искуства, знаење и вештини); - да се разговара со ученикот за да се добијат сознанија за неговото логичко размислување, разбирањето на поими и степенот на разбирање при нивната примена, оспособеноста за решавање задачи; - континуирано следење на односот на ученикот кон работата, соработка со врсниците, покажаната иницијативност, љубопитност, самостојност, точност во искажувањето и истрајност во извршувањето на обврските; - континуирано утврдување и проверка на стекнатите знаења, способности и вештини во модуларните единици. Оценувањето на постигањата на учениците ќе биде со бројна оценка (од 1 до 5). Писменото оценување ќе се врши преку изработка на четири писмени работи по две во секое полугодие.

Литература	За реализација на наставната програма неопходен е учебник одобрен од министер за образование и наука, збирка задачи и други извори.
Почеток на имплементација на наставната програма	Учебна 2020/2021 година
Институција/ носител на програмата	Биро за развој на образованието (БРО)
Потпис и датум на донесување на наставната програма	бр. 13-12282/11 25.10.2019 година МИНИСТЕР, Dr. Arbër Ademi
Датум на ревизија	