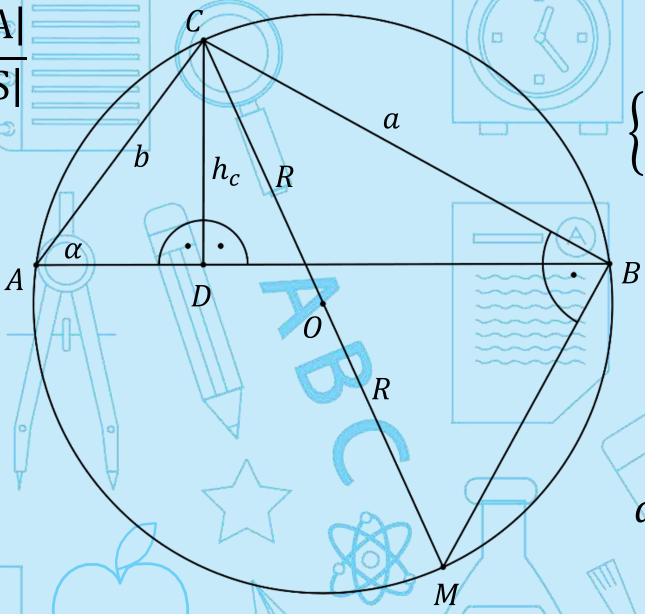
ТРАЈЧЕ ЃОРЃИЈЕВСКИ
ОЛИВЕРА ТРИФУНОВСКА
ЛИДИЈА ФИЛИПОВСКА
МИРКО ПЕТРУШЕВСКИ

ПРИРАЧНИК ПО МАТЕМАТИКА

ЗА УЧЕНИЦИ ОД VII, VIII И IX ОДДЕЛЕНИЕ И НИВНИТЕ НАСТАВНИЦИ

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$p(\mathrm{A}) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\mathrm{S}|}$$



$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{c_1 - a_1x}{b_1} \\ y = \dfrac{c_2 - a_2x}{b_2} \end{cases}$$

$$a \equiv b(mod\ m)$$

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Биро за развој на образованието

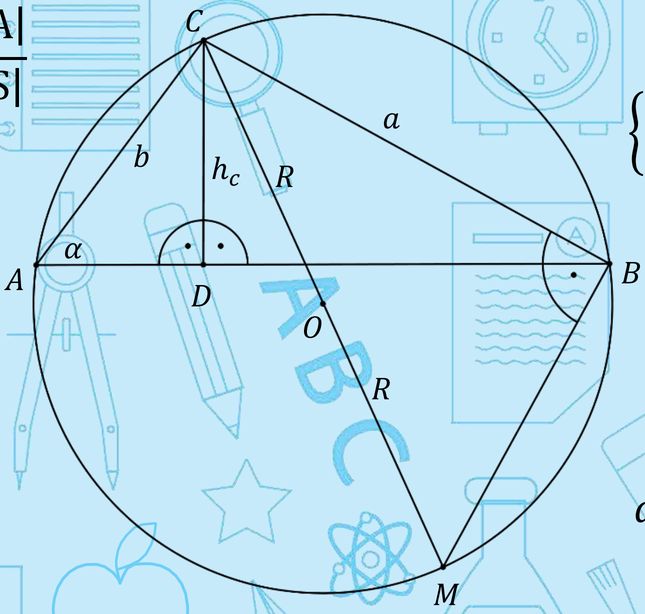
ТРАЈЧЕ ЃОРЃИЈЕВСКИ
ОЛИВЕРА ТРИФУНОВСКА
ЛИДИЈА ФИЛИПОВСКА
МИРКО ПЕТРУШЕВСКИ

ПРИРАЧНИК ПО МАТЕМАТИКА

ЗА УЧЕНИЦИ ОД VII, VIII И IX ОДДЕЛЕНИЕ И НИВНИТЕ НАСТАВНИЦИ

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$p(\mathrm{A}) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\mathrm{S}|}$$



$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{c_1 - a_1x}{b_1} \\ y = \dfrac{c_2 - a_2x}{b_2} \end{cases}$$

$$a \equiv b (mod\ m)$$

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Биро за развој на образованието

ПРИРАЧНИК

Наслов:
ПРИРАЧНИК ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИ ОД VII, VIII И IX ОДДЕЛЕНИЕ
И НИВНИТЕ НАСТАВНИЦИ

Издавач:
Биро за развој на образованието

За издавачот:
Ризван Бела, в.д. директор

Автори:
Трајче Ѓорѓијевски, советник по математика-БРО, Скопје
Оливера Трифуновска, советник за гимназиско образование-БРО, Скопје
Лидија Филиповска, професор во СУГС Гимназија „Јосип Броз-Тито“, Скопје
Мирко Петрушевски, д-р по математички науки-професор на МФС

Рецензенти:
м-р Лидија Кондинска, советник по математика-БРО, ПЕ-Битола
Муса Зука, советник по математика-БРО, Скопје

Печати:
Арберија Дизајн

Тираж:
2000 примероци

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека „Св. Климент Охридски“, Скопје

373.3.016:51(035)

ПРИРАЧНИК по математика за ученици од VII, VIII, и IX одделение и нивните наставници / [автори Трајче Ѓорѓијевски ... и др.]. - Скопје : Биро за развој на образованието, 2018. - 188 стр. : илустр. ; 20 см

Автори: Трајче Ѓорѓијевски, Оливера Трифуновска, Лидија Филиповска, Мирко Петрушевски. - Библиографија: стр. 64

ISBN 978-608-206-058-3
1. Ѓорѓијевски, Трајче [автор]
а) Математика - Основно образование - Прирачници
COBISS.MK-ID 105910282

Изданието е печатено со финансиска поддршка на Канцеларијата на УНИЦЕФ, Скопје

С О Д Р Ж И Н А

Вовед 5

Тема 1: Методи на решавање систем од две линеарни равенки
со две непознати 7

Тема 2: Елементи од планиметрија 19

Тема 3: Елементарна веројатност 33

Задачи за вежбање 49

Решенија 81

Тема 4: Математичка индукција 89

Тема 5: Вовед во неравенства 101

Тема 6: Конгруенции во Z 117

Задачи за вежбање 155

Решенија 167

ВОВЕД

Прирачникот по математика за ученици од VII, VIII и IX одделение и нивните наставници, од авторите Трајче Ѓорѓијевски, Оливера Трифуновска, Лидија Филиповска и Мирко Петрушевски е изготвен со цел да се даде поддршка на наставниците и учениците за одредени теми што може да се користат во додатната настава. Прирачникот содржи 6 теми и 2 групи задачи. Темите се:

- Методи на решавање систем од две линеарни равенки со две непознати.
- Елементи од планиметрија.
- Елементарна веројатност.
- Математичка индукција.
- Вовед во неравенства.
- Конгруенции во $\mathbb{Z}$.

Темите: методи на решавање систем од две линеарни равенки со две непознати, елементи од планиметрија и елементарна веројатност се изучуваат во основното образование, се разбира, тука се дадени со мало проширување. Одредени делови од наведените теми може да се користат за работа со сите ученици во редовната настава.

Темите: математичка индукција, вовед во неравенства и конгруенции во $\mathbb{Z}$ не се изучуваат во основното образование, но претставуваат важен дел при изучувањето на математиката. Материјалот што го содржат темите е погоден за учениците што сакаат да ги прошират своите знаења, а особено е корисен за работа со талентираните ученици по математика на часовите во додатната настава.

Исто така, конкретните содржини во темите ќе им бидат од значителна корист на наставниците при планирање на додатната настава.

Во самите теми има голем број решени задачи, а со нивното разбирање ќе се усвојат „силните математички алатки“, кои во поново време често пати овозможуваат успешно решавање на задачите од математичките натпревари.

По третата тема има над 200 задачи наменети за сите ученици од 7, 8 и 9 одделение и за нив има одговори. На крајот од шестата тема има над 100 задачи кои се наменети за посолидните ученици и за учениците што учествуваат во додатната настава и за нив се дадени решенија.

Авторите сметаат дека со користење на овој ракопис значително ќе се зголеми знаењето на сите ученици по математика, како и интересот за работа со посолидните ученици, а воедно ќе се зголеми успехот на математичките натпревари.

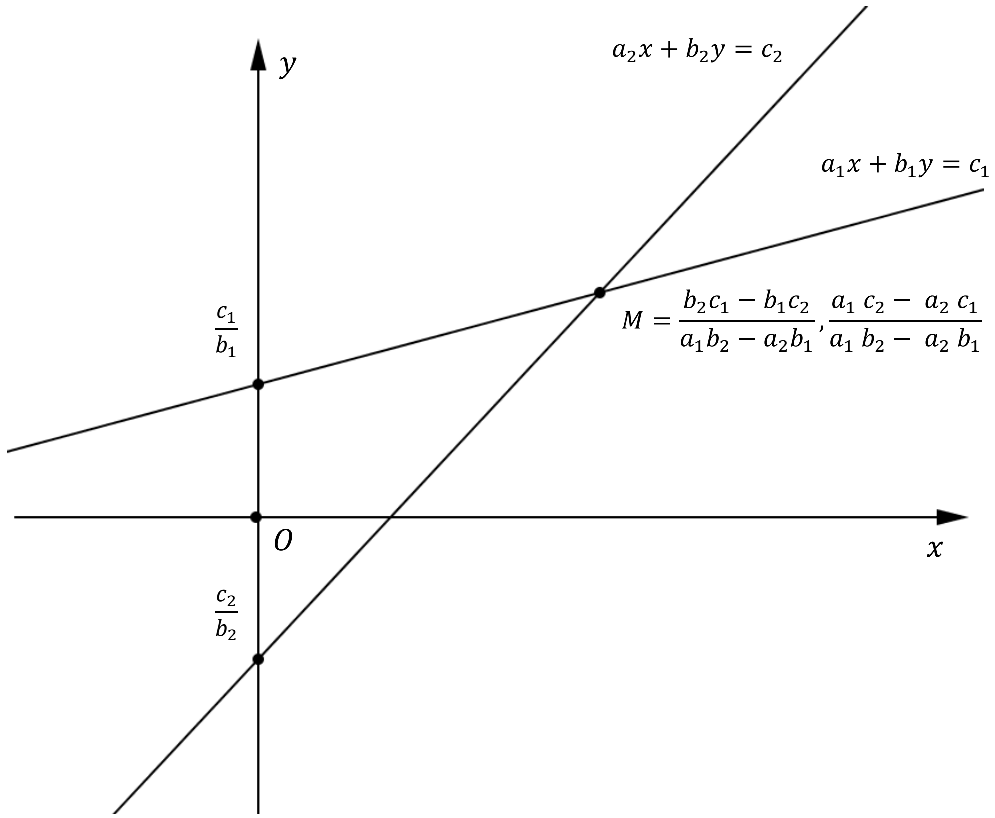
Благодарност до рецензентите за нивните сугестии со кои е подобрен квалитетот на ракописот.

Авторите

ТЕМА 1

Методи на решавање систем од две линеарни равенки со две непознати

Во оваа тема се дадени методите за решавање системи од две линеарни равенки со две непознати и дискусија за решенијата. Методите: Крамеров метод, графички метод, метод на замена, метод на изедначување, метод на спротивни коефициенти и Гаусов алгоритам се користат почесто, а методите: метод на спротивни слободни коефициенти, метод на воведување на коефициент на пропорционалност, метод на цртање на права низ точката (0,0) и метод на еднакви коефициенти и транзитивност, се користат ретко. Нашата цел е да се претставаат сите наведени методи.



За решенијата на систем од две линеарни равенки со две непознати

Секој систем од две линеарни равенки со две непознати x и y може да се доведе до т.н. *општ облик*:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

каде што a_1 , a_2 , b_1, b_2 се дадени реални броеви.

(I) РЕГУЛАРЕН СИСТЕМ (Левите страни на двете равенки не се пропорционални, т.е. $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$) Секој регуларен систем има единствено решение (x, y). Имено, гледано геометриски, равенките кои го сочинуваат системот претставуваат непаралелни прави и затоа тие во пресек имаат една единствена точка (x, y). Множеството решенија M се состои од подредениот пар реални броеви x и y.

Пример 1: Регуларниот систем $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 5x + 7y = 12 \end{cases}$ има множество решенија $M = \{(1,1)\}$.

(II) ПРОТИВРЕЧЕН СИСТЕМ (Левите страни на двете равенки се пропорционални, но таа пропорционалност не се пренесува на десните страни, т.е. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$). Секој противречен систем нема решение. Имено, гледано геометриски, равенките кои го сочинуваат системот претставуваат две различни паралелни прави.

Пример 2: Противречниот систем $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 6x - 8y = 5 \end{cases}$ има празно множество решенија, т.е. $M = \emptyset$.

(III) НЕОПРЕДЕЛЕН СИСТЕМ (Левите страни на двете равенки се пропорционални, а таа пропорционалност се пренесува и на десните страни, т.е. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$). Секој неопределен систем има бесконечно множество решенија. Имено, гледано геометриски, станува збор за една права или за целата рамнина.

Пример 3: Неопределениот систем $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 9x - 12y = -3 \end{cases}$ има множество решенија $M = \left\{\left(\frac{3y-1}{2}, y\right) : y \in \mathbb{R}\right\}$ што ја претставува севкупноста од точки кои формираат права.

Пример 4: Неопределениот систем $\begin{cases} 0\cdot x - 0\cdot y = 0 \\ 0\cdot x - 0\cdot y = 0 \end{cases}$ има множество решенија $M = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ кое ја претставува севкупноста од сите точки во рамнината.

Како што веќе спомнавме, во продолжение ќе опишеме неколку методи за решавање на регуларен систем.

Крамеров метод

Нека $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\delta - \beta\gamma$ (овој израз се нарекува *детерминанта*).

За системот $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ разгледуваме три детерминанти:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_1b_2 - a_2b_1$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 b_1 \\ c_2 b_2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} c_1b_2 - c_2b_1$ и $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_1c_2 - a_2c_1$.

Првата се нарекува *детерминанта на системот*, а преостанатите се *детерминанти придружени на непознатите* x и y, соодветно.

Следните формули на Крамер го одредуваат единственото решение на регуларен систем (т.е. систем кој има детерминанта Δ различна од нула, односно за кој важи $a_1b_2 \neq a_2b_1$):

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Пример 1: $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 5x + 7y = 12 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 20 = 41$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 12 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 48 = 41$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 36 + 5 = 41$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{41}{41} = 1\ ,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{41}{41} = 1$$

Графички метод

Нека е даден систем во општ облик за кој важи $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ т.е. $a_1b_2 \neq a_2b_1$. Да ја изразиме непознатата y преку x во секоја од равенките на системот:

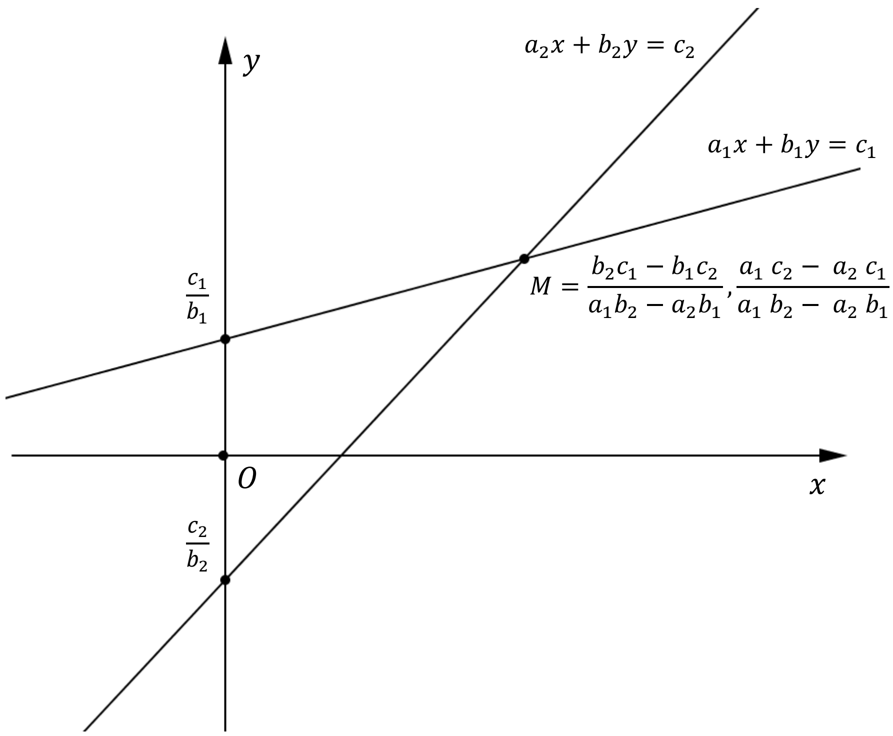
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1} \\ y = \frac{c_2 - a_2x}{b_2} \end{cases}$$

Така добиваме експлицитни равенки на две непаралелни прави. Ги табелираме:

x	–1	0	1
y	$\frac{c_1+a_1}{b_1}$	$\frac{c_1}{b_1}$	$\frac{c_1-a_1}{b_1}$

x	–1	0	1
y	$\frac{c_2+a_2}{b_2}$	$\frac{c_2}{b_2}$	$\frac{c_2-a_2}{b_2}$

Пресечната точка на правите е единственото решение на системот равенки:



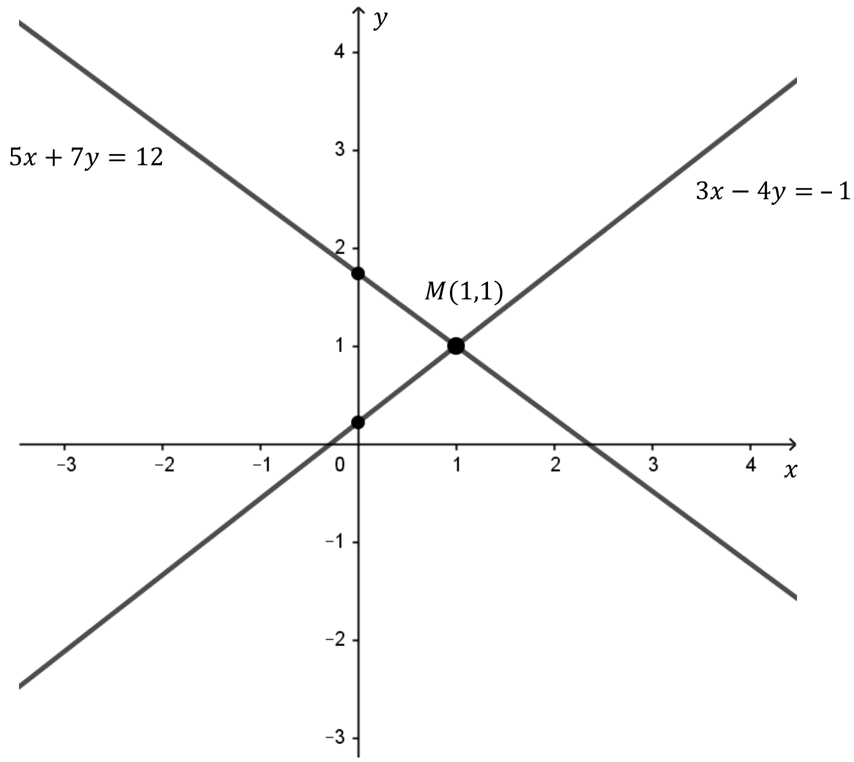
$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1},\ y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Пример 2: $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 5x + 7y = 12 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4y = 3x + 1 \\ 7y = 12 - 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3x+1}{4} \\ y = \frac{12-5x}{7} \end{cases}$$

x	-1	0	1
y	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

x	-1	0	1
y	$\frac{17}{7}$	$\frac{12}{7}$	1



$$x = 1, \; y = 1$$

Метод на замена

Предуслов е барем еден од коефициентите a_1, a_2, b_1, b_2 да е различен од нула, да речеме $b_1 \neq 0$.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a_1x+b_1y=c_1 \\ y=\frac{c_1-a_1x}{b_1} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{c_1-a_1x}{b_1} \\ a_2x + b_2\frac{c_1-a_1x}{b_1} = c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1},\ y = \frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\ (\text{за } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \text{т.е. } a_1b_2 \neq a_2b_1).$$

Пример 3: $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 5x + 8y = 13 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 4y = 3x+1 \\ y = \frac{3x+1}{4} \end{matrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3x+1}{4} \\ 5x + 8\frac{3x+1}{4} = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M = \{(1,1)\}.$$

Метод на изедначување

Предуслов е a_1, $a_2 \neq 0$ или b_1, $b_2 \neq 0$. Да земеме дека $b_1, b_2 \neq 0$.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{c_1-a_1x}{b_1} \\ y = \frac{c_2-a_2x}{b_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{c_1-a_1x}{b_1} = \frac{c_2-a_2x}{b_2}.$$

$$\Rightarrow x = \frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1},\ y = \frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\ (\text{за } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \text{т.е. } a_1b_2 \neq a_2b_1).$$

Пример 4: $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 5x + 8y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3x+1}{4} \\ y = \frac{13-5x}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M = \{(1,1)\}.$

Метод на спротивни коефициенти

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \ \ /\cdot b_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \ \ /\cdot(-b_1) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1 \\ -a_2b_1x - b_1b_2y = -b_1c_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \ x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \ \ y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \ \ (\text{за } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \text{т.е. } \ a_1b_2 \neq a_2b_1).$$

Пример 5: $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \ \ /\cdot 2 \\ 5x + 8y = 13 \end{cases} \ \Longrightarrow \ \begin{cases} 6x - 8y = -2 \\ 5x + 8y = 13 \end{cases} \ \Longrightarrow \ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \ \Longrightarrow \ M = \{(1,1)\}.$

Гаусов алгоритам

Предуслов е барем еден од коефициентите $a_1, \ a_2, \ b_1, \ b_2$ да е различен од нула, да земеме дека $a_1 \neq 0$.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \ \ /: a_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \ \Longrightarrow \ \begin{cases} x + \dfrac{b_1}{a_1}y = \dfrac{c_1}{a_1} \ \ /(-a_2) \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Откако ќе ја помножиме првата равенка со $-a_2$, ја додаваме на втората и добиваме:

$$\begin{cases} x + \dfrac{b_1}{a_1}y = \dfrac{c_1}{a_1} \\ 0 + \dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{c_1}y = c_2 - \dfrac{a_2c_1}{a_1} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \ (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$\Longrightarrow \ y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \ x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \ \ (\text{за } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \text{т.е. } \ a_1b_2 \neq a_2b_1).$$

Пример 6: $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \ \ / : 3 \\ 5x + 8y = 13 \end{cases} \ \Longrightarrow \ \begin{cases} x - \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \ \ / \cdot (-5) \\ 5x + 8y = 13 \end{cases}$

Откако ќе ја помножиме првата равенка со -5, ја додаваме на втората и добиваме:

$$\begin{cases} x - \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \\ 0 + \left(\frac{20}{3} + 8\right)y = \frac{5}{3} + 13 \end{cases} \ \Longrightarrow \ \begin{cases} x - \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \\ \frac{44}{3}y = \frac{44}{3} \end{cases} \ \Longrightarrow \ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \ \Longrightarrow \ M = \{(1,1)\}.$$

Метод на спротивни слободни коефициенти

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & / \cdot (-c_2) \\ a_2x + b_2y = c_2 & / \cdot c_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ + \begin{cases} -a_1c_2x - b_1c_2y = -c_1c_2 \\ a_2c_1x + b_2c_1y = c_1c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ x(a_2c_1 - a_1c_2) = y(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\Rightarrow \ x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2c_1 - a_1c_2}y$$

$$a_1\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2c_1 - a_1c_2}y + b_1y = c_1$$

$$(a_1b_1c_2 - a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1 - a_1b_1c_2)y = c_1(a_2c_1 - a_1c_2)$$

$$c_1(a_1b_2 - a_2b_1)y = c_1(a_2c_1 - a_1c_2)$$

$$\Rightarrow \ y = \frac{a_1\,c_2 - a_2\,c_1}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1},\ x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\ \ (\text{за } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \text{т.е. } a_1b_2 \neq a_2b_1).$$

Пример 7: $\begin{cases} 3x - 4y = -1 & / \cdot 13 \\ 5x + 8y = 13 \end{cases} \ \Rightarrow \ \begin{cases} 39x - 52y = -13 \\ 5x + 8y = 13 \end{cases} \ \Rightarrow \ 44x = 44y \ \Rightarrow \ x = y$

$$3x - 4x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 1, y = 1 \quad M = \{(1,1)\}.$$

Метод на воведување на коефициент на пропорционалност

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \ \ /\cdot c_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \ \ /\cdot (-c_1) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} a_1c_2x + b_1c_2y = c_1c_2 \\ -a_2c_1x - b_2c_1y = -c_1c_2 \end{cases}$$

$$(a_1c_2 - a_2c_1)x - (b_2c_1 - b_1c_2)y = 0$$

$$(a_1c_2 - a_2c_1)x = (b_2c_1 - b_1c_2)y$$

$$\frac{x}{b_2c_1 - b_1c_2} = \frac{y}{a_1c_2 - a_2c_1} = k$$

$$x = (b_2c_1 - b_1c_2)k;\ y = (a_1c_2 - a_2c_1)k$$

$$a_1(b_2c_1 - b_1c_2)k + b_1(a_1c_2 - a_2c_1)k = c_1$$

$$k(a_1b_2c_1 - a_1b_1c_2 + a_1b_1c_2 - a_2b_1c_1) = c_1$$

$$k = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\Longrightarrow\ x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1},\ y = \frac{a_1\,c_2 - a_2\,c_1}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1}\ \ (\text{за } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \text{т.е. } a_1b_2 \neq a_2b_1).$$

Пример 8: $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \ \ /\cdot 13 \\ 5x + 8y = 13 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 39x - 52y = -13 \\ 5x + 8y = 13 \end{cases} \Longrightarrow 44x - 44y = 0,$

т.е. $44x = 44y$, од каде што $\frac{x}{44} = \frac{y}{44} = k$

$$x = 44k,\ y = 44k$$

$$3 \cdot 44k - 4 \cdot 44k = -1$$

$$132k - 176k = -1$$

$$44k = 1$$

$$k = \frac{1}{44} \Longrightarrow x = 44 \cdot \frac{1}{44} = 1,\ y = 44 \cdot \frac{1}{44} = 1.$$

Метод на цртање на права низ точката (0,0)

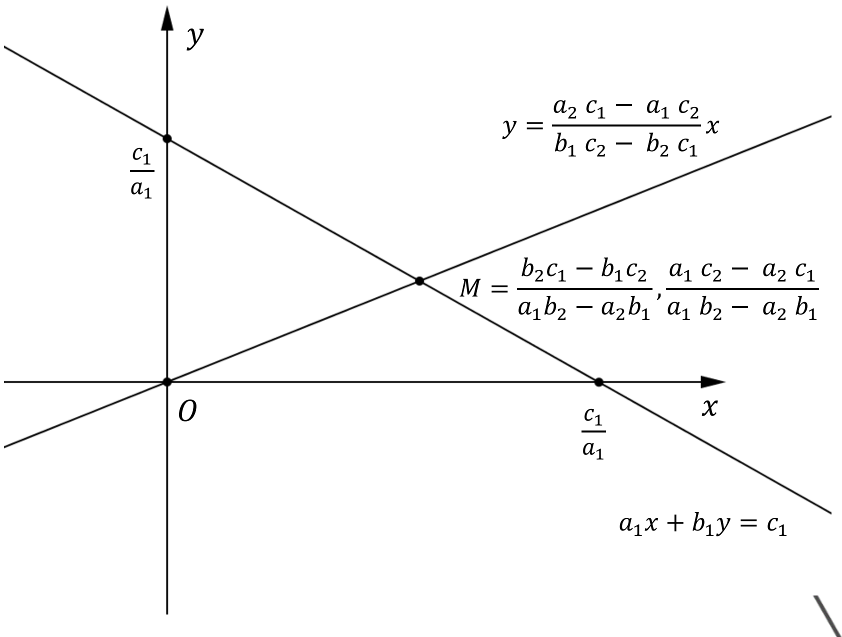
- Се црта права низ точката (0,0)
- Се користат пресечни точки со оските

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \ \ /\cdot(-c_2) \\ a_2x + b_2y = c_2 \ \ /\cdot c_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a_1c_2x - b_1c_2y = -c_1c_2 \\ a_2c_1x + b_2c_1y = c_1c_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = \frac{a_2\,c_1 - a_1\,c_2}{b_1\,c_2 - b_2\,c_1}x$ - цртаме права низ точката (0,0).

Ја цртаме и $a_1x + b_1y = c_1$. За $x = 0$, $y = \frac{c_1}{b_1}$; $y = 0$, $x = \frac{c_1}{a_1}$



Пример 9: $\begin{cases} 3x - 4y = -5 \ \ /\cdot 14 \\ 4x + 5y = 14 \ \ /\cdot 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 42x - 56y = -70 \\ 20x + 25y = 70 \end{cases} \Rightarrow 62x = 31y \Rightarrow y = 2x.$

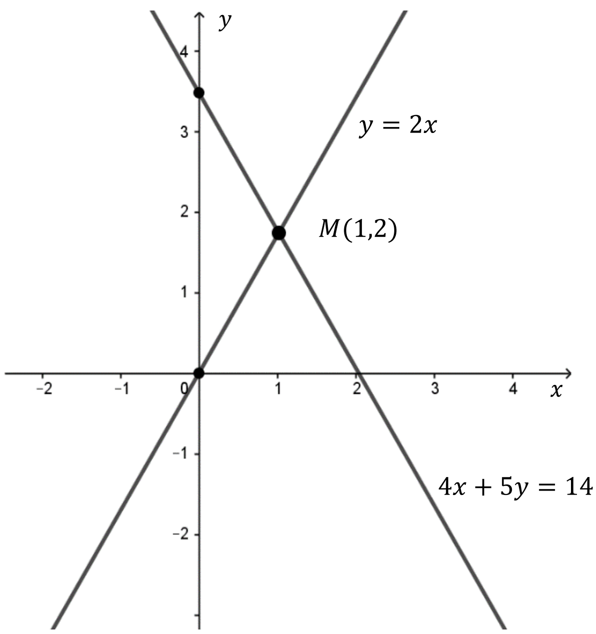
За $x = 0$, $y = 0$; за $x = -1$, $y = -2$.

Од $4x + 5y = 14$ добиваме:

за $x = 0$, $y = \frac{14}{5}$;

за $y = 0$, $x = \frac{7}{2}$.

Решение: $x = 1$, $y = 2$.



Метод на еднакви коефициенти и транзитивност

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \ \ /\cdot a_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \ \ /\cdot a_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1a_2x + a_2b_1y = a_2c_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1a_2x = a_2c_1 - a_2b_1y \\ a_1a_2x = a_1c_2 - a_1b_2y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \ a_2c_1 - a_2b_1y = a_1c_2 - a_1b_2y$$

$$\Longrightarrow \ a_1b_2y - a_2b_1y = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$\Longrightarrow \ y = \frac{a_1\,c_2 - a_2\,c_1}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1} \ \ (\text{за } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \text{т.е. } \ a_1b_2 \neq a_2b_1)$$

$$a_1x = c_1 - b_1y$$

$$a_1x = c_1 - b_1\frac{a_1\,c_2 - a_2\,c_1}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1}$$

$$\Longrightarrow \ x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \ \ (\text{за } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \text{т.е. } \ a_1b_2 \neq a_2b_1).$$

Пример 10: $\begin{cases} 3x - 4y = -5 \ \ /\cdot 4 \\ 4x + 5y = 14 \ \ /\cdot 3 \end{cases} \ \Longrightarrow \ \begin{cases} 12x - 16y = -20 \\ 12x + 15y = 42 \end{cases} \ \Longrightarrow \ \begin{cases} 12x = -20 + 16y \\ 12x = 42 - 15y \end{cases}$

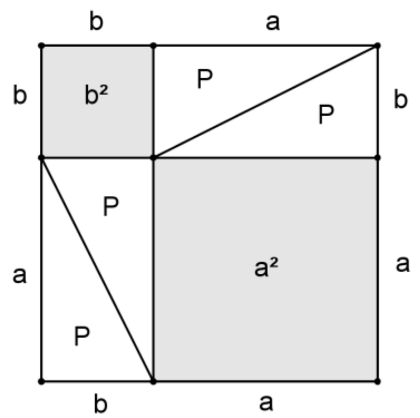
$$-20 + 16y = 42 - 15y \ \Longrightarrow \ y = 2$$

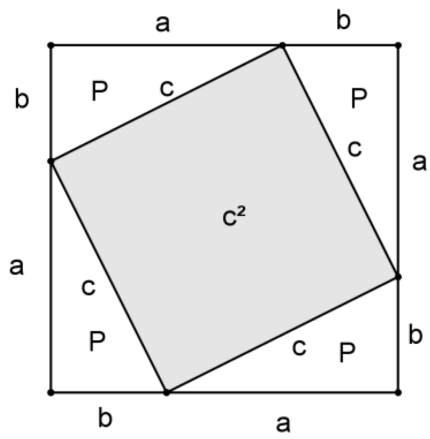
$$3x - 4\cdot 2 = -5 \ \Longrightarrow \ x = 1.$$

ТЕМА 2

Елементи од планиметрија

Во оваа тема се докажани основните теореми на рамнинската геометрија т.н. планиметрија. Имено, станува збор за теоремите на Талес, теоремата на Евклид, теоремата на Питагора и обратната теорема на Питагора, теоремата на Херон, како и за неколку поважни формули за чии докази се применуваат споменатите теореми.

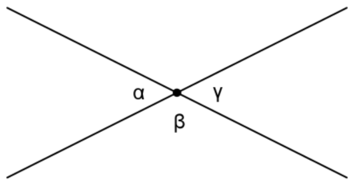




1. Агли

Теорема: Секои два накрсни агли се еднакви.

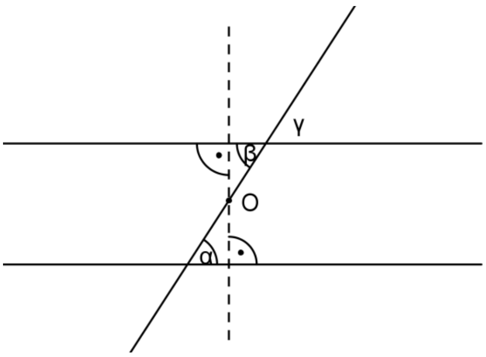
Доказ:



$\alpha + \beta = \gamma + \beta = 180°$.
Следува дека $\alpha = \gamma$.

Теорема: Секои два соодветни агли, добиени при сечењето на две паралелни прави со трансверзала, се еднакви.

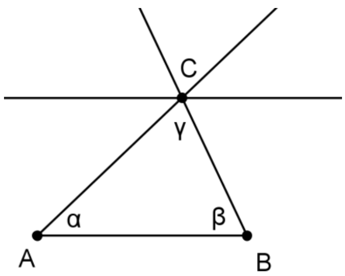
Доказ:



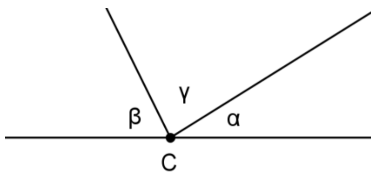
Доволно е да покажеме еднаквост на аглите α и γ. Како накрсни агли, еднакви се γ и β.
Нека O е средишна точка на отсечката која е отсечена на трансверзалата. Да повлечеме низ O права која е нормална на правите a и b. Двата триаголника кои се добиваат се складни (според АСА). Оттука, $\alpha = \beta$.

Теорема: Збирот на внатрешните агли во секој триаголник изнесува 180°.

Доказ:



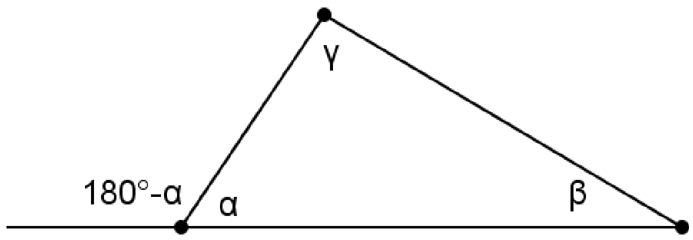
Да ја повлечеме низ темето C правата која е паралелна со AB. Тогаш,



односно $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Последица: За секој триаголник, надворешниот агол кај произволно теме е еднаков на збирот на двата внатрешни агли кои не му се соседни.

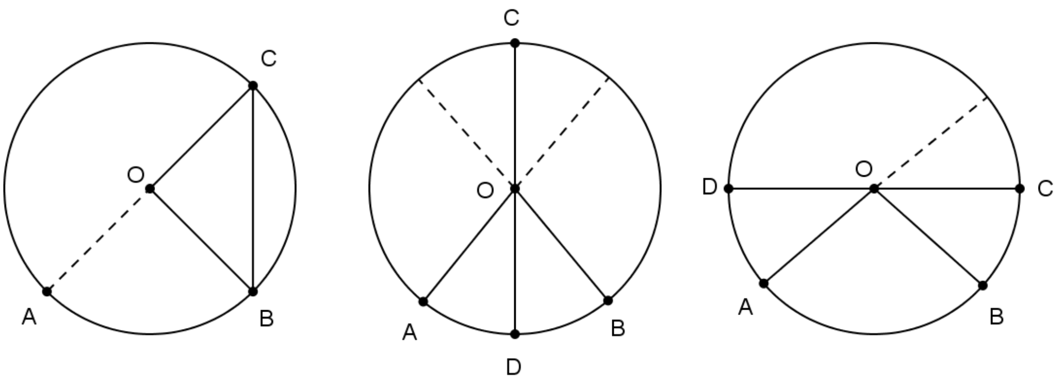
Доказ: Следува непосредно од равенството $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Имено, $180° - \alpha = \beta + \gamma$.



Последица: Во секој рамнокрак триаголник, надворешниот агол при врвот е двојно поголем од внатрешниот агол при основата.

Теорема на Талес: (периферни агли) Нека $\widehat{AB}$ е лак од кружница. Тогаш, секој периферен агол над лакот $\widehat{AB}$ е двојно помал од централниот агол над $\widehat{AB}$.

Доказ:



(прв случај) (втор случај) (трет случај)

Да го означиме со O центарот на кружницата и нека C е точка од кружницата која не лежи на лакот $\widehat{AB}$.

Прв случај: C лежи на ист дијаметар со A или B.
Тогаш, тврдењето се сведува на претходната последица.

Втор случај: C е внатрешна точка од дијаметрално спротивниот лак на $\widehat{AB}$. Да повлечеме дијаметар на кружницата кој минува низ C и нека точката D е другиот крај. Според првиот случај, $\sphericalangle ACD = \frac{1}{2} \sphericalangle AOD$ и $\sphericalangle DCB = \frac{1}{2} \sphericalangle DOB$, па доволно е да ги собереме последните две равенства.

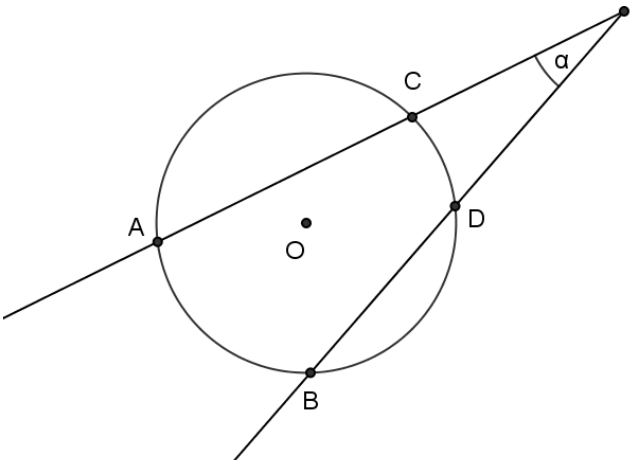
Трет случај: C лежи надвор од дијаметрално спротивниот лак на $\widehat{\mathrm{AB}}$. Повторно да повлечеме дијаметар на кружницата кој минува низ C и нека точката D е другиот крај. Овој пат ги одземаме (помало од поголемо) равенствата $\sphericalangle\mathrm{ACD} = \frac{1}{2}\sphericalangle\mathrm{AOD}$ и $\sphericalangle\mathrm{DCB} = \frac{1}{2}\sphericalangle\mathrm{DOB}$.

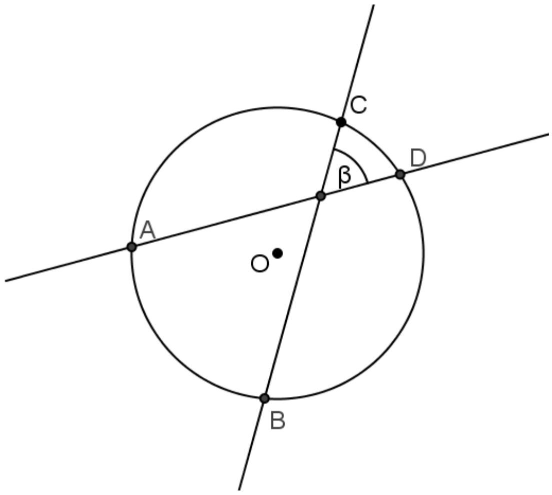
Забелешка: Поради претходната теорема, вообичаено е големината на централниот агол над лакот $\widehat{\mathrm{AB}}$ да се означува исто така, со $\widehat{\mathrm{AB}}$. Така, големината на секој периферен агол над тој лак изнесува $\frac{1}{2}\widehat{\mathrm{AB}}$.

Последица: Периферниот агол над секој дијаметар во кружница е прав агол.
Важи и обратното тврдење. Имено, геометриското место на точки C од рамнината, од кои дадена отсечка AB се „гледа" под прав агол, т.е. за кои важи $\sphericalangle\mathrm{ACB} = 90°$, претставува кружница со дијаметар AB (без точките A и B). Ова следува непосредно од следната т.н. „теорема за агли при кружница".

Теорема: За аглите α и β, прикажани на долниот цртеж, важат равенствата:

(i) $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{AB}} - \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{CD}}$ (ii) $\beta = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{CD}}$





Доказ: Користејќи го основното равенство за надворешен агол на триаголник, добиваме дека: (i) $\alpha = \sphericalangle\mathrm{ADB} - \sphericalangle\mathrm{DAC}$, (ii) $\beta = \sphericalangle\mathrm{ACB} + \sphericalangle\mathrm{DAC}$.

Последица: Нека AB е дијаметар на кружница k, а γ е конвексен агол во рамнината со теме E чии краци минуваат низ точките A и B, соодветно. Тогаш:

(i) точката E лежи во надворешноста на кружницата k, ако и само ако γ е остар агол;
(ii) точката E лежи во внатрешноста на кружницата k, ако и само ако γ е тап агол;
(iii) точката E лежи на кружницата k, ако и само ако γ е прав агол.

2. Плоштини

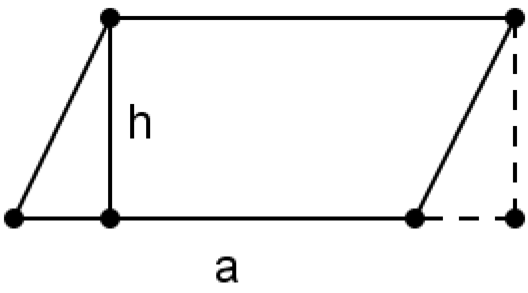
Како основно (и без доказ) ќе го земеме следното тврдење за плоштината на правоаголник.

Теорема: Плоштината на правоаголник со страни a и b изнесува ab.

Забелешка: Доказот излегува од рамките на вообичаеното „наивно“ поимање на поимот за плоштина на рамнинска фигура, и од тие причини го изоставуваме.

Теорема: Плоштината на паралелограм со страна a и соодветна висина h изнесува ah.

Доказ:



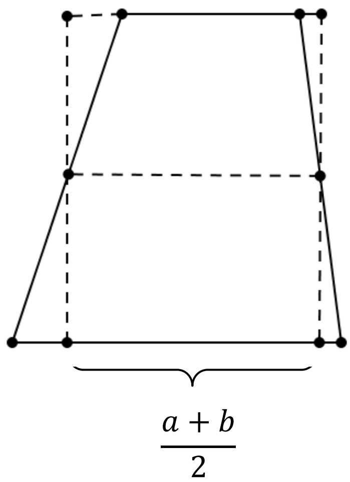
Од цртежот следува дека плоштината на паралелограмот е еднаква со плоштината на правоаголник со страни a и h.

Имајќи предвид дека секој паралелограм со повлекување на една дијагонала е поделен на два складни триаголници, од претходната теорема ја добиваме следната формула за плоштина на триаголник:

Последица: Плоштината на триаголник со страна a и соодветна висина h изнесува $\frac{ah}{2}$.

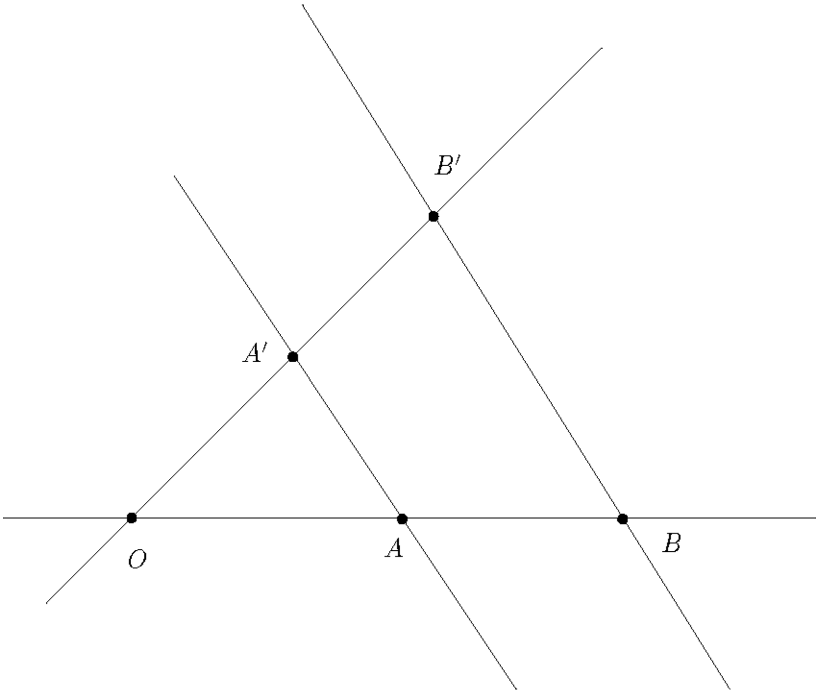
Теорема: Плоштината на трапез со основи a и b и висина h изнесува $\frac{a+b}{2}h$.

Доказ:

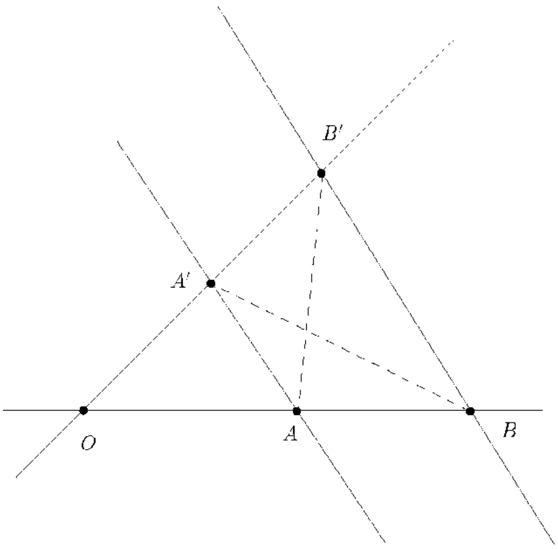


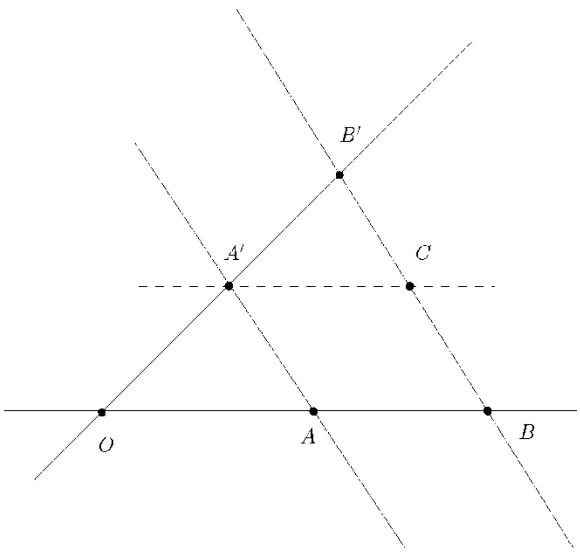
Од цртежот следува дека плоштината на трапезот е еднаква со плоштината на правоаголник со страни $\frac{a+b}{2}$ и h.

Теорема на Талес: (пропорционални отсечки) Нека краците на даден агол AOA' се пресечени од две паралелни прави AA' и BB'. Тогаш важи дека $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$.



Доказ: Да го докажеме најпрво равенството $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$. Од паралелноста на правите AA' и BB' следува дека $P_{ABA'} = P_{AB'A'}$ (цртеж лево). Оттука, $P_{OBA'} = P_{OAB'}$ односно $\frac{P_{OAA'}}{P_{OBA'}} = \frac{P_{OAA'}}{P_{OAB'}}$. Бидејќи триаголниците OAA' и OBA' имаат заедничка висина, според формулата за плоштина на триаголник, важи дека $\frac{P_{OAA'}}{P_{OBA'}} = \frac{OA}{OB}$. Аналогно заклучуваме дека $\frac{P_{OAA'}}{P_{OAB'}} = \frac{OA'}{OB'}$, што го потврдува равенството $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$.



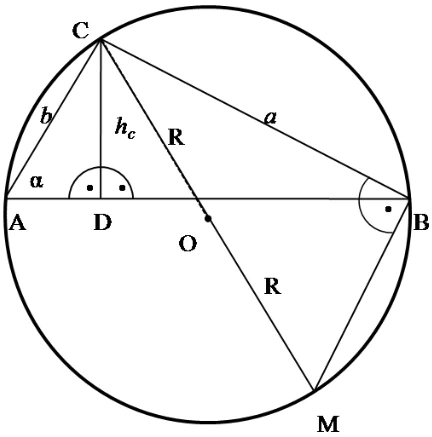


За да го докажеме равенството $\frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$, низ точката A' повлекуваме права паралелна на кракот OA. Нека повлечената права ја сече правата BB' во точка C (цртеж десно). Од паралелограмот $ABCA'$ следува дека $AA' = BC$. Според веќе докажаната пропорција (применета за $\measuredangle OB'B$ и паралелните прави $A'C$ и OB), $\frac{B'A'}{B'O} = \frac{B'C}{B'B} = \frac{BB'-AA'}{BB'} = 1 - \frac{AA'}{BB'}$. Оттука, $\frac{AA'}{BB'} = 1 - \frac{A'B'}{OB'} = \frac{OB'-A'B'}{OB'} = \frac{OA'}{OB'}$.

Теорема: Во секој триаголник радиусот R на опишаната кружница е еднаков на количникот од производот на трите страни a, b и c со четирикратната вредност на плоштината P на триаголникот, т.е.

$$R = \frac{abc}{4P}.$$

Доказ: Од $\measuredangle DAC = \measuredangle BMC$ (како периферни агли) следува дека $\Delta ADC \sim \Delta MBC$. Значи $h_c : b = a : 2R$, т.е. важи дека $2R = \frac{ab}{h_c}$. Од $P = \frac{ch_c}{2}$ добиваме дека $h_c = \frac{2P}{c}$. Оттука, следува посакуваното равенство $R = \frac{abc}{4P}$.



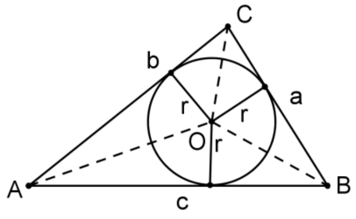
Теорема: Во секој триаголник, радиусот r на впишаната кружница е еднаков на количникот од плоштината P и полупериметарот s на триаголникот, т.е.

$$r = \frac{P}{s} \text{ каде што } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Доказ: Од цртежот имаме дека $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ABO} + P_{\Delta BCO} + P_{\Delta CAO}$.

Значи, $P = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{2}$, т.е. $P = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$.

Оттука, $r = \frac{P}{s}$.

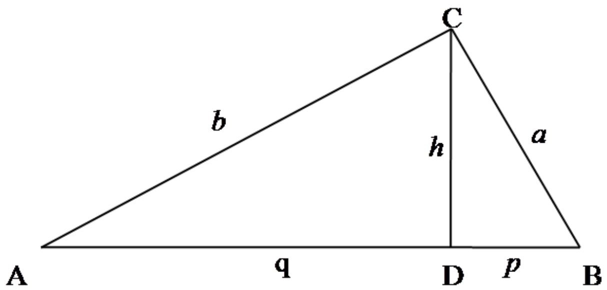


Забелешка: Формулите $R = \frac{abc}{4P}$ и $r = \frac{P}{s}$, во случај на рамностран триаголник со страна a добиваат облик $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ и $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

3. Теоремите на Евклид и Питагора

Теорема на Евклид: Во секој правоаголен триаголник со хипотенуза c (користејќи ги ознаките од цртежот) исполнети се следните три равенства:

$$a^2 = pc$$
$$b^2 = qc$$
$$h^2 = pq$$

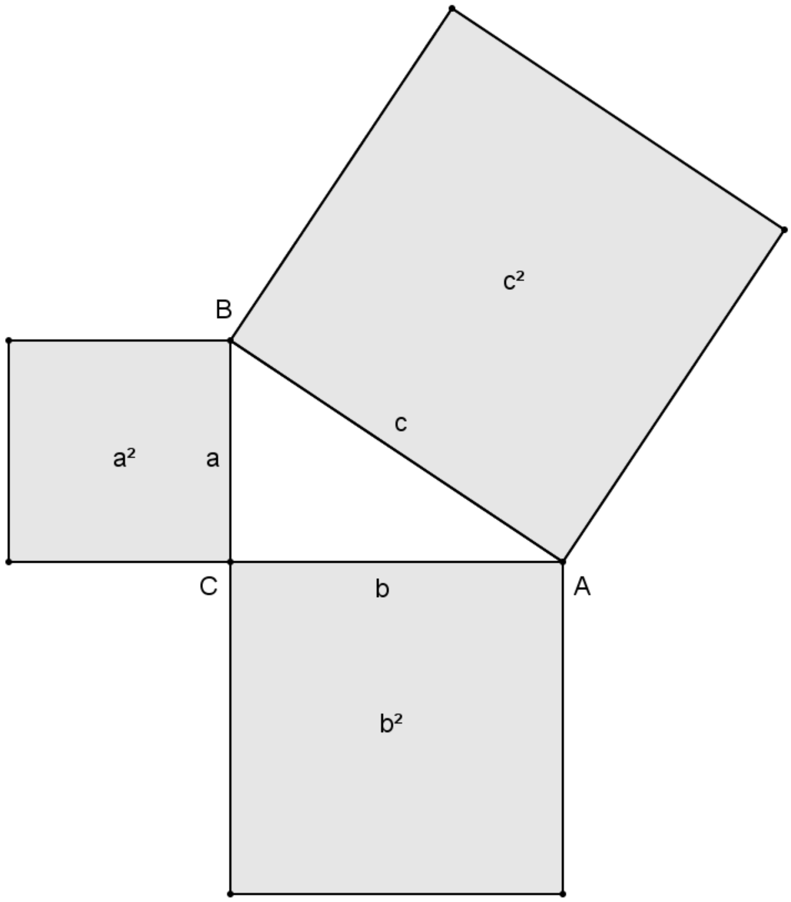


Доказ: Да забележиме дека ΔABC ~ ΔCBD и ΔABC ~ ΔACD. Оттука, имаме дека

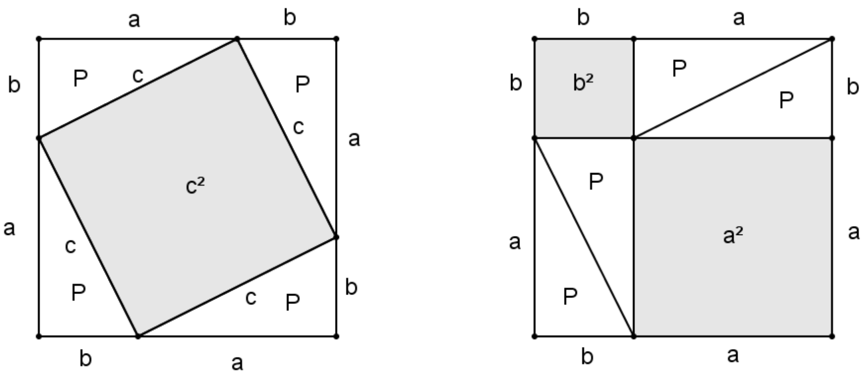
$$a : p = c : a = b : h \Rightarrow b : q = c : b = a : h$$
$$\Rightarrow a^2 = pc \text{ и } ah = pb \Rightarrow b^2 = qc \text{ и } bh = aq.$$

Множејќи ги равенствата $ah = pb$ и $bh = aq$, добиваме $ab \cdot h^2 = ab \cdot pq$.

Теорема на Питагора: Во секој правоаголен триаголник плоштината на квадратот над хипотенузата е еднаква на збирот на плоштините на квадратите над катетите.



Прв доказ: Доволно е да се воочат следните расекувања на квадрат со страна $a + b$:



Втор доказ: Нека ∢C е прав. Според теоремата на Евклид,

$$\begin{cases} a^2 = pc \\ b^2 = qc. \end{cases}$$

Оттука,
$a^2 + b^2 = pc + qc = (p+q)c = c^2.$

Обратна теорема на Питагора: Ако во триаголник со страни a, b и c важи равенството

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

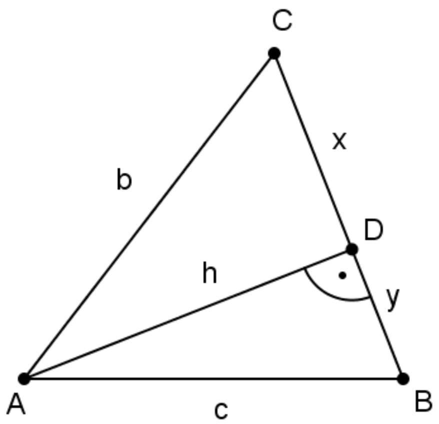
тогаш внатрешниот агол наспроти страната c е прав.

Доказ: Ќе го докажеме следното посилно тврдење: Нека ABC е триаголник со страни $a = BC, b = AC$ и $c = AB$. Важи:

(I) ако $\sphericalangle ACB < 90°$, тогаш $c^2 < a^2 + b^2$;

(II) ако $\sphericalangle ACB > 90°$, тогаш $c^2 > a^2 + b^2$.

Доказ на (I): Висината спуштена од кое било од темињата A и B е во внатрешноста



на триаголникот ABC (бидејќи ∢C < 90°).

Со ознаките од цртежот $(x = CD, y = BD)$, користејќи ја теоремата на Питагора, имаме:

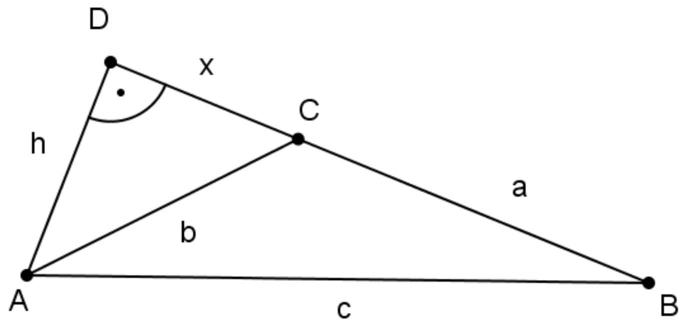
$$a^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$b^2 = h^2 + x^2$$

$$c^2 = h^2 + y^2.$$

Оттука, $a^2 + b^2 = c^2 + (2x^2 + 2xy) = c^2 + 2x(x+y) = c^2 + 2xa > c^2.$

Доказ на (II): Висината спуштена од кое било од темињата A и B е во надворешноста на триаголникот ABC (бидејќи $\sphericalangle C > 90°$).



Со ознаките од цртежот $(x = CD, y = BD)$, користејќи ја теоремата на Питагора, имаме:

$$a^2 = (y - x)^2 = y^2 - 2xy + x^2$$

$$b^2 = h^2 + x^2$$

$$c^2 = h^2 + y^2.$$

Оттука, $a^2 + b^2 = c^2 - (2xy - 2x^2) = c^2 - 2x(y - x) = c^2 - 2xa < c^2$.

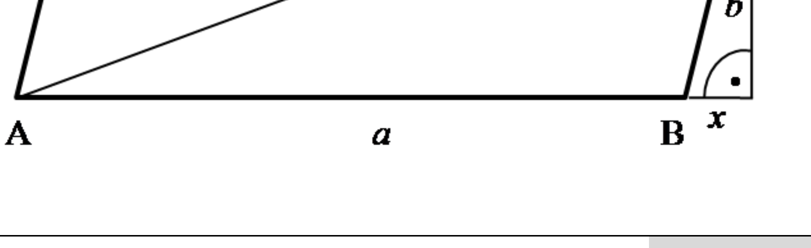
4. Две примени на теоремата на Питагора

Теорема: Кај секој паралелограм збирот на квадратите на дијагоналите е еднаков на удвоениот збир на квадратите на страните, т.е.

$$d_1{}^2 + d_2{}^2 = 2(a^2 + b^2).$$

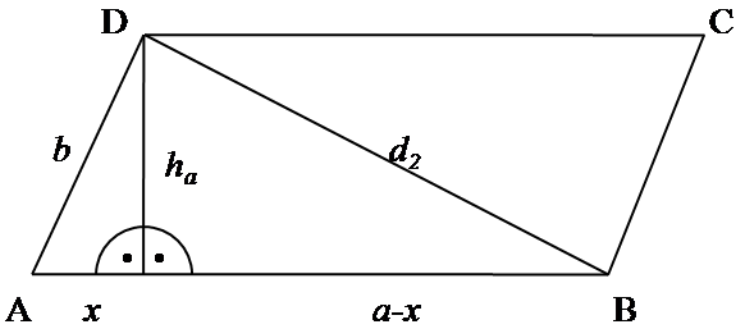
Доказ: Користејќи ги равенствата $d_1{}^2 = (a + x)^2 + h_a{}^2$ и $x^2 + h_a{}^2 = b^2$, добиваме

$$d_1{}^2 = (a + x)^2 + b^2 - x^2 \,. \qquad (1)$$



Користејќи ги равенствата ${d_2}^2 = (a-x)^2 + {h_a}^2$ и $x^2 + {h_a}^2 = b^2$, добиваме

$$ {d_2}^2 = (a-x)^2 + b^2 - x^2. \qquad (2)$$



Собирајќи ги (1) и (2), заклучуваме дека

$$ {d_1}^2 + {d_2}^2 = a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2,$$

т.е.

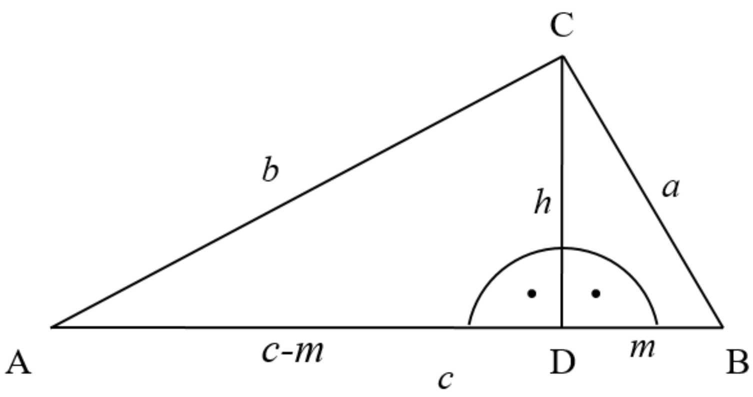
$$ {d_1}^2 + {d_2}^2 = 2(a^2 + b^2).$$

<u>Теорема на Херон:</u> За плоштината на триаголник со страни a, b и c важи формулата

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ каде што } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

<u>Доказ:</u> Без губење на општоста, нека $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ се остри. Висината спуштена од темето C е во внатрешноста на триаголникот ABC. Со ознаките од долниот цртеж имаме дека

$$ {h_c}^2 = a^2 - m^2 \text{ и } {h_c}^2 = b^2 - (c-m)^2.$$



Изедначувајќи ги десните страни,

$$a^2 - m^2 = b^2 - c^2 + 2cm - m^2$$

добиваме дека за m важи равенството $m = \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$.

Значи, ${h_c}^2 = a^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2 = \left(a - \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)\left(a + \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)$

$$= \frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2c} \cdot \frac{2ac+a^2+c^2-b^2}{2c} = \frac{b^2-(a-c)^2}{2c} \cdot \frac{(a+c)^2-b^2}{2c}$$

$$= \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+b+c)}{4c^2}.$$

Оттука $P^2 = \frac{c^2{h_c}^2}{4} = \frac{c^2(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+b+c)}{16c^2}$

$$= \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+b+c)}{16}.$$

Од $a + b + c = 2s$ следува дека:

$$b + c - a = 2(s - a),$$

$$a + c - b = 2(s - b),$$

$$a + b - c = 2(s - c).$$

Со тоа ја докажавме Хероновата формула $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Забелешка: Формулата $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, во случај на рамностран триаголник со страна a, добива облик $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

ТЕМА 3

Елементарна веројатност

Во оваа тема се воведени основните поими од т.н. дискретна класична веројатност. Почетното поглавје претставува елементарен вовед во комбинаторика преку запознавање со поимите за број на елементи на конечно множество и принципите за пребројување на збир и производ. Во второто поглавје накусо се разгледани основните поими во врска со конечен веројатносен простор и класична веројатност. Последното поглавје се однесува на поимите за независност на настани и условна веројатност.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

1. Комбинаторно броење

Да се потсетиме најпрво на три основни поими за пресликување f: A→ B:

- f е инјекција ⇔ не постојат $a_1, a_2 \in$ A, така што $a_1 \neq a_2$ и $f(a_1) = f(a_2)$,
- f е сурјекција ⇔ за секој $b \in$ B, постои $a \in$ A, така што $f(a) = b$,
- f е биекција ⇔ f е инјекција и f е сурјекција.

Со помош на последниот поим може да објасниме што се подразбира под конечно множество.

Дефиниција: За празното множество со ознака Ø велиме дека има 0 елементи. Тоа се означува |Ø|=0. За непразно множество S велиме дека има n елементи (за дадено $n \in \mathbb{N}$), доколку постои биекција f: {1, 2, … , n}→ S. Во тој случај пишуваме |S|=n.
За секое од опишаните множества велиме дека е *конечно*.

Забелешка: Постојат и т.н. *бесконечни множества*, т.е. множества кои не се конечни. Множеството $\mathbb{N}$ од сите природни броеви, множеството $\mathbb{Z}$ од сите цели броеви, множеството $\mathbb{Q}$ од сите дропки (т.е. рационални броеви), множеството $\mathbb{R}$ од сите реални броеви се само неколку примери на бесконечни множества.

Комбинаторното броење, како своја основна проблематика го има определувањето на бројот |S| за дадено конечно множество S.

Два основни комбинаторни принципи се следните:

(I) Принцип на сума

Под *партиција* на дадено множество А се подразбира фамилијата $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ од попарно дисјунктни множества B_i (i = 1, 2, … , m), чија унија е А.

Принципот на сума: Ако $B_1, B_2, \dots, B_m$ е партиција на конечно множество А, тогаш

$$|A| = |B_1| + |B_2| + \dots + |B_m|.$$

Пример 1: Во една кутија со топчиња има само бели, црвени и црни топчиња Ако има вкупно 4 бели, 2 црвени и 5 црни топчиња, тогаш колку топчиња има во кутијата?

Решение: Нека А е множеството топчиња во кутијата, а B_1, B_2 и B_3 се, редоследно, подмножествата бели, црвени и црни топчиња. Тогаш, $\{B_1, B_2, B_3\}$ е партиција на А, па затоа $|A| = |B_1| + |B_2| + |B_3| = 4 + 2 + 5 = 11$.

(II) Принцип на производ

Нека Т е множество со особина секој негов елемент да може да се „избере“ во k чекори $S_1, S_2, \dots, S_k$ така што за секој $\mathrm{i} = 1, 2, \dots, k$, во i-тиот чекор S_i има точно r_i можни „избори“, независно од тоа како се реализирани (какви избори се направени во) чекорите $S_1, S_2, \dots, S_{\mathrm{i}-1}$.

Принципот на производ: Во тој случај $|\mathrm{T}| = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_k$.

Пример 2: Марта сака во текот на идната седмица еден ден за ручек да подготви риба, еден ден да подготви леќа и еден ден ориз. На колку начини Марта може да го изведе тоа?

Решение: Нека

S_1: да се избере во кој ден од седмицата ќе има риба,
S_2: да се избере во кој ден од седмицата ќе има леќа,
S_3: да се избере во кој ден од седмицата ќе има ориз.

Тогаш, $r_1 = 7$, $r_2 = 6$ (бидејќи еден ден е веќе „резервиран“ за риба), а $r_3 = 5$ (бидејќи два дена се претходно „резервирани“). Според принципот на производ, бројот на можности за домаќинката Марта е $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

Наједноставна примена на принципот на производ е формулата

$$|\mathrm{A} \times \mathrm{B}| = |\mathrm{A}| \cdot |\mathrm{B}|,$$

која го определува бројот на елементи на Декартовиот производ на две конечни множества.

Пример 3: На колку начини може да се наредат (еден до друг) броевите 1, 2 и 3? Со други зборови, на колку начини може да се формира листа со должина 3 од броевите 1, 2 и 3?

Решение: Да означиме три празни места: ___ ___ ___ . За $\mathrm{i} = 1, 2, 3$, нека

S_i: пополнување на i-тото празно место (од лево кон десно)

Тогаш, $r_1 = 3$, $r_2 = 2$ и $r_3 = 1$, од каде што следува дека има вкупно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ редења.

Дефиниција: За $n \in \mathbb{N}$, со $n!$ (се чита: n факториел) се означува производот на првите n природни броеви, т.е.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Во овој контекст, $0!$ го означува бројот 1.

Под *пермутација* на конечно множество S се подразбира биекција $f\colon \mathrm{S} \to \mathrm{S}$.

Пример 4: За $n \in \mathbb{N}$, нека $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Секоја пермутација $f\colon S \to S$ може да се претстави како листа со должина n составена од броевите 1, 2, ... , n. Имено, тоа е листата $f(1)\, f(2) \ldots f(n)$.

Претходниот пример сугерира дека:

бројот на пермутации на множество со n елементи изнесува $n!$

Ќе докажеме малку поопшто тврдење. За дадени множество S и $k \in \mathbb{N}_0$, под k - *варијација* на S се подразбира инјекција $f\colon \{1,2, \ldots, n\} \to S$. Секоја k - варијација f може да се поистовети со следната листа со должина k:

$$f(1)\, f(2) \ldots f(k).$$

Оттука, користејќи го принципот на производ и размислувајќи аналогно како во примерот 3, се добива дека:

бројот на k - варијации на множество со n елементи изнесува: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

Забелешка: Вкупниот број на k - варијации на множество со n елементи вообичаено се означува V_n^k. Горниот производ може да се запише поконцизно во облик $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Забелешка: Пермутација на множество со n елементи не е ништо друго туку една негова n - варијација. Вкупниот број на пермутациии на множество со n елементи изнесува $V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{(0)!} = \frac{n!}{1} = n!$

За дадени множество S и $k \in \mathbb{N}_0$, под k - *комбинација* на S се подразбира произволно подмножество од S со k елементи. Вкупниот број на k - комбинации на множество со n елементи вообичаено се означува со C_n^k.

Тврдење: За цели броеви n и k со $0 \leq k \leq n$ важи:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Доказ: Како што веќе забележавме, вкупниот број на k- варијации на множеството $\{1,\ 2,\ \dots\ ,\ n\}$ изнесува $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Да ги изброиме поинаку. Имено, секоја k - варијација може да се добие како пермутација на точно една k - комбинација. Од принципот на производ следува дека $V_n^k = C_n^k \cdot k!$. Оттука, $C_n^k = \frac{V_n^k}{k!}$.

Да го илустрираме горниот доказ со еден пример.

Пример 5: Запишете ги сите 2 - варијации и 2 - комбинации на множеството $S\ =\ \{1, 2, 3, 4\}$.

Решение:	2 - варијации	2 - комбинации
	12 ; 21	{1,2}
	13 ; 31	{1,3}
	14 ; 41	{1,4}
	23 ; 32	{2,3}
	24 ; 42	{2,4}
	34 ; 43	{3,4}

Овој параграф ќе го завршиме со еден подолг пример за популарната игра со карти наречена покер.

Пример 6: Покер се игра со стандарден шпил од 52 карти: во секоја од 13 вредности (2, 3, ... , 10, J, Q, K, A) има по 4 карти (една во секоја од четирите „бои" ♥, ♦, ♠, ♣). Во една рунда покер секој играч добива 5 карти т.н. „рака". Притоа, има $C_{52}^5 = 2598960$ можни „раце" во покер и сите (доколку шпилот е добро промешан) се еднакво веројатни (се добиваат со еднаква шанса од $1{:}\ 2598960$).

Во покер има неколку карактеристични типови на „рака": 2 пара, 3 исти, скала, боја, фул хаус, покер,ројал флеш. Интуитивно е оправдано да сметаме дека шансите за добивање рака од одреден тип се бројот $\#$ на раце од тој тип поделен со C_{52}^5. Од друга страна, бројот на раце од одреден тип се одредува со помош на комбинаторно броење.

а) 2 пара = по две карти од две вредности и преостанатата карта во трета вредност

$$\#\,(2\ \text{пара}) = C_{13}^{2} C_{4}^{2} C_{4}^{2} C_{44}^{1} = 123552.$$

Имено, ги бираме двете вредности на C_{13}^{2} начини, двете карти во секој пар на $C_{4}^{2} C_{4}^{2}$ начини, а преостанатата карта на C_{44}^{1} начини $(44 = 52 - 8)$. Значи, веројатноста (шансите) да се добие рака 2 пара во една рунда изнесува $\frac{123552}{2598960}$, т.е. приближно 0,047390.

б) 3 исти = три карти од една вредност и преостанатите карти во две други различни вредности

$$\#\,(3\ \text{исти}) = C_{13}^{1} C_{4}^{3} C_{12}^{2} C_{4}^{1} C_{4}^{1} = 54912.$$

Имено, ја бираме вредноста на три карти на C_{13}^{1} начини. Потоа, бираме три карти во таа вредност на C_{4}^{3} начини, бираме две други вредности на C_{12}^{2} начини, и конечно бираме по една карта во секоја од тие две вредности на $C_{4}^{1} C_{4}^{1}$ начини. Значи, веројатноста да се добие рака 3 исти во една рунда изнесува $\frac{54912}{2598960}$, т.е. приближно 0,021128.

в) Скала = по една карта од пет последователни вредности, при што вредноста А може да се смета за најмала (пред 2) или најголема (после К)

$$\#\,(\text{скала}) = 10 \cdot 4^{5} = 10240.$$

Имено, секоја скала започнува со една од следните 10 вредности: А, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; тој избор го правиме на 10 начини. Потоа, за секоја од вредностите кои сочинуваат скала има 4 карти (по една во секоја боја) и тој избор го правиме на $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ начини. Значи, веројатноста да се добие рака скала во една рунда изнесува $\frac{10240}{2598960}$, т.е. приближно 0,003940.

г) Боја = сите пет карти од раката се во иста боја

$$\#\,(\text{боја}) = 4 \cdot C_{13}^{5} = 5148$$

Имено, една од четирите бои бираме на 4 начини, а потоа од избраната боја бираме 5 карти на C_{13}^{5} начини. Значи, веројатноста да се добие рака боја во една рунда изнесува $\frac{5148}{2598960}$, т.е. приближно 0,001981.

д) Фул хаус = три карти од една вредност и преостанатите две карти во друга вредност

$$\#(\text{фул хаус}) = 13 \cdot 12 \cdot C_4^3 \cdot C_4^2 = 3744.$$

Имено, вредноста на три од картите ја бираме на 13 начини, и трите карти со таа вредност ги бираме на C_4^3 начини. Потоа, вредноста на преостанатите две карти ја бираме на $12 = 13 - 1$ начини, а тие две карти ги бираме на C_4^2 начини (во избраната вредност). Веројатноста да се добие рака фул хаус во една рунда изнесува $\frac{3744}{2598960}$, т.е. приближно 0,001441.

ѓ) Покер = четири карти од иста вредност

$$\#(\text{покер}) = C_{13}^1 \cdot C_{48}^1 = 624.$$

Веројатноста да се добие рака покер во една рунда изнесува $\frac{624}{2598960}$, т.е. приближно 0,000240.

е) Ројал флеш = скала & боја

$$\#(\text{ројал флеш}) = 10 \cdot 4 = 40.$$

Веројатноста да се добие рака ројал флеш во една рунда изнесува $\frac{40}{2598960}$, т.е. приближно 0,000015.

Примерот ќе го завршиме со едно прашање:

Зошто во играта покер типовите раце се рангирани на следниот начин

2 пара $\prec$ 3 исти $\prec$ скала $\prec$ боја $\prec$ фул хаус $\prec$ покер $\prec$ ројал флеш?

2. Конечен веројатносен простор

Пример 1: Во едно познато телевизиско шоу од 70-тите години на минатиот век, значајна награда е поставена позади една од три затворени врати. Од натпреварувачот се бара да одбере врата, а потоа што водителот на шоуто отвора една од преостанатите две врати и вели: „Како што можеш да видиш, наградата не е позади оваа врата. Дали сакаш да останеш на твојот првичен избор или сакаш да го промениш изборот?“.
Со други зборови, доколку натпреварувачот првично избрал погрешна врата (врата зад која не се крие наградата), тогаш водителот ја отвора другата погрешна врата. Ако пак, натпреварувачот првично ја избрал вистинската врата (позади која се крие наградата), тогаш водителот му отвора една од погрешните врати.
Која стратегија е подобра за натпреварувачот, да го задржи или да го промени првичниот избор?

Решение: Подобра стратегија за натпреварувачот е да го промени првичниот избор. Имено, доколку тој останува на првичниот избор на врата, тоа значи дека шансите (веројатноста) да ја освои наградата изнесуваат $\frac{1}{3}$ (една од три врати).
Од друга страна, ако натпреварувачот го промени првичниот избор, тогаш шансите да ја освои наградата се двојно поголеми, т.е. веројатноста изнесува $\frac{2}{3}$. Зошто?

Пример 2: Кои се шансите дека при едно фрлање на две хомогени коцки за игра ќе фрлиме „дупли“, т.е. на горната страна на двете коцки ќе се појави ист број?

Решение: За потребите на примеров да ги разликуваме коцките, т.е. да разгледаме (условно речено) прва и втора коцка. При фрлање на двете коцки има 36 исходи со подеднакви шанси (еднак787веројатни исходи): тоа се парови (x, y) каде што x е бројот кој паднал на горната страна од првата коцка, а y е бројот кој паднал на горната страна од втората коцка. Во точно 6 од овие 36 исходи на двете коцки паднал ист број. Оттаму, шансите (веројатноста) да се фрлат „дупли“ изнесува $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Дефиниција: Под *конечен веројатносен простор* се подразбира конечно множество S на кое му е придружена функција p дефинирана на множеството од сите подмножества на S (наречени *настани*) со следните особини:

(i) за секое $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{S}$, $0 \leq p(\mathrm{A}) \leq 1$,

(ii) $p(\mathrm{S}) = 1$,

(iii) за секои дисјунктни подмножества $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subseteq \mathrm{S}$ важи дека $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$.

Функцијата p се нарекува *веројатност* на *просторот* (S, p), а секое едноеелементно подмножество од S се нарекува *елементарен настан*. Така, S е *множеството од елементарни настани*.

Нека $\{\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \dots, \mathrm{B}_k\}$ е партиција на настан $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{S}$, т.е. секој елемент од A се јавува во точно едно множество $\mathrm{B_i}$. Според особината (iii) од горната дефиниција, важи дека

$$p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{B}_1) + p(\mathrm{B}_2) + \dots + p(\mathrm{B}_k).$$

Специјално, ако $k = |\mathrm{A}|$ и секое $\mathrm{B_i}$ е едноелементно, тогаш веројатноста $p(\mathrm{A})$ е еднаква на збирот од веројатностите на елементите (елементарните настани) кои ги содржи A.

Тврдење: (Елементарни особини) Нека A и B се настани од конечен веројатносен простор (S, p). Тогаш:

(i) $p(\mathrm{A}^c) = 1 - p(\mathrm{A})$,

(ii) $p(\emptyset) = 0$,

(iii) $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

Доказ: (i) $p(\mathrm{A}^c) + p(\mathrm{A}) \overset{\text{(iii)}}{=} p(\mathrm{A}^c \cup \mathrm{A}) = p(\mathrm{S}) = 1$.

(ii) Следува од (i) за A=S.

(iii) Една партиција на $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ е $\{\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}, \mathrm{A} \cap \mathrm{B}, \mathrm{B} \backslash \mathrm{A}\}$. Да забележиме и дека A има партиција $\{\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}, \mathrm{A} \cap \mathrm{B}\}$, а B има партиција $\{\mathrm{B} \backslash \mathrm{A}, \mathrm{A} \cap \mathrm{B}\}$. Оттука, според (iii):

$$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}) + p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + p(\mathrm{B} \backslash \mathrm{A})$$

$$p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}) + p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

$$p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B} \backslash \mathrm{A}) + p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}),$$

што повлекува дека

$$p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}).$$

Забелешка: За настанот A^c (релативниот комплемент на A) велиме дека е *спротивен настан* на настанот A. Претходното тврдење под (i) кажува дека веројатностите на спротивните настани се комплементарни, т.е. во збир даваат 1. Честопати, веројатноста на даден настан се наоѓа пресметувајќи ја веројатноста на нему спротивниот настан.

Пример 3: Која е веројатноста при едно фрлање на две хомогени коцки за игра да не фрлиме „дупли“?

Решение: Како што веќе заклучивме од претходниот пример, веројатноста на настанот

A: паднале „дупли“

изнесува $p(\mathrm{A}) = \frac{1}{6}$. Оттука, $p(\mathrm{A}^c) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Пример 4: Која е веројатноста при едно фрлање на две хомогени коцки за игра да падне барем една шестка?

Решение: Да го означиме со A настанот чија веројатност се бара. Тогаш,

A^c: на ниту една од коцките на паднала шестка.

Поедноставно е да се најде веројатноста $p(\mathrm{A}^c)$. Имено, како што веќе споменавме во примерот 2 соодветниот веројатносен простор се состои од множеството елементарни настани $\mathrm{S} = \{(x, y): x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$, и секој елементарен настан има веројатност $p = \frac{1}{|\mathrm{S}|} = \frac{1}{36}$. Бидејќи $\mathrm{A}^c = \{(x, y): x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ важи дека $p(\mathrm{A}^c) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\mathrm{S}|} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 6} = \frac{25}{36}$. Заклучуваме дека $p(\mathrm{A}) = 1 - p(\mathrm{A}^c) = \frac{11}{36}$.

Како што веќе напоменавме, во конечен веројатносен простор (S,p), едноелементните подмножества од S имаат посебно име: се нарекуваат елементарни настани. Така, секој настан A е дисјунктна унија од елементарните настани кои ги содржи, а веројатноста $p(\mathrm{A})$ е збир од соодветните „елементарни веројатности“.

Во претходните три примери, веројатностите на елементарните настани т.н. *елементарни веројатности* се меѓусебно еднакви: имено, секоја од нив е $\frac{1}{|\mathrm{S}|}$. Од тие причини, во секој од разгледаните примери, за произволен настан A важи дека $p(\mathrm{A}) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\mathrm{S}|}$.

Дефиниција: За конечен веројатносен простор (S,p), во кој секој елементарен настан $\{w\}$ има веројатност $p(\{w\}) = \frac{1}{|\mathrm{S}|}$, велиме дека е *простор со класична веројатност*.

Еве уште неколку примери за простори со класична веројатност:

Пример 5: Која е веројатноста дека при едно фрлање на две хомогени парички, тие ќе паднат со различни страни: едната со писмо, а другата со грб?

Решение: Соодветниот веројатносен простор гласи: S = {(п,п), (п,г), (г,п), (г,г)} и $p(\{\text{п,п}\}) = p(\{\text{п,г}\}) = p(\{\text{г,п}\}) = p(\{\text{г,г}\}) = \frac{1}{4}$. Имено, повторно (формално) разликуваме прва и втора паричка и за елементарен настан (x, y) каде што $x, y \in \{\text{п,г}\}$, $x = \text{п}$ означува дека на првата паричка паднало писмо, а $x = \text{г}$ означува дека на првата паричка паднал грб итн. Претпоставката дека станува збор за класична веројатност, т.е. дека сите елементарни настани се еднакввоверојатни ја оправдуваме со придавката „хомогени". Настанот А, кој е споменат во примерот, е А = {(п,г),(г,п)} и оттука $p(\text{A}) = \frac{|\text{A}|}{|\text{S}|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Пример 6: Цифрите 1, 2, 3, 4, 5 се случајно наредени во листа (со должина 5). Која е веројатноста дека 1 стои точно пред 2?

Решение: Соодветниот веројатносен простор (S,p) се состои од множеството пермутации на $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ и веројатноста p е класична. Како што споменавме во претходното поглавие, $|S| = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Настанот А се состои од оние пермутации во кои 1 стои точно пред 2 и $p(\text{A}) = \frac{|\text{A}|}{120}$.
Останува да го одредиме бројот на елементи на А, т.е. да одредиме колку е |А|. Можеби згодно е да размислуваме на следниот начин: наместо пермутаци на $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ да набљудуваме пермутации на четириелементното множество $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Секоја таква пермутација е точно една од ние кои сакаме да ги преброиме. Значи, $|\text{A}| = 4! = 24$ и $p(\text{A}) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$.

Пример 7: Од стандарден шпил со 52 карти се влечат 3 карти. Колкава е веројатноста меѓу извлечените карти да има:
а) точно еден ас,
б) барем еден ас,
в) барем две црвени карти.

Решение: Соодветниот веројатносен простор (S,p) е простор со класична веројатност кој се состои од сите 3-комбинации на множеството карти, т.е. $|\text{S}| = C_{52}^3$.

а) Нека А е опишаниот настан. Тогаш, $|\text{A}| = C_4^1 \cdot C_{48}^2$, па оттука, $p(\text{A}) = \frac{C_4^1 \cdot C_{48}^2}{C_{52}^3}$.

б) Нека B е опишаниот настан. Тогаш, $|B^c| = C_{48}^3$, па оттука, $p(B) = 1 - p(B^c) =$

$= 1 - \frac{C_{48}^3}{C_{52}^3}$.

в) Нека C е опишаниот настан и {C2, C3}формираат партиција на C каде што

$$C_i\text{: точно i црвени карти, } i = 2, 3.$$

Тогаш, $p(C) = p(C_2) + p(C_3) = \frac{|C_2|}{C_{52}^3} + \frac{|C_3|}{C_{52}^3} = \frac{C_{26}^2 \cdot C_{26}^1}{C_{52}^3} + \frac{C_{26}^3}{C_{52}^3}$.

Пример 8: Се запишува случаен трицифрен број. Колкава е веројатноста дека бројот е делив со 2 или со 5 (т.е. со барем еден од броевите 2 и 5)?

Решение: Соодветниот веројатносен простор (S,p) се состои од множеството $S = \{x: x$ е трицифрен природен број$\}$ и веројатноста p е класична. Нека A и B се настаните

A: бројот е делив со 2
B: бројот е делив со 5.

Настанот чија веројатност се бара во примерот е $A \cup B$. Веќе докажавме дека важи $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, па затоа останува да забележиме дека:

$$p(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{450}{900} = \frac{1}{2},\ p(B) = \frac{|B|}{|S|} = \frac{180}{900} = \frac{1}{5} \text{ и } p(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|S|} = \frac{90}{900} = \frac{1}{10}.$$

Оттука, $p(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = 0{,}6.$

Пример 9: Колкава е веројатноста во случајно избрана група од n луѓе, барем двајца да имаат ист роденден?

Решение: Работите ќе ги поедноставиме, т.е. ќе игнорираме родендени на 29 февруари. Соодветниот веројатносен простор е (S,p) каде што $S = \underbrace{\{1, 2, \ldots, 365\} \times \ldots \times \{1, 2, \ldots, 365\}}_{k}$ и веројатноста p е класична. Така, $|S| = 365^k$.
Нека A е настанот чија веројатност ја бараме. Тогаш A^c се состои од сите k-варијации над множеството $\{1, 2, \ldots, 365\}$, што повлекува дека

$$p(A) = 1 - p(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|S|} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-k+1)}{365^k}.$$

Во следната табела е дадена $p(A)$ за неколку конкретни вредности на k.

k	10	20	23	30	40	50
$p(A)$	0,1169	0,4115	0,5073	0,7064	0,8912	0,9704

Овие резултати можеби ѝ противречат на нашата интуиција: имено, доволно е групата да се состои од барем 23 луѓе за веројатноста дека барем двајца од нив да имаат ист роденден да надминува $\frac{1}{2}$.

3. Условна веројатност. Независност на настани

Дефиниција: Нека B е настан во конечен веројатносен простор (S,p) за кој $p(B) > 0$. Тогаш, за секој настан A од истиот веројатносен простор дефинираме *условна веројатност* $p_B(A)$ на A, при услов B со:

$$p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}.$$

Пример 1: Хомогена паричка се фрла три пати. Ако при првото фрлање паднало писмо, тогаш која е веројатноста дека вкупно паднале барем две писма?

Решение: Соодветниот веројатносен простор се состои од множеството елементарни настани S = {ппп,ппг,пгп,гпп,пгг,гпг,ггп,ггг} и веројатноста p е класична. Така, секој елементарен настан има веројатност $\frac{1}{|S|} = \frac{1}{8}$. Условот B е настанот

B: при првото фрлање паднало писмо,

односно B = {ппп,ппг,пгп,пгг}, чија веројатност изнесува $p(B) = \frac{1}{2}$.

Настанот A: вкупно паднале барем две писма, е подмножеството
A = {ппп,ппг,пгп,гпп}. Важи дека $p(A) = \frac{1}{2}$, $A \cap B$={ппп,ппг,пгп} и $p(A \cap B) = \frac{3}{8}$.

Оттука, $p_B(A) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$.

Пример 2: Хомогена паричка се фрла три пати. Ако паднало барем едно писмо, тогаш која е веројатноста дека вкупно паднале барем две писма?

Решение: Веројатносниот простор е ист како во претходниот пример. Условот B' е настанот

B': паднало барем едно писмо,

односно B'=S\{ггг}, чија веројатност изнесува $p(B') = \frac{7}{8}$.

Настанот A е како во претходниот пример. Бидејќи $A \cap B' = A$, имаме дека $p(A\cap B') = \frac{1}{2}$. Оттука, $p_{B'}(A) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{8}} = \frac{4}{7}$.

Пример 3: Во една кутија има 3 бели и 3 црни топчиња. Од кутијата случајно се извлекуваат две топчиња, едно по друго, без враќање. Која е веројатноста дека двете извлечени топчиња се бели?

Решение: Соодветниот веројатносен простор се состои од множеството елементарни настани S = {бб,бц,цб,цц}, но веројатноста веќе не е класична! Имено, да ги разгледаме настаните:

А: во првото извлекување е извлечено бело топче,
В: во второто извлекување е извлечено бело топче.

$p(\mathrm{A}) = \frac{3}{6}$, $p(\mathrm{A}^c) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$.
$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{2}{5}$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}^c) = \frac{3}{5}$, $p_{\mathrm{A}^c}(\mathrm{B}) = \frac{3}{5}$, $p_{\mathrm{A}^c}(\mathrm{B}^c) = \frac{2}{5}$.

Така, за елементарните веројатности имаме:

$$p(\{\text{бб}\}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \cdot p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5},$$

$$p(\{\text{бц}\}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \cdot p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10},$$

$$p(\{\text{цб}\}) = p(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}^c) \cdot p_{\mathrm{A}^c}(\mathrm{B}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10},$$

$$p(\{\text{цц}\}) = p(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{B}^c) = p(\mathrm{A}^c) \cdot p_{\mathrm{A}^c}(\mathrm{B}^c) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Овој пример илустрира дека понекогаш условната веројатност е едноставна за пресметување, а дефинирачката формула $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}$ се користи во облик на производ $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{B}) \cdot p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$. Во овој облик се нарекува *формула за множење на веројатности*.

Дефиниција: За два настана А и В во ист веројатносен простор велиме дека се *независни* доколку важи дека

$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \cdot p(\mathrm{B}).$$

Во спротивно велиме дека А и В се *зависни настани*.

Забелешка: Идејата позади оваа дефиниција се состои од следното: ако $p(\mathrm{B}) > 0$, тогаш А и В се независни настани само доколку $p(\mathrm{A}) = p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$, т.е. кога веројатноста настанот А „не зависи“ од исполнувањето (или неисполнувањето) на настанот В.

Пример 4: Од стандарден шпил со 52 карти случајно се извлекува една карта. Дали се независни настаните:

A: извлечената карта е ас,
B: извлечената карта има боја лист?

Решение: Да забележиме дека

$$p(\mathrm{A}) = \frac{C_4^1}{C_{52}^1} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13},$$

$$p(\mathrm{B}) = \frac{C_{13}^1}{C_{52}^1} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4},$$

$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{C_{52}^1} = \frac{1}{52}.$$

Значи, $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \cdot p(\mathrm{B})$, т.е. A и B се независни настани.

Пример 5: Хомогена коцка за игра се фрла два пати. Дали се независни настаните:

A: при првото фрлање паднал некој од броевите 1, 2 и 5
B: збирот на паднатите броеви е еднаков на 9

Решение: Да забележиме дека

$$p(\mathrm{A}) = \frac{3 \cdot 6}{36} = \frac{1}{2}$$

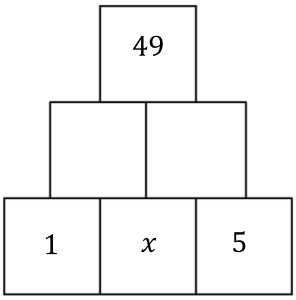
$$p(\mathrm{B}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

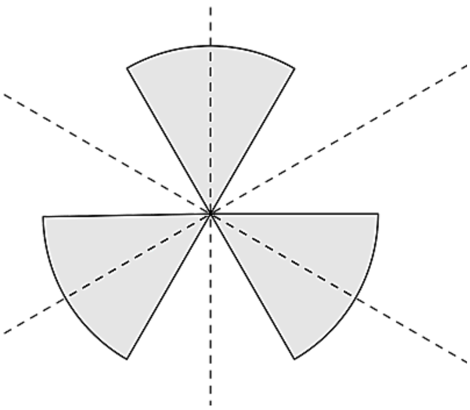
$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{36}$$

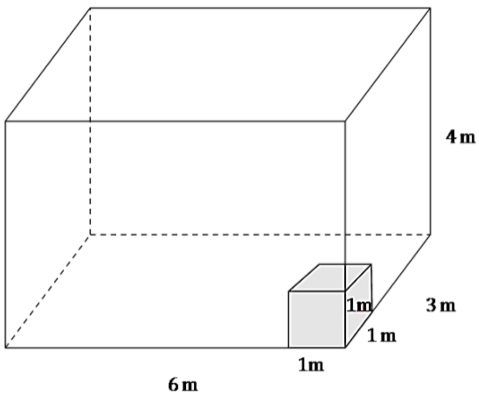
Значи, $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \neq p(\mathrm{A}) \cdot p(\mathrm{B})$, т.е. A и B се зависни настани.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

Во овој дел се дадени задачи за вежбање за учениците од 7, 8 и 9 одделение, како што ќе биде назначено. Овие задачи се наменети за над 70 % од учениците и за истите има одговори и решенија. Дел од учениците ќе можат да ги решаваат и задачите од повисоките одделенија.







ЗАДАЧИ ЗА VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Одреди ја вредноста на бројниот израз $2+\left(2-1\frac{1}{3}\right)$.

2. Определи $\frac{4}{3}$ од 12:

А. 4
Б. $\frac{12}{3}$
В.16
Г. друг одговор

3. Одреди го бројот чијашто четвртина е 16:

А. 4
Б. 64
В.32
Г. друг одговор

4. Колку изнесува периметарот на квадрат со страна $2\frac{1}{4}$ cm?

5. Плоштината на еден правоаголник е $\frac{5}{2}$ m^2. Ако едната негова страна е $\frac{1}{2}$ m, должината на другата негова страна е:

А. 5m
Б. 2 m
В. 4 m
Г. друг одговор

6. Во едно одделение од 32 ученици, 8 ученици се одлични. Колку ученици во проценти не се одлични?

А. 25 %.
Б. 16 %.
В. 75 %.
Г. Друг одговор.

7. Нина и Јована треба да поделат 2400 денари во соодност 1 : 3. Колку денари добила Јована?

8. Вредноста на бројниот израз $144 + 4 \cdot (12 - 12 : 4)$ е:

А. 144
Б. 180
В. 204
Г. друг одговор

9. Кој број треба да се одземе од бројот –9,7 за да се добие –4,7?

10. Кој број ќе се добие ако збирот на броевите –18,3 и –6,7 се подели со +5?

А. –5.
Б. 5.
В.- 4.
Г. Друг одговор

11. Дарко патува на одмор. Ако патот е долг 540 km, а досега изминал 40 % од патот, уште колку km му останале?

А. 216 km.
Б. 324 km.
В. 270 km.
Г. Друг одговор.

12. Изразот $2 - \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)$ има вредност:

13. Ако $a = –3$, колку е вредноста на изразот $24 : (5 - a)$?

А. 6.
Б. 12.
В. –8.
Г. Друг одговор.

14. Решение на равенката $x + (-29) = -3$ е бројот:

А. –32
Б. –26
В. 26
Г. друг одговор

15. Ако едно јаболко чини А денари, а една круша В денари, со кој израз може да пресметаме колку денари ни се потребни за да купиме 7 јаболка и 5 круши?

16. Еден молив чини 8 денари, а една тетратка 20 денари. Драган купил x моливи и y тетратки. Со кои од дадените изрази може да пресмета колку денари ќе плати?

А. $8x + 20y$.
Б. $8y + 20x$.
В. $8x \cdot 20\ y$.
Г. Друг одговор.

17. Членовите на една низа се: 12, 20, 28, 36,... Правилото „за одредување следен член" на низата е:

18. Првиот член на низата е 5. Правилото за одредување следен член на низата гласи: „помножи со 2, па додај 3". Тогаш, четвртиот член на низата е:

А. 14
Б. 11
В. 9
Г. друг одговор

19. Која е равенката на правата y која минува низ точките $(-2,0)$ и $(4,-2)$?

20. Колку изнесува вредноста на изразот $72 + 32 : (-8) - 8 + 2 \cdot 22$?

А. 94.
Б. 104.
В. 114.
Г. Друг одговор.

21. Изразот $(7\ x - 5y - 2) \cdot (-5)$ е еквивалентен со:

22. Вредноста на бројниот израз $5 \cdot 5^2 - 2 \cdot (-3)^3$ е:

А. 179
Б. 98
В. 73
Г. друг одговор

23. За која вредност од x изразот $\frac{2\ x+7}{x\ -5}$ нема смисла?

24. Рамнокракиот трапез има ________ оски на симетрија.

25. Колку оски на симетрија има паралелограмот?

26. Колку оски на симетрија има правилниот петаголник?

А. 5.
Б. 3.
В. 4.
Г. Друг одговор.

27. Внатрешниот агол при основата во рамнокрак триаголник е 50°. Останатите два внатрешни агли се ________.

28. Во еден триаголник двата агли се: 60° и 40°, а третиот агол е:

А. 100°
Б. 90°
В. 80°
Г. друг одговор

29. Ако најголемиот агол во рамнокрак триаголник е 110°, тогаш останатите два внатрешни агли се _______________.

30. Дадена е отсечка AB, чии координати на крајните точки се A(2,1) и B(6,1). Координатите на средната точка на отсечката AB се:

А. (4, 2)
Б. (4, 1)
В. (6, 1)
Г. друг одговор

31. Редот на ротациона симетрија на правоаголникот е:

А. 4
Б. 1
В. 2
Г. друг одговор

32. Редот на ротациона симетрија на правилен шестаголник изнесува ________.

33. Колку оски на симетрија има квадратот?

А. Четири оски на симетрија.
Б. Две оски на симетрија.
В. Три оски на симетрија.
Г. Друг одговор.

34. Плоштината на триаголник со основа 10 m и висина 4 m изнесува:

А. $P = 40\ m^2$
Б. $P = 20\ m^2$
В. $P = 30\ m^2$
Г. друг одговор

35. Плоштината на трапез со основи 80 mm и 60 mm и висина 20 mm изнесува ______.

36. Колкава е висината на паралелограм со плоштина $P = 80\ m^2$ и страна $a = 20$ cm?

А. $h = 60$ m.
Б. $h = 8$ m.
В. $h = 4$ m.
Г. Друг одговор.

37. Круг со плоштина $P = 144\pi\ dm^2$ има радиус __________.

38. Периметарот на кружна маса е 120π cm. Колкава е плоштината на масата?

А. $P = 3000\pi\ cm^2$.
Б. $P = 3600\pi\ cm^2$.
В. $P = 2800\pi\ cm^2$.
Г. Друг одговор.

39. Плоштината на триаголник е $36\ cm^2$, а неговата висина кон основата е 8 cm. Колкава е основата на триаголникот?

А. 6 cm.
Б. 9 cm.
В. 12 cm.
Г. Друг одговор.

40. Борјан трчал по кружна патека долга 300 метри. Колку километри истрчал ако патеката ја поминал 20 пати?

41. Волуменот на квадар со димензии 3 m, 10 m и 5 m изнесува:

А. $150\ m^3$
Б. $450\ m^3$
В. $130\ m^3$
Г. друг одговор

42. Плоштината на рамнокрак триаголник со периметар 42 cm, крак 15 cm и висина 6 m изнесува _______________.

43. Плоштината на квадар со димензии 3 cm, 4 cm и 5 cm изнесува:

А. $P = 104$ cm^2
Б. $P = 94$ cm^2
В. $P = 54$ cm^2
Г. друг одговор

44. Периметарот на круг со плоштина 225π m^2 изнесува ___________.

45. Давид има аквариум со димензии 1,5 dm; 4 dm и 5 dm. Колку литри вода се потребни за да се наполни аквариумот?

А. 45 l.
Б. 60 l.
В. 30 l.
Г. Друг одговор.

46. Плоштината на паралелограм со страна 18 dm и соодветна висина 10 dm изнесува ________.

47. Плоштината на круг е 625π m^2. Колкав е неговиот дијаметар?

А. 25 m.
Б. 40 m.
В. 50 m.
Г. Друг одговор.

48. Периметарот на паралелограм со страни 16 m и 8 m изнесува __________.

49. Кружно езеро во парк има дијаметар 40 m. Колкава е должината на патеката околу езерото?

А. 138,5 m.
Б. 125,6 m.
В. $125{,}6\pi$ m.
Г. Друг одговор.

50. Колкава е висината на квадар со волумен 24000 m^3, должина 20 m и ширина 30 m?

А. 40 m.
Б. 35 m.
В. 45 m.
Г. Друг одговор.

51. Трапез со основи 16 cm и 10 cm и плоштина 104 cm^2 има висина ________.

52. Колку стакло е потребно за да се затвори прозорец со димензии 60 cm и 0,3 m?

А. 1600 cm^2.
Б. 1800 cm^2.
В. 1520 cm^2.
Г. Друг одговор.

53. Базен со димензии 32 m и 16 m, а длабок 2 m собира ________ l.

54. Настанот: При фрлање коцка за играње со 6 страни да се падне 7 е:

А. сигурен настан
Б. невозможен настан
В. многу веројатен настан
Г. друг одговор

55. При фрлање на две коцки, веројатноста збирот на точките да биде два е ________.

56. Збирот на веројатностите на еден случаен настан и на неговиот спротивен настан е:

А. 0,7
Б. 1,2
В. 1
Г. друг одговор

57. Веројатностана настанот: При фрлање коцка за играње да се падне некој од броевите од еден до шест е ______.

58. Колкава е веројатноста Симона и Теа да не се сретнат, ако веројатноста тие да се сретнат е 0,7?

59. Колку е веројатноста p на даден настан, ако веројатноста на неговиот спротивен настан е $\frac{5}{7}$?

60. Нина сака да изврши истражување за тоа колку ученици го сакаат предметот математика. За да добие најдобар резултат треба да ги праша ________________.

61. Веројатноста на настанот: При фрлање коцка за играње да се падне непарен број точки е:

А. $\frac{1}{2}$
Б. $\frac{1}{3}$
В. $\frac{1}{4}$
Г. друг одговор

62. Во едно село живеат 5 деца на возраст од 7, 5, 6, 8 и 9 години. Одреди ја медијаната на групата податоци?

63. Модата од дадените податоци 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 4, 4 е:

А. 4
Б. 5
В. 4 и 5
Г. друг одговор

64. Даријан направил истражување за тоа по колку телевизори имаат учениците дома. Направил табела со собраните податоци. Медијаната на овие податоци е:

Број на телевизори	Честота
1	5
2	6
3	3
4	2
5	0

65. Настанот: При фрлање коцка за играње да се падне трицифрен број е ___________.

66. Направено е истражување за да се открие омилена боја на учениците. Табелата ги прикажува вредностите од истражувањето. Колку ученици учествувале во истражувањето?

Омилена боја	Честота
Црна	4
Црвена	5
Сина	8
Жолта	3
Зелена	4

67. Колку е веројатноста на еден настан, ако спротивната веројатност е 0,02?
А. 0,8.
Б. 0,98.
В. 98.
Г. Друг одговор.

ЗАДАЧИ ЗА VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Вредноста на производот $\left(-6\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{7}$ износува __________.

2. Децималниот број 3,8 запишан како нескратлива дропка е:

   А. $\frac{19}{5}$
   Б. $\frac{17}{5}$
   В. $\frac{11}{5}$
   Г. друг одговор

3. Колку е $\sqrt[3]{125}-\sqrt[3]{-8}$?

   А. -3
   Б. 3
   В. 7
   Г. -7

4. Вредноста на изразот $7\frac{1}{6}-3\frac{1}{12}$ износува _________.

5. Процентот 2,5 % запишан како нескратлива дропка е:

   А. $\frac{1}{4}$
   Б. $\frac{1}{8}$
   В. $\frac{1}{40}$
   Г. $\frac{3}{40}$

6. Дропката $\frac{5}{6}$ претворена во периодичен децимален број е __________.

7. Од кој број 30 % изнесува 90?

   А. 900
   Б. 9
   В. 90
   Г. друг одговор

8. Бројот 500 запишан како производ од неговите прости множители е ____________.

9. Запиши го бројот 1001 како производ од неговите прости множители.

А. $1001 = 5 \cdot 11 \cdot 13$
Б. $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$
В. $1001 = 3 \cdot 11 \cdot 17$
Г. друг одговор

10. Дропката $\frac{3}{20}$ запишана во процент е ____________.

11. Колку коцки со раб 2 треба да се спојат за да се конструира поголема коцка со раб 6?

А. 3
Б. 9
В. 27
Г. 36

12. Вредноста на $\frac{3}{5}$ од некој број изнесува 36. Кој е тој број?

А. 45.
Б. 60.
В. 30.
Г. Друг одговор.

13. Десет жетони чинат 1000 денари. Осум жетони чинат _______.

14. Нина решава тест од 30 задачи. Потребно е да се решат најмалку 40 % од задачите за да се смета дека тестот е положен. Колку најмалку задачи Нина треба да реши точно за да го положи тестот?

А. 11
Б. 13
В. 10
Г. 12

15. Јована заработувала 28000 денари месечно. Таа добила 3 % зголемување на платата. Нејзината плата по зголемувањето изнесува _______ денари.

16. Во еден пливачки клуб членувале 120 члена. Момчиња биле 72. Колку проценти биле девојчиња?

А. 35 %.
Б. 40 %.
В. 45 %.
Г. Друг одговор.

17. Вредноста на изразот $-9^2 + 76 \cdot \left(\left(84 - 10 \cdot \sqrt{25}\right) : (-3) + 2^3\right)$ изнесува:

А. –82
Б. –81
В. –80
Г. друг одговор

18. Вредноста на бројниот израз $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} : \frac{3}{2} - 1$ изнесува _________.

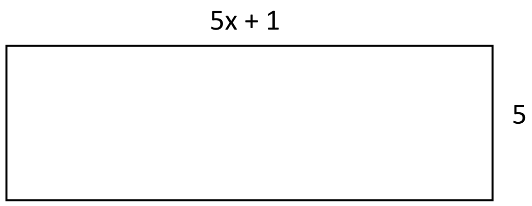
19. Три другарки поделиле кутија со слатки во размер 1 : 2 : 3. Најголемиот дел изнесува:

А. $\frac{1}{2}$
Б. $\frac{1}{3}$
В. $\frac{3}{4}$
Г. друг одговор

20. Колку чинат 10 kg банани, ако 13 kg банани чинат 520 денари?

А. 400 денари.
Б. 500 денари.
В. 460 денари.
Г. Друг одговор.

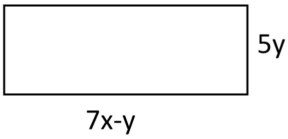
21. Плоштина на правоаголникот на цртежот се пресметува со формулата _________.



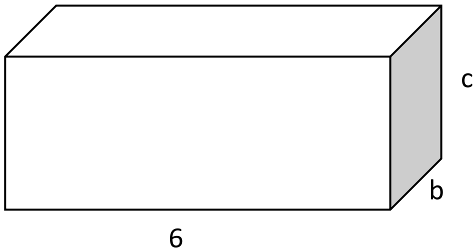
22. По упростувањето на изразот $3a(a-5) - 5(a+2)$ се добива:

А. $3a^2 - 20a - 10$
Б. $3a^2 - 20a + 10$
В. $3a^2 + 20a - 10$
Г. друг одговор

23. Периметарот на правоаголникот на цртежот се пресметува со формулата ______________________.



24. Плоштина на квадарот на цртежот се пресметува со формулата _____________.



25. Дадена е формулата $y = 3x - 10$. Ако у = 50 вредноста на x изнесува:

А. 30
Б. 50
В. 20
Г. друг одговор

26. Дадена е формулата $mn - 2m = n^2$. Ако $n = 4$, вредноста на m изнесува _________.

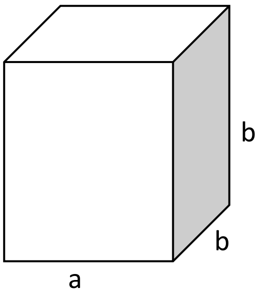
27. Низата 2, 5, 8, 11... има n-ти член:

А. 2n-1
Б. 3n+1
В. 3n-1
Г. друг одговор

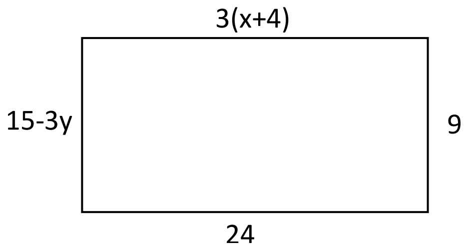
28. Аритметичката низа 9, 5, 1, −3,... има n-ти член __________.

29. Петнаесеттиот член од низата: 106, 100, 94,... изнесува _____.

30. Ако Р = 144 cm^2 и b = 6 cm, вредноста на а изнесува ________.



31. Вредностите на x и y според податоците од цртежот, изнесуваат ________.



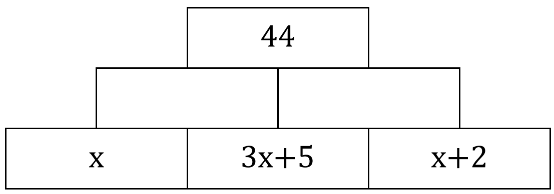
32. Дарко има x години. Неговиот татко е 20 години постар од него. Следната година неговиот татко ќе биде три пати постар од него. Колку години има Дарко?

А. 12.
Б. 9.
В. 8.
Г. Друг одговор.

33. Ева има голема библиотека со книги. Досега прочитала точно $\frac{1}{4}$ од книгите, а останале уште 120 непрочитани книги. Колку вкупно книги има Ева?

А. 160.
Б. 140.
В. 150.
Г. Друг одговор.

34. На ѕидот прикажан на цртежот збирот на изразите во две соседни полиња е еднаков на изразот во полето над нив. Вредноста на x е __________.



35. Линеарната функција прикажана во табелата е претставена со формулата:

X	1	2	3	4
Y	8	13	18	23

36. Внатрешен агол во рамнокрак триаголник е 110°. Останатите два внатрешни агли изнесуваат по ________°.

37. Надворешниот агол при врвот на рамнокрак триаголник е $100°$. Останатите два внатрешни агли се:

А. $80°$ и $80°$
Б. $45°$ и $45°$
В. $50°$ и $50°$
Г. $55°$ и $55°$

38. Аглите во еден триаголник се $\alpha = 60°$ и $\beta = 65°$. Надворешниот агол γ_1 изнесува:

А. $135°$
Б. $125°$
В. $105°$
Г. $95°$

39. Внатрешните агли β и γ во еден триаголник се $40°$ и $70°$. Соодветните надворешни агли се ______ и _____.

40. Дадена е отсечка AB, чии координати на крајните точки се A(2,5) и B(4,7). Координатите на средната точка се ________.

41. Збирот на два надворешни агли во триаголник изнесува $220°$. Збирот на соодветните внатрешни агли е:

А. $150°$
Б. $130°$
В. $120°$
Г. $140°$

42. Отсечка има координати на крајна точка $(5,-7)$, а на средната точка $(1,-2)$. Координатите на другата крајна точка се ________.

43. Две спротивни темиња на паралелограмот имаат координати $(-1,-5)$ и $(1,5)$. Пресечната точка на дијагоналите има координати:

А. $(0,-5)$
Б. $(-5,0)$
В. $(0,0)$
Г. $(0,5)$

44. Координатите на три темиња на паралелограмот ABCD се $A(-2,5)$, $B(4,4)$ и $C(6,7)$. Координатите на темето D се _______.

45. Висината на паралелограмот со плоштина $P = 1600$ m² и страна $a = 80$ m изнесува _______ m.

46. Круг со плоштина $P = 225\pi\ m^2$ има радиус:

А. $r = 16$ cm
Б. $r = 15$cm
В. $r = 14$ dm
Г. $r = 15$ dm

47. Плоштината на рамнокрак триаголник со периметар 36 cm, крак 13 cm и висина 12 cm изнесува __________ cm^2.

48. Периметарот на круг со плоштина $625\pi\ m^2$ изнесува __________ m^2.

49. Ева има аквариум со димензии 2,5 dm; 4 dm и 3 dm. Колку литри вода се потребни за да се наполни аквариумот?

А. 60 l
Б. 30 l
В. 32 l
Г. 24 l

50. Плоштината на круг е $256\pi\ cm^2$. Неговиот дијаметар изнесува:

А. 42 cm
Б. 18 m
В. 32 m
Г. 30 m

51. Висината на квадар со волумен 60 m^3 со должина 5 m и ширина 4 m изнесува _______ m.

52. Трапез со основи 20 cm и 10 cm и плоштина 60 cm^2 има висина од:

А. 4 cm
Б. 5 cm
В. 8 cm
Г. 2 cm

53. Теа има кутија којашто собира 600 cm^3 шеќер. Таа сака да го претури шеќерот во помали кутии кои имаат форма на квадар со димензии 4 cm, 5 cm и 6 cm. Колку кутии ѝ се потребни?

А. 7
Б. 4
В. 5
Г. 6

54. Нива која има форма на паралелограм со подолга страна 50 m и кај која растојанието меѓу подолгите страни е 8 m, има плоштина _______ m^2.

55. Страните на паралелограмот се 10 dm и 8 dm. Поголемата висина изнесува 5 dm. Колку изнесува помалата висина?

А. 4 dm
Б. 3 dm
В. 3 cm
Г. 6 cm

56. Тркалото од автомобилот има дијаметар 100 cm. Колку пати тркалото се завртело кога изминало пат од 31400 cm?

А. 150
Б. 200
В. 140
Г. 100

57. Во квадрат со страна 30 cm е впишан круг. Плоштината на кругот изнесува __________ cm^2.

58. Паралелограм со страна 10 m и висина спуштена кон другата страна 5 m има периметар 44 m. Плоштината на паралелограмот изнесува:

А. 55 m^2
Б. 80 m^2
В. 60 m^2
Г. 75 m^2

59. Колку е веројатноста p на даден настан, ако веројатноста на неговиот спротивен настан е $\frac{3}{8}$?

А. $\frac{5}{8}$.
Б. $\frac{2}{8}$.
В. $\frac{6}{8}$.
Г. друг одговор.

60. Веројатноста на настанот: При фрлање коцка за играње да се падне непарен број точки е _______________.

61. Во една улица живеат 7 деца на возраст од 2, 5, 7, 12, 5, 6 и 8 години. Која е медијаната на оваа група податоци?

А. 5.
Б. 6.
В. 12.
Г. Друг одговор.

62. Бројот на голови кои ги постигнувал еден фудбалски тим во текот на одреден број натпревари биле: 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3. Медијаната на податоците е ________.

63. Бројот на кафиња што во текот на 22 дена се продале во една кафетерија е прикажан во дадената табела на фреквенции. Модалната класа е __________.

Кафиња	0 – 19	20 – 39	40 – 59	60 – 79	80 – 99
Честота	2	4	8	5	3

64. Се фрлаат две парички. Можните исходи се ________________.

65. Во една кутија имало 4 бели, 5 сини и 6 црвени топчиња. Колкава е веројатноста да се извлече црвено топче?

А. $\frac{4}{15}$.
Б. $\frac{3}{5}$.
В. $\frac{2}{5}$.
Г. Друг одговор.

66. Во една корпа има 20 ливчиња на кои се испишани природните броеви од 1 до 20. Одреди ја веројатноста дека случајно извлечен број ќе биде делив со 3.

67. Се извлекува една карта од шпил со 32 карти. Кој од наведените исходи има најголема веројатност: да се извлече десетка, да се извлече дванаесетка или да се извлече тринаесетка?

А. Да се извлече дванаесетка.
Б. Еднакво веројатни.
В. Да се извлече десетка.
Г. Друг одговор.

68. При вртење на еден телефонски број Сара ја заборавила последната цифра. Веројатноста случајно да ја погоди последната цифра е ___________.

69. Веројатноста случајно да погодиш во кој месец е роден некој човек е ___________.

70. Од зборот „ЅВЕЗДА“ се избира случајно една буква. Веројатноста избраната буква да биде самогласка е:

А. $\frac{1}{5}$

Б. $\frac{1}{3}$

В. $\frac{2}{3}$

Г. друг одговор

71. Збирот на податоците е 48, а аритметичката средина е 4. Бројот на податоци изнесува _________.

72. Веројатноста дека при фрлање на две коцки ќе паднат два исти броја е:

А. $\frac{5}{6}$

Б. $\frac{1}{6}$

В. $\frac{7}{36}$

Г. друг одговор

ЗАДАЧИ ЗА IX ОДДЕЛЕНИЕ

1. Производот на два броја е –18, а нивниот збир е 3. Броевите се ______.

2. Колку изнесува $5\frac{1}{2}$ % од 200?

   А. 11.
   Б. 22.
   В. 110.
   Г. Друг одговор.

3. Децималниот број 2,25 претворен во дропка изнесува _________.

4. Колку се добива при делење на 0,75 со $\frac{4}{3}$?

   А. 1.
   Б. 0,1.
   В. 0,5.
   Г. Друг одговор.

5. Цена намалена 20 % е платена 120 денари. Цената пред намалувањето била __________.

6. Колку изнесува четртина од 2^{98}?

   А. 2^{96}.
   Б. 2^{100}.
   В. 1^{49}.
   Г. Друг одговор.

7. Растојанието меѓу два града A и B е 300 km. На карта ова растојание е 60 cm. Размерот е еднаков на _________.

8. Збирот на дропките $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}$ е _________.

   А. $\frac{1111}{1000}$
   Б. $\frac{1111}{10000}$
   В. $\frac{101}{1000}$
   Г. друг одговор

9. Пресметај: $\frac{2,5\cdot10^5}{25\cdot10^8}$.

А. $10\cdot10^{-3}$
Б. $10\cdot10^{3}$
В. 10^{-4}
Г. друг одговор

10. Размерот $\frac{2}{5}:\frac{7}{25}$, изразен преку природни броеви, е ________.

11. Кој број треба да биде на местото на квадратчето за да биде точно равенството $2\frac{\square}{5}\cdot 2\frac{1}{2}=6$?

А. 2.
Б. 6.
В. 3.
Г. Друг одговор.

12. Пресметај: $\frac{2\frac{1}{7}}{1\frac{1}{7}-\frac{1}{14}}$.

А. 14
Б. $\frac{1}{7}$
В. 2
Г. друг одговор

13. Цената на еден автомобил била 300 000 денари. Колку ќе плати Дарко за автомобилот ако данокот е 15 % ?

14. Колку е $\left(\frac{4}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)^0\right)^{-2}$?

А. 0.
Б. 9.
В. –2.
Г. Друг одговор.

15. Децималниот број 0,125, запишан како нескратлива дропка, е ________.

16. Запишан е производот на сите непарни природни броеви меѓу 1 и 2018. Цифрата на единици изнесува:

А. 5
Б. 1
В. 0
Г. друг одговор

17. Бројот на ученици во едно училиште е помал од 500. Ако учениците се групираат во групи од по 36 ученици, или во групи од по 60 ученици или во групи од по 24 ученици, во сите случаи ќе останат 7 ученици надвор од групите. Колку ученици има во училиштето?

18. Цената на палто е намалена 20 %, а потоа е намалена уште 25 % и се продава по 600 денари. Цената пред намалувањето изнесувала:

А. 800 денари
Б. 1200 денари
В. 1000 денари
Г. друг одговор

19. Една третина од една седмина од 441 е __________.

20. До трицифрен број запишан е истиот број. Колку изнесува количникот на добиениот со првиот број?

А. 11.
Б. 1001.
В. 1111.
Г. Друг одговор.

21. Човек висок 2 m фрла сенка од 1 m. Колку е високо дрво, кое во истиот момент и на исто место фрла сенка од 6 m?

22. Пресметај: $\frac{\sqrt{25}+2\cdot 8}{\sqrt{625}-2\sqrt{4}}$.

А. 1
Б. 5
В. 2
Г. друг одговор

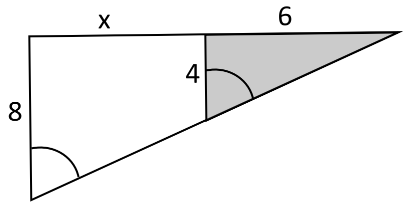
23. Во ресторан е порачана храна со попуст од 10 % и пијалак 15 %. Сметката за храна пред попустот била 2000 денари, а пијалакот бил 1000 денари. Колку пари е платена сметката?

24. Бројот на момчиња и девојчиња во паралелка се однесува $7 : 9$. Колку се момчиња ако во паралелката има 32 ученици?

А. 18 момчиња.
Б. 14 момчиња.
В. 12 момчиња.
Г. Друг одговор.

25. Колку е 12 % од $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$?

26. Колкав процент од површината на триаголникот прикажан на цртежот е обоен?



А. 15 %.
Б. 20 %.
В. 25 %.
Г. Друг одговор.

27. Колку години има мајката која е 21 година постара од својата ќерка, а 21 година е помлада од својата мајка ако сите заедно имаат 120 години?

28. Размерот: $25\ \% : 0{,}7 : 2\frac{1}{5}$ запиши го во неговата упростена форма.

А. $6 : 7$
Б. $6 : 5$
В. $5 : 14 : 44$
Г. друг одговор

29. За објавување информација во весник, се користела следната формула $S = 15n + 100$ кадешто S е цената во денари, а n е бројот на зборови. Колку е цената на информацијата која има 20 зборови?

А. 500 денари.
Б. 400 денари.
В. 450 денари.
Г. Друг одговор.

30. За која вредност на k равенката $kx = 12 + k$ има решение $x = 5$?

31. Броевите со збир 120 и разлика 40 се:

А. 80 и 40
Б. 80 и 20
В. 70 и 50
Г. друг одговор

32. Параметарот m во равенката $x^2 - x + m = 0$ со решение $x = 1$ изнесува ________.

33. Изрази го x во дадената формула $A = ax - 5$ преку A и a.

34. Запиши ги сите позитивни цели броеви кои се решение на неравенката за $x \leq 4$.

А. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
Б. $\{1, 2, 3, 4\}$
В. $\{1,2, 3\}$
Г. друг одговор

35. Запишете ги сите позитивни цели броеви кои се решение на $x - 1 \geq 4$.

36. Равенката $2x - 3y = 6$ запиши ја во обликот $y = mx + c$.

А. $y = -\frac{2}{3}x - 2$
Б. $y = \frac{2}{3}x - 2$
В. $y = \frac{2}{3}x + 2$
Г. друг одговор

37. Колку е наклонот на правата $4x = 5 - 7y$?

38. Разложи на множители: $x^2 - 4x + 3$.

А. $(x - 1)(x - 3)$
Б. $(x - 1)(x + 3)$
В. $(x + 1)(x - 3)$
Г. друг одговор

39. За која вредност на n е точно равенството $\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{81}{625}$?

40. По кратење на дропката $\frac{49-x^2}{7-x}$ се добива:

А. $7 - x$
Б. 1
В. $7 + x$
Г. друг одговор

41. Системот равенки $\begin{cases} x - y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$ _________ решение.

42. Изразот $\frac{((n^2 \cdot n^3)^7)^5}{(n^3 \cdot n^7)^{12}}$ по упростувањето изнесува:

А. n^{85}
Б. n^{55}
В. n^{105}
Г. друг одговор

43. Запиши ја инверзната функција на функцијата $y = x - 3$.

44. Тркач стигнал 203-ти на крос. Констатирано е дека секој петти бил дисквалификуван. Новиот пласман на тркачот е:

А. 198-ми
Б. 177-ми
В. 163-ти
Г. друг одговор

45. Камион се движи со средна брзина од 60 km/h. Два часа подоцна од истото место тргнува автомобил, кој се движи во иста насока со средна брзина од 80 km/h. По колку часа автомобилот го стигнал камионот?

46. Решение на равенката $(x - 3) \cdot (x + 3) - x^2 + 3x = 3$ е:

А. $x = 4$
Б. $x = 3$
В. $x = 0$
Г. друг одговор

47. Скрати ја дропката $\frac{x^2 - y^2}{ax - ay}$.

48. Ако $y = 5 + 3x$, тогаш колку е $f^{-1}(17)$?

А. – 4.
Б. 4.
В. 18.
Г. Друг одговор.

49. Плоштината на триаголник меѓу координатните оски и правата $6x + 7y - 42 = 0$ изнесува:
А. 21
Б. 31
В. 23
Г. друг одговор

50. Брод од пристаниште плови 3 km на север, а потоа 4 km на запад. Колку km бродот е оддалечен од пристаништето?
А. 7 km.
Б. 5 km.
В. 3,5 km.
Г. Друг одговор.

51. Пресметај ја должината на најкратката страна на правоаголен триаголник, чии две страни се со должина 40 cm и 41 cm.

52. Врвовите на рамнокраки триаголници со заедничка основа припаѓаат на:
А. оската на симетрија
Б. правата што ја содржи основата
В. права нормална на основата
Г. друг одговор

53. Подреди ги по големина страните на триаголникот ABC ($AB = c$, $BC = a$, $AC = b$), почнувајќи од најмалата, ако $\measuredangle A = 60$ и $\measuredangle B = 30$.

54. Колку изнесува тапиот агол меѓу симетралите на острите агли на правоаголен триаголник?

55. Ако во триаголникот ABC има еден агол 42°, а другите два се однесуваат како $5 : 1$, тогаш тој триаголник во однос на страните е:
А. правоаголен
Б. тапоаголен
В. остроаголен
Г. друг одговор

56. Во рамнокрак триаголник тапиот агол формиран од симетралите на двата еднакви агли е три пати поголем од аголот кај врвот. Аголот при врвот на триаголникот изнесува ________.

57. Во триаголникот ABC надворешниот агол во темето A е $\alpha_1 = 120°$, а внатрешниот агол во темето C е $\gamma = 60°$. Каков е триаголникот според страните?

58. Плоштината на квадрат е 25 cm^2. Плоштината на кругот впишан во квадратот изнесува ________.

59. Плоштината на коцка е 150 cm^2. Колку изнесува волуменот на коцката?

А. 75 cm^3.
Б. 150 cm^3.
В. 125 cm^3.
Г. Друг одговор.

60. Пресметај го поминатиот пат при движење на автомобил со просечна брзина од 72 km на час за време од 120 минути.

А. 192 km
Б. 144 km
В. 72 km
Г. друг одговор

61. Цилиндричен сад има радиус од 3 m и висина од 3 m. Плоштината на садот изнесува _______.

62. Цилиндричен резервоар за вода има радиус од 4 m и висина од 6 m. Колку литри вода собира резервоарот?

А. 75360 l.
Б. 25420 l.
В. 95580 l.
Г. Друг одговор.

63. Бројната вредност на волуменот на цилиндар со висина од 2 m е еднаков на бројната вредност на периметарот на основата. Колку изнесува радиусот на основата на тој цилиндар?

64. Градина во форма на правоаголник со димензии 16 m и 8 m е обиколена со леа од цвеќиња широка 2 m. Колку изнесува плоштината на леата?

А. 112 m^2.
Б. 192 m^2.
В. 82 m^2.
Г. Друг одговор.

65. Димензиите на квадар се однесуваат $5:6.:7$, а нивниот збир е $36\,\mathrm{dm}$. Волуменот на квадарот е ________________.

66. Ако во квадрат е впишан круг, тогаш односот на нивните плоштини е:

67. Ако радиусот на една кружница се зголеми за 2, тогаш нејзината должина ќе се зголеми за:

А. 4π
Б. 4
В. 2π
Г. друг одговор

68. Цилиндар со висина $4\,\mathrm{cm}$ има волумен $100\pi\ \mathrm{cm}^3$. Колку изнесува неговата плоштина?

69. Колку литри вода собира цилиндричен сад со дијаметар на основата $10\,\mathrm{dm}$ и висина $300\,\mathrm{cm}$?

А.122π l.
Б. 223,5 l.
В. 2355 l.
Г. Друг одговор.

70. Колку изнесува медијаната на примерокот: 27, 31, 33, 35, 37, 37, 40?

А. 37.
Б. 35.
В. 13.
Г. Друг одговор.

71. Во една кутија има црвени и црни топчиња. Веројатноста да се извлечи црвено топче е $\frac{2}{5}$. Колку е веројатноста да се извлече црно топче?

72. Ева играла четири натпревари тенис. На три натпревари имала по 10 бода, а на еден натпревар освоила 2 бода. Колку просечно бодови имала од четирите натпревари во тенис?

А. 9 бода.
Б. 8 бода.
В.7 бода.
Г. Друг одговор.

73. Се фрлаат две коцки за играње. Веројатноста дека едно по друго ќе се падне 6 е ___________________.

74. Случајно е избран број од множеството $\{1,2,3,\ldots,20\}$. Која е веројатноста избраниот број при делење со 4 да има остаток 2?

А. $\frac{3}{20}$.
Б. $\frac{1}{5}$.
В. $\frac{1}{4}$.
Г. Друг одговор.

75. Ако во кутија има 25 бели, 15 црвени и 10 зелени топчиња, и од неа се извлече едно топче, тогаш веројатноста дека топчето НЕ е бело е:

76. Веројатноста од шпил со 52 карти да се извлече „црвена десетка“ е:

А. $\frac{1}{26}$
Б. $\frac{1}{13}$
В. $\frac{4}{13}$
Г. друг одговор

77. Колку е вредноста на x, така што аритметичката средина на броевите 7, 8, 15 и x да е 13?

78. Во една кутија има црвени и жолти коцки. Веројатноста да се извлече црвена коцка е $\frac{3}{5}$. Кој е најмалиот број на жолти коцки во кутијата?

А. 3.
Б. 4.
В. 2.
Г. Друг одговор.

79. Едно лице ја заборавило последната цифра од телефонскиот број на својот пријател. Колкава е веројатноста да го погоди точниот телефонски број?

80. Во кутија има сини, зелени и жолти коцки. Бројот на коцките во неа е 20. Веројатноста да се извлече сина коцка е $\frac{2}{5}$. Кој е најголемиот број сини коцки во кутијата?

А. 8.
Б. 10.
В. 12.
Г. Друг одговор.

81. Ако секој член на низата броеви: 1, 5, 9, 13 се зголеми за 14, тогаш аритметичката средина на броевите ќе се зголеми за ___________.

82. Колку е непознатиот член на низата: 3, 5, 7, 20, 10, 13, x, ако аритметичката средина на броевите од низата е 11?

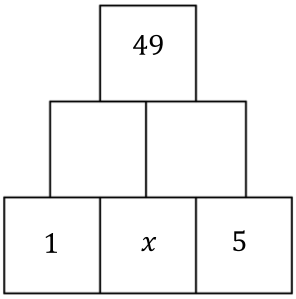
А. 11.
Б. 19.
В. 22.
Г. Друг одговор.

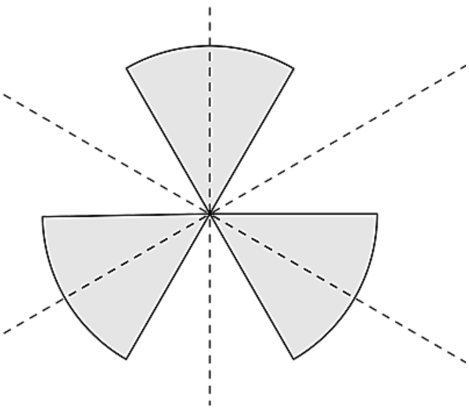
83. Се фрлаат монета и коцка. Колкава е веројатноста дека монетата покажува страна петка, а коцката покажува непарен број?

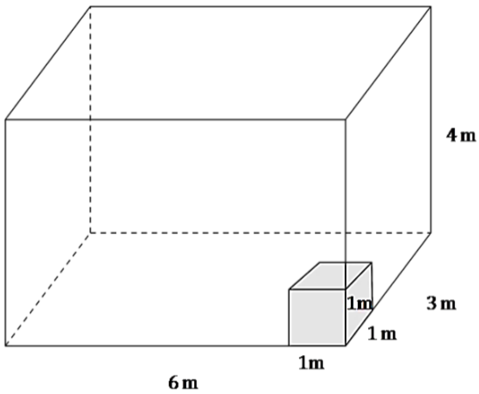
84. Размерот на црвените рози и белите рози во една кошница бил 3 : 5. Во кошницата има 80 рози. Колкава е веројатноста да се извлече црвена роза?

А. $\frac{7}{8}$.
Б. $\frac{5}{8}$.
В. $\frac{3}{8}$.
Г. Друг одговор.

РЕШЕНИЈА







РЕШЕНИЈА ЗА VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. $2\frac{2}{3}$
2. В.16
3. Б. 64
4. 9 cm
5. А. 5 m
6. В. 75 %
7. 1800 денари.
8. Б. 180
9. –5
10. А. –5
11. Б. 324 km
12. 0
13. Г. Друг одговор.
14. В. 26
15. 7 A + 5 B
16. А. 8 x + 20 y.
17. Секој следен член се зголемува за 8.
18. Б. 11
19. $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$
20. Б. 104.
21. –35 x + 25 y + 10
22. А. 179
23. $x = 5$
24. Една оска на симетрија.
25. Нема оски на симетрија.
26. А. 5
27. 50° и 80°.
28. В. 80°
29. 35° и 35°.
30. Б. (4,1)
31. В. 2
32. 6.
33. А. Четири оски на симетрија.
34. Б. P=20 m^2

35. $P = 1400\ mm^2$
36. В. $h = 4\ m$.
37. $r = 12\ dm$.
38. Б. $P = 3600\pi\ cm^2$.
39. Б. 9 cm.
40. 6 km
41. А.$150\ m^3$
42. 36 cm^2
43. Б. P = 94 cm^2
44. $30\pi\ m$.
45. В. 30 l.
46. P =180 dm^2.
47. В. 50 m.
48. 48 m.
49. Б. 125,6 m.
50. А. 40 m.
51. 8 cm.
52. Б. 1800 cm^2.
53. 1024000 l.
54. Б. Невозможен настан.
55. $\frac{1}{36}$.
56. В. 1
57. 1.
58. 0,3
59. $\frac{2}{7}$
60. сите ученици.
61. А. $\frac{1}{2}$
62. 7
63. В. 4 и 5
64. 3
65. невозможен настан.
66. 24
67. Б. 0,98.

РЕШЕНИЈА ЗА VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. $-\frac{19}{7}$.
2. А. $\frac{19}{5}$
3. В. 7
4. $4\frac{1}{12}$.
5. В. $\frac{1}{40}$
6. 0,8(3).
7. В. 90
8. $500 = 2^2 \cdot 5^3$.
9. Б. $1001 = 7·11·13$
10. 15 %
11. В. 27
12. Б. 60.
13. 800 денари.
14. Г. 12
15. 28840 денари.
16. Б. 40 %
17. Б. –81
18. $\frac{1}{6}$.
19. А. $\frac{1}{2}$
20. А. 400 денари.
21. Р=25х+ 5.
22. А. $3a^2 - 20a - 10$
23. $\mathrm{L} = 14\mathrm{x} + 8\mathrm{y}$.
24. $\mathrm{P} = 12\mathrm{b} + 12\mathrm{c} + 2\mathrm{bc}$.
25. В. 20
26. 8.
27. В. 3n−1
28. 13−4n.
29. 22.
30. 3 cm.
31. x = 4, y = 3.

32. Б. 9
33. А. 160
34. 4.
35. $y = 5x + 3$
36. 35°.
37. В. 50° и 50°
38. Б. 125°
39. 140° и 110°.
40. (3,6).
41. Г. 140°
42. (−3,3).
43. В. (0,0)
44. (0,8).
45. 20 m.
46. Г. $r = 15$ dm
47. 60 cm^2.
48. 50π m.
49. Б. 30 l
50. В. 32 m
51. 3 m.
52. А. 4 cm
53. В. 5
54. 400 m^2
55. А. 4 dm
56. Г. 100
57. 225π cm^2.
58. В. 60 m^2
59. А. $\frac{5}{8}$.
60. 0,5.
61. Б. 6.
62. 1,5
63. $40 - 59$
64. ПП, ПГ, ГП, ГГ.
65. В. $\frac{2}{5}$.
66. $\frac{3}{10}$

67. Б. Еднакво веројатни.
68. $\frac{1}{10}$.
69. $\frac{1}{12}$
70. Б. $\frac{1}{3}$
71. 12.
72. Б. $\frac{1}{6}$

РЕШЕНИЈА ЗА IX ОДДЕЛЕНИЕ

1. 6 и 3.
2. А. 11.
3. $\frac{9}{4}$.
4. А. 1.
5. 150 денари.
6. А. 2^{96}.
7. 1: 5000 000.
8. Б. $\frac{1111}{10000}$
9. В. 10^{-4}
10. 10 : 7.
11. Б. 6.
12. В. 2
13. 345 000 денари.
14. Б. 9.
15. $\frac{1}{8}$.
16. А. 5
17. 367 ученици.
18. В. 1000 денари.
19. 21.
20. Б. 1001.
21. 12 m
22. А. 1

23. 2650 денари
24. Б. 14 момчиња.
25. 0,07
26. В. 25 %.
27. 40 години
28. В. 5 : 14 : 44
29. Б. 400 денари.
30. $k = 3$
31. А. 80 и 40.
32. $m = 0$.
33. $x = \frac{A+5}{a}$
34. Б. $\{1, 2, 3, 4\}$
35. 5,6,7,...
36. Б. $y = \frac{2}{3}x - 2$
37. $-\frac{4}{7}$
38. А. $(x - 1)(x - 3)$
39. $n = 4$
40. В. $7 + x$
41. Нема решение.
42. Б. n^{55}
43. $y = x + 3$
44. В. 163-ти.
45. 8 часа.
46. А. $x = 4$
47. $\frac{x+y}{a}$
48. Б. 4.
49. А. 21
50. Б. 5 km.
51. 9 cm
52. А. Оската на симетрија.
53. c, a, b.
54. $135°$
55. Б. тапоаголен.
56. $36°$.

57. рамностран
58. $6{,}25\,\pi\ \text{cm}^2$.
59. В. $125\ \text{cm}^3$.
60. Б. 144 km
61. $36\pi\ \text{m}^2$.
62. А. 75360 l.
63. 1 m
64. А. $112\ \text{m}^2$.
65. $1680\ \text{dm}^3$
66. $\frac{4}{\pi}$
67. А. 4π
68. $P = 90\pi\ \text{cm}^2$
69. В. 2355 l.
70. Б. 35.
71. $\frac{3}{5}$
72. Б. 8 бода.
73. $\frac{1}{36}$.
74. В. $\frac{1}{4}$.
75. $\frac{1}{2}$
76. А. $\frac{1}{26}$
77. $x = 22$
78. В. 2.
79. $\frac{1}{10}$
80. А. 8.
81. 14.
82. Б. 19.
83. $\frac{1}{4}$
84. В. $\frac{3}{8}$.

ТЕМА 4

Математичка индукција

Принципот на математичка индукција е корисен метод за докажување на некои математички тврдења: одредени типови равенства, неравенства, деливости, итн. Во темата се дадени неколку формулации на овој принцип и истите се илустрирани низ примери.

$$1+q+q^2+\dots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}$$

$$(1+q+q^2+\dots+q^{n-1})+q^n=\frac{q^{n-1}-1}{q-1}+q^n=$$

$$=\frac{q^n-1+q^{n+1}-q^n}{q-1}=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Тврдење: Нека q е реален број така што $q \neq 1$. Тогаш, за секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$1 + q + q^2 + \ \dots \ + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Доказ: (индукција) Означуваме исказ I_n : $1 + q + q^2 + \ \dots + q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1}$ каде што $n \in \mathbb{N}$.

(1) (база на индукција) I_1 гласи: $1 = \frac{q-1}{q-1}$, што е очигледно вистинит исказ.

(2) (индуктивен чекор) Исказот I_{n+1} гласи: $1 + q + q^2 + \ \dots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$. Да забележиме дека левата страна на I_{n+1} е збирот (левата страна на I_n) $+ \ q^n$. Оттука, според индуктивната хипотеза,

$$(1 + q + q^2 + \ \dots \ + q^{n-1}) + q^n = \frac{q^{n-1}-1}{q-1} + q^n = \frac{q^n - 1 + q^{n+1} - q^n}{q-1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Со ова докажавме дека за секој природен број n важи импликацијата $\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1}$. Според принципот на математичка индукција, за секој $n \in \mathbb{N}$ исказот I_n е вистинит.

Математичка индукција претставува моќна техника за докажување на искази кои се однесуваат на природните броеви. Идејата на која се заснова овој метод е прилично едноставна:

Секој природен број $n > 1$ има (директен претходник) $n - 1$ и со конечен број „враќања кон претходникот“ стигнуваме до бројот 1, т.е. до најмалиот природен број.

Тврдењата кои се докажуваат со помош на математичка индукција (во продолжение само индукција) најчесто се од следниов облик: за секој природен број n нека I_n е исказ кој се однесува на n. За тврдење од облик:

> тврдење: исказите $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \dots$ се вистинити.

постапката за доказ со индукција е следната:

Доказ: (индукција)

Чекор 1: Покажуваме дека исказот I_1 е вистинит.

Чекор 2: Покажуваме дека за секој природен број n, $\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1}$.

Со други зборови, ако исказот I_n е вистинит исказ, тогаш и I_{n+1} е вистинит.

Од принципот на математичката индукција следува дека исказите I_1, I_2, I_3, ... се

Притоа, чекорот 1 се нарекува *база на индукцијата*; чекорот 2 се нарекува *индуктивен чекор*: претпоставувајќи ја вистинитоста на I_n ја докажуваме вистинитоста на I_{n+1} каде што n е произволен природен број; претпоставката „нека I_n е вистинит исказ“ се нарекува *индуктивна хипотеза.*

Пример 1: Сумата на првите n непарни природни броеви изнесува n^2. Со други зборови,

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Доказ: (индукција) Означуваме исказ I_n: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ каде што $n \in \mathbb{N}$.

(1) (база на индукција) Исказот I_1 гласи: $1 = 1^2$, што е очигледно исполнето.

(2) (индуктивен чекор) Претпоставуваме дека I_n е вистинит исказ, т.е. дека важи равенството $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$. Целта ни е да покажеме дека и исказот I_{n+1} е вистинит. Најпрво, како гласи исказот I_{n+1}?

$$\mathrm{I}_{n+1}:\ 1 + 3 + 5 + \ldots + (2(n+1) - 1) = (n+1)^2,$$

т.е.

$$\mathrm{I}_{n+1}:\ 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n+1)^2.$$

Да забележиме дека левата страна на I_{n+1} е збирот (левата страна на I_n) $+ (2n + 1)$. Според индуктивната хипотеза, овој збир е еднаков на $n^2 + (2n + 1)$, т.е. на $(n+1)^2$. Со други зборови, покажавме дека важи импликацијата $\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1}$.
Од принципот на математичка индукција следува дека сите искази I_1, I_2, I_3, ... се вистинити, т.е. за секој $n \in \mathbb{N}$ важи равенството

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Пример 2: Сумата на првите n природни броеви изнесува $\frac{n(n+1)}{2}$.
Со други зборови,

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Доказ: (индукција) Нека I_n: $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ каде што $n\in\mathbb{N}$.

(1) (база на индукција) Исказот I_1 гласи: $1=\frac{1\cdot 2}{2}$, што е очигледно исполнето.

(2) (индуктивен чекор) Претпоставуваме дека I_n е вистинит. Исказот I_{n+1} гласи вака:

$$1+2+3+\ldots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Да забележиме дека левата страна на I_{n+1} е збирот (левата страна на I_n) $+\,(n+1)$. Според индуктивната хипотеза, овој збир е еднаков на

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Методот на индукција е лесно применлив за докажување на тврдења како оние во претходните два примера каде што секој од исказите се однесува на некоја сума (или производ), при што сумата (производот) спомената во I_n претставува дел од сумата (производот) спомената во I_{n+1}.

Следуваат уште два слични примера.

Пример 3: Нека q е реален број, така што $q\neq 1$. Тогаш, за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$1+q+q^2+\ \ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Доказ: (индукција) Нека I_n: $1+q+q^2+\ \ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}$ каде што $n\in\mathbb{N}$.

(1) (база на индукција) Исказот I_1 гласи: $1=\frac{q-1}{q-1}$, што е очигледно вистинит исказ.

(2) (индуктивен чекор) Исказот I_{n+1} гласи: $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$. Левата страна на I_{n+1} е збирот (левата страна на I_n) $+ q^n$. Оттука, според индуктивната хипотеза,

$$(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) + q^n \frac{q^{n-1}-1}{q-1} + q^n = \frac{q^n-1+q^{n+1}-q^n}{q-1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Со тоа покажавме дека за секој природен број n важи ипликацијата $\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1}$. Според принципот на математичка индукција, за секој $n \in \mathbb{N}$ исказот I_n е вистинит.

Пример 4: За секој природен број n важи $2^{n-1} \geq n$.

Доказ: (индукција) Нека I_n: $2^{n-1} \geq n$ каде што $n \in \mathbb{N}$.
(1) (база на индукција) Исказот I_1 гласи: $2^0 \geq 1$, што е очигледно вистинит.

(2) (индуктивен чекор) Исказот I_{n+1} гласи $2^n \geq n + 1$. Левата страна на I_n „се крие" во левата страна на I_{n+1} (имено, $2^n = 2^{n-1} \cdot 2$). Оттука, според индуктивната хипотеза,

$$2^n = 2^{n-1} \cdot 2 \geq n \cdot 2 = n + n > n + 1.$$

Покажавме дека за секој природен број n важи импликацијата $\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1}$.

Забелешка: Процесот на индуктивен доказ може да се визуелизира на следниов начин: замислете си бесконечна редица од исправени домина, по едно за секој природен број, на растојанија такви што ако произволно домино падне кон десно, тогаш тоа го турка и соседното (од десно) домино. Ова е индуктивниот чекор. Во овој контекст, принципот на математичка индукција кажува дека ако и првото, т.е. најлевото домино падне (базата на индукција), тогаш сите домина ќе паднат. Се разбира, секое паднато домино симболизира дека соодветниот исказ од низата $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \ldots$ е вистинит. Доказот дека првото домино паѓа, не смее да изостане!

Пример 5: За секој природен број n важи равенството $n = n + 1$.

Индуктивниот чекор $\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1}$ подразбира доказ на импликацијата „ако I_n, тогаш I_{n+1}". Ваквата импликација не е исполнета само во случај кога I_n е вистинит, а I_{n+1} е невистинит исказ. Од хипотезата $n = n + 1$ лесно се изведува дека $n + 1 = n + 2$, но тоа не значи дека со индукција сме покажеле дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $n = n + 1$, бидејќи заборавивме на базата на индукција $1 = 2$, која очигледно е невистинит исказ.

Од истите причини (т.е. доколку ја игнорираме базата на индукција), погрешен би бил индуктивниот „доказ“ на тврдењето дека за секој $n \in \mathbb{N}$ бројот $2n + 1$ е парен.

Важно е да се напомене и тоа дека индуктивниот чекор спроведува доказ на импликацијата $\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1}$ за произволен (т.е. за секој) природен број n. Една посуптилна грешка е илустрирана со примерот што следува.

Пример 6: Сите коњи на планетата Земја имаат иста боја.

Доказ: (индукција) Тврдењето може да се парафразира на следниов начин:
За секој $n \in \mathbb{N}$ произволно избрани n коњи имаат иста боја. Нека ова е исказот I_n. Сакаме да покажеме дека исказите I_1, I_2, I_3, ... се вистинити.

(1) (база на индукција) Исказот I_1 е очигледно вистинит.

(2) (индуктивен чекор) Претпоставувајќи дека I_n е вистинит исказ, да ја покажеме вистинитоста на I_{n+1}. За таа цел разгледуваме произволни $n + 1$ коњи, и да земеме дека се наредени во една редица $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \dots, \mathrm{K}_{n+1}$. Првите n коњи (т.е. $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \dots, \mathrm{K}_n$) имаат иста боја, да речеме црна, според индуктивната хипотеза. Од исти причини, последните n коњи (т.е. $\mathrm{K}_2, \dots, \mathrm{K}_{n+1}$) имаат иста боја, па бидејќи K_2 е црн, мора и тие n коњи да се црни. Со тоа „докажавме“ дека коњите $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \dots, \mathrm{K}_{n+1}$ се црни.

Дали ја воочивте грешката при заклучувањето во индуктивниот чекор?

За импликацијата $\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1}$ е потребно да се утврди валидност за секој $n \in \mathbb{N}$, а во горниот „доказ“ тоа не е задоволено, т.е. има еден исклучок: $n = 1$. Имено, во тој случај множествата $\{\mathrm{K}_1, \dots, \mathrm{K}_n\}$ и $\{\mathrm{K}_2, \dots, \mathrm{K}_{n+1}\}$ немаат пресек (т.е. нивниот пресек е празен), па затоа ништо не условува бојата на првата група коњи да се совпаѓа со бојата на втората група коњи.

Заклучок: Индуктивниот чекор мора да биде коректен за секоја вредност на n која е поголема или еднаква на вредноста на n во базата на индукција.

Ќе продолжиме со два примера во кои доказот со индукција не е така „праволиниски“ како во претходните.

Пример 7: За секој природен број n важи $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$.

Решение: Природно е да се обидеме дефинирајќи исказ $\mathrm{I}_n : \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$.

Така, исказот I_1 е очигледно вистинит и левата страна на I_n „се крие“ во левата страна на I_{n+1}. Но, имајќи предвид дека неравенството $2+\frac{1}{n^2}<2$ не е исполнето, не сме во можност да го комплетираме индуктивниот чекор.

Овој пример е прва илустрација на тоа дека понекогаш е поедноставно да се покаже повеќе од она што се тврди. Имено, да спроведеме индуктивен доказ на посилното тврдење каде што n-тиот исказ гласи:

$$\mathrm{I}_n\colon\ \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ \ldots+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n}.$$

(1) (база на индукција) Исказот I_1 гласи: $\frac{1}{1^2}\leq 2-\frac{1}{1}$, што е очигледно исполнето.

(2) (индуктивен чекор) Нека за даден природен број n, исказот I_n е вистинит. Наредниот исказ I_{n+1} тврди дека:

$$\mathrm{I}_{n+1}\colon\ \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ \ldots+\frac{1}{(n+1)^2}\leq 2-\frac{1}{n+1}$$

Според индуктивната хипотеза,
$$\begin{aligned}\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}&=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{(n+1)^2}\\&\leq 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\\&=2-\frac{(n+1)^2-n}{n(n+1)^2}\\&=2-\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}\\&\leq 2-\frac{n^2+n}{n(n+1)^2}\\&=2-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Значи, $\mathrm{I}_n\ \Rightarrow\ \mathrm{I}_{n+1}$.

<u>Пример 8:</u> За секој $n\in\mathbb{N}$ важи $\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}<2$.

<u>Решение:</u> Ова е уште еден пример за тоа дека понекогаш е поедноставно да се покаже нешто повеќе од тоа што се тврди. Нека n-тиот исказ гласи:

$$\mathrm{I}_n\text{: за секој } k\in\mathbb{N} \text{ важи } \sqrt{k+\sqrt{k+1+\cdots+\sqrt{k+n}}}<k+1.$$

Ќе покажеме дека исказите I_1, I_2, I_3, ... се вистинити, од што очигледно ќе следува и веродостојноста на неравенството наведено во примерот.

(1) (база на индукција) Исказот I_1 гласи $\sqrt{k+\sqrt{k+1}}<k+1$, што со квадрирање на двете страни се сведува на $k+\sqrt{k+1}<k^2+2k+1$, односно на $\sqrt{k+1}<k+1+k^2$.

Значи, I_1 е вистинит исказ.

(2) (индуктивен чекор) Заради поедноставно испишување, да означиме:

$$S_{k,n}=\sqrt{k+\sqrt{k+1+\cdots+\sqrt{k+n}}}$$

Претпоставувајќи дека I_n е вистинит исказ, имаме дека $S_{k,n}<k+1$. Останува да забележиме дека е исполнето равенството $S_{k,n+1}=\sqrt{k+S_{k+1,n}}$. Навистина,

$$\sqrt{k+\sqrt{k+1+\cdots+\sqrt{k+n+1}}}=\sqrt{k+\underline{\sqrt{k+1+\cdots+\sqrt{k+1+n}}}},$$

при што подвлечениот собирок е точно $S_{k+1,n}$. Така, според индуктивната хипотеза,

$$S_{k,n+1}=\sqrt{k+S_{k+1,n}}<\sqrt{k+(k+2)}=\sqrt{2k+2},$$

па преостанува да се воочи дека $\sqrt{2k+2}\leq k+1$.

Заклучок: Понекогаш е поедноставно, со помош на математичка индукција, да се покаже повеќе од ова што се тврди. Тоа е така затоа што индуктивниот чекор подразбира докажување на импликацијата $\mathrm{I}_n\Rightarrow \mathrm{I}_{n+1}$ и (понекогаш) посилна индуктивна хипотеза повлекува посилен заклучок!

Во секој од претходните примера, при докажувањето на импликацијата во индуктивниот чекор, полезно беше тоа што I_n не беше „добро скриено“ во I_{n+1}. Во продолжение даваме два примери од деливост, при кои „скривањето“ е (навидум) подобро.

Пример 9: За секој $n\in\mathbb{N}$ важи $9|(4^n+15n-1)$.

Решение: Да забележиме дека исказот I_n: $9|(4^n+15n-1)$ може да се запише во облик

$$\mathrm{I}_n\colon 4^n=9a_n-15n+1,\ \text{за некое } a_n\in\mathbb{Z}.$$

Ваквиот запис е позгоден за употреба при индуктивниот чекор.

(1) (база на индукција) I_1: $4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 9 \cdot 2$, т.е. $a_1 = 2 \in \mathbb{Z}$.

(2) (индуктивен чекор) Под претпоставката дека I_n е вистинит исказ, т.е. дека важи $4^n = 9a_n - 15n + 1$, имаме:

$$\begin{aligned} 4^{n+1} = 4 \cdot 4^n = 4 \cdot (9a_n - 15n + 1) &= 9 \cdot 4a_n - 60n + 4 \\ &= 9 \cdot 4a_n - 15(n+1) - 45n + 18 + 1 \\ &= 9 \cdot (4a_n - 5n + 2) - 15(n+1) + 1, \end{aligned}$$

т.е. $a_{n+1} = 4a_n - 5n + 2 \in \mathbb{Z}$.

<u>Пример 10:</u> За секој $n \in \mathbb{N}$ важи $5|(n^5 - n)$.

<u>Решение:</u> Исказот I_n: $5|(n^5 - n)$го запишуваме во облик

$$\mathrm{I}_n: n^5 - n = 5a_n, \text{ за некое } a_n \in \mathbb{Z}.$$

(1) (база на индукција) I_1: $1^5 - 1 = 5 \cdot 0$, т.е. $a_1 = 0 \in \mathbb{Z}$.

(2) (индуктивен чекор) Под претпоставката дека I_n е вистинит исказ, имаме

$$\begin{aligned} (n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 \\ &= (n^5 - n) + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n \\ &= 5(a_n + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n), \end{aligned}$$

т.е. $a_{n+1} = a_n + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n \in \mathbb{Z}$.

Особината на множеството природни броеви, која е илустрирана со следниот пример, се нарекува *добра подреденост на природните броеви.*

<u>Пример 11:</u> Секое непразно подмножество од $\mathbb{N}$ има најмал елемент.

<u>Решение:</u> Нека I_n е исказот: „Секое подмножество од $\mathbb{N}$ кое содржи елемент помал или еднаков на n има најмал елемент“. Со помош на индукција ќе покажеме дека исказите $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \ldots$ се вистинити.

(1) (база на индукција) Бидејќи 1 е најмалиот природен број, исказот I_1 е вистинит.

(2) (индуктивен чекор) Под претпоставка дека I_n е вистинит исказ, нека $S \subseteq \mathbb{N}$ содржи елемент помал или еднаков на $n+1$. Ако S содржи елемент помал или еднаков на n, тогаш, според индуктивната хипотеза, множеството S има најмал

елемент. Од друга страна, ако тоа подмножество S не содржи елемент помал или еднаков на n, тогаш $n+1$ е неговиот најмал елемент.
Покажавме дека $\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1}$, што го комплетира индуктивниот доказ.
Нека $S \subseteq \mathbb{N}$ и S^{c} е неговиот релативен комплемент, т.е. $S^{\mathrm{c}} = \mathbb{N} \setminus S$. Доколку $S \neq \mathbb{N}$, подмножеството S^{c} е непразно и (според пример 11) постои најмал елемент на S^{c}.

Заклучок: Ако $S \subseteq \mathbb{N}$ и $S \neq \mathbb{N}$, тогаш постои најмал природен број кој не припаѓа на S.

Последниов заклучок води кон една варијанта на методот на математичка индукција, наречена *метод на бесконечно опаѓање:*

исказите $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \ldots$ се вистинити, доколку не постои најмал n за кој исказот I_n не е вистинит.

Методот на бесконечно опаѓање потекнува од познатиот француски математичар Пјер Ферма $(1601-1665)$. Тој го користел овој метод за да покаже дека одредени конкретни равенки немаат решение во множеството на природни броеви. Оваа тема ја завршуваме со две илустрации на методот на бесконечно опаѓање.

Пример 12: Бројот $\sqrt{2}$ е ирационален.

Решение: Нека I_n: Не постои $m \in \mathbb{N}$ за кој $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Доволно е да докажеме дека исказите I_1, I_2, I_3, ... се вистинити. Ќе го направиме тоа со помош на методот на бесконечно опаѓање. Имено, да претпоставиме дека $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \ldots$ не се сите вистинити искази и нека n е најмалиот природен број за кој исказ I_n е невистинит, т.е. n е најмалиот природен број за кој постои запис

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}.$$

Бидејќи $1 < \sqrt{2} < 2$, имаме дека $n < m < 2n$. Оттука, $0 < m-n < n$, т.е. $m-n$ е помал природен број од n. Ќе покажеме дека исказот I_{m-n} е невистинит со тоа што ќе го демонстрираме равенството:

$$\frac{2n-m}{m-n} = \frac{m}{n}.$$

Навистина, $\frac{2n-m}{m-n} = \frac{n(2n-m)}{n(m-n)} = \frac{2n^2-mn}{n(m-n)} = \frac{m^2-mn}{n(m-n)} = \frac{m(m-n)}{n(m-n)} = \frac{m}{n}$. Но, тоа повлекува дека $\sqrt{2} = \frac{2n-m}{m-n}$, односно дека n не е најмалиот природен број за кој I_n е невистинит исказ. Ова е посакуваната противречност. Според методот на бесконечно опаѓање, секој од исказите I_1, I_2, I_3, ... е вистинит, т.е. $\sqrt{2}$ е ирационален број.

Следниот (последен) пример го обопштува претходниот.

<u>Пример 13:</u> Нека $a \in \mathbb{N}$, но $\sqrt{a} \notin \mathbb{N}$. Тогаш, $\sqrt{a}$ е ирационален.

<u>Решение:</u> Бројот $\sqrt{a}$ лежи меѓу два природни броја, нека се тоа k и $k+1$, т.е. нека $k < \sqrt{a} < k+1$.

За секој $n \in \mathbb{N}$ разгледуваме исказ I_n: Не постои $m \in \mathbb{N}$ за кој $\sqrt{a} = \frac{m}{n}$. Со помош на методот на бесконечно опаѓање ќе покажеме дека исказите I_1, I_2, I_3, ... се вистинити.

Претпоставувајќи го спротивното, постои најмал природен број n за кој исказот I_n не е вистинит, т.е. постои најмал $n \in \mathbb{N}$, така што $\sqrt{a} = \frac{m}{n}$, за некој $m \in \mathbb{N}$.

Од $k < \sqrt{a} < k+1$ се добива дека $kn < m < kn + n$, т.е. $0 < m - kn < n$. Значи, $m - kn \in \mathbb{N}$ и $m - kn < n$. Но, да забележиме дека $\frac{an-km}{m-kn} = \frac{m}{n}$. Навистина,

$$\frac{an-km}{m-kn} = \frac{n(an-km)}{n(m-kn)} = \frac{an^2-kmn}{n(m-kn)} = \frac{m^2-mkn}{n(m-kn)} = \frac{m(m-kn)}{n(m-kn)}.$$

Значи, $\sqrt{a} = \frac{an-km}{m-kn}$ и $an - km \in \mathbb{Z}$, што повлекува дека $an - km \in \mathbb{N}$. Но, тогаш n не е најмалиот природен број за кој исказот I_n е невистинит. Ова е посакуваната противречност.

ТЕМА 5

Вовед во неравенства

Во ова тема се воведени основните поими за неравенства помеѓу реални броеви и се разгледани некои општи елементарни неравенства. Воведени се и поимите за аритметичка, геометриска, хармониска и квадратна средина и докажани се основните неравенства помеѓу срединитe. Дадени се доволен број на решени примери од кои може да се согледаат основните техники за докажување на неравенства.

$$\sqrt{6} < \sqrt{6+3}$$

$$\Longrightarrow$$

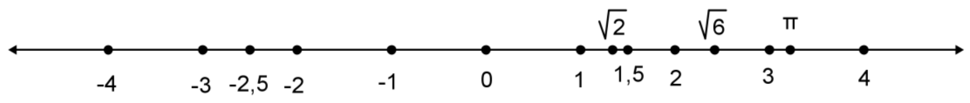
$$\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}} < \sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6+3}}} = 3$$

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq$$

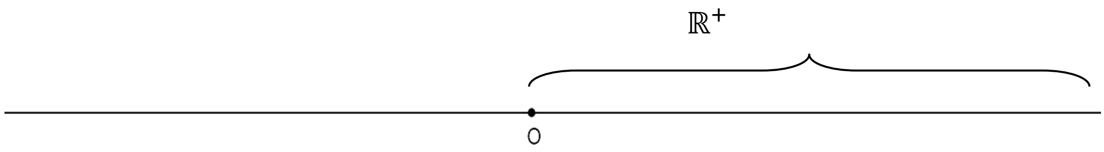
$$\geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

0. Подредување на реалните броеви (неформално)

Множеството $\mathbb{R}$ од сите реални броеви, геометриски гледано, претставува права; со други зборови, секоја точка од правата „одговара“ на единствен реален број и обратно:



Попрецизно кажано, доколку на правата избереме две точки и ги именуваме со 0 и 1, тогаш постои „природна“ биекција помеѓу множеството реални броеви и севкупноста од точки на правата: на секоја точка еднозначно ѝ е придружен единствен реален број, при што за произволни $a, b \in \mathbb{R}$ точките придружени на a и b се на растојание $|a - b|$.
Ваквото геометриско претставување на множеството $\mathbb{R}$ се нарекува *бројна оска*. Во овој контекст, на бројната оска разликуваме насоки „десно од“ и „лево од“ согласно следново: десно од 0 се наоѓа бројот 1, а лево бројот -1. Притоа, сите броеви кои (како точки) се наоѓаат десно од нулата ги нарекуваме *позитивни* реални броеви; нивната севкупност се означува со $\mathbb{R}^+$.



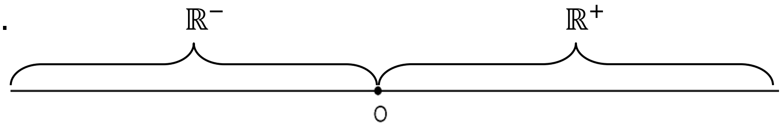
Трите основни својства кои ги поседува множеството од позитивните реални броеви $\mathbb{R}^+$ се следниве:

(П1) за секои $x, y \in \mathbb{R}^+$, збирот $x + y \in \mathbb{R}^+$;
(П2) за секои $x, y \in \mathbb{R}^+$, производот $xy \in \mathbb{R}^+$;
(П3) за секој реален број $x \neq 0$, точно еден од броевите x и $-x$ е позитивен.

<u>Прашање:</u> Каде на бројната оска се наоѓаат броевите $-x : x \in \mathbb{R}^+$?

<u>Одговор:</u> Лево од нулата.

Реалните броеви лево од нулата се нарекуваат *негативни* реални броеви и нивната севкупност се означува со $\mathbb{R}^-$.
Значи, $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$.



Прашање: Кои од својствата (П1)-(П3) ги поседува множеството $\mathbb{R}^{-}$?

Одговор: Само (П1) и (П3); својството (П2) престанува да важи бидејќи производот на секои два негативни реални броја е позитивен реален број.
За реални броеви a и b велиме дека *a е помал од b*, означено со $a < b$, доколку на бројната оска точката b стои десно од точката a. Со други зборови,

основно својство на подредувањето на реалните броеви: за реалните броеви a и b,

$$a < b, \text{ ако и само ако } b - a \in \mathbb{R}^{+}.$$

Прашање: Што може да се каже за множествата $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$ и $\mathbb{R}^{+}$?

Одговор: Овие две множества се еднакви.

Својства кои се изведени од основните:
(С1) $a < b$ и $b < c \;\Rightarrow\; a < c$;
(С2) $a < b$ и $0 < c \;\Rightarrow\; ac < bc$;
(С3) $a < b$ и $c < 0 \;\Rightarrow\; bc < ac$;
(С4) $0 < a < b \;\Leftrightarrow\; 0 < 1/b < 1/a$;
(С5) $a < b \;\Leftrightarrow\; a + c < b + c$;
(С6) $0 < a < b \;\Leftrightarrow$ за секој $n \in \mathbb{N},\; 0 < a^n < b^n$;
(С7) $0 < a < b \;\Leftrightarrow$ за секој $n \in \mathbb{N},\; 0 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Скица на доказ: Секое од (С1)-(С7) се сведува на основното својство за подредувањето и на некое од (П1)-(П3). Како пример ќе го демонстрираме (С1):

$$a < b \;\Leftrightarrow\; b - a \in \mathbb{R}^{+};\; b < c \;\Leftrightarrow\; c - b \in \mathbb{R}^{+}.$$

Според (П1), $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}^{+}$, т.е. $c - a \in \mathbb{R}^{+}$, што е еквивалентно со $a < c$.

Еден еквивалентен запис на неравенството $a < b$ е $b > a$. Да забележиме дека својството (П3) за множеството $\mathbb{R}^{+}$ може да се искаже и со помош на подредувањето:

за секои $a, b \in \mathbb{R}$, исполнето е точно едно од следниве три тврдења:

$$(1)\; a < b \text{ или } (2)\; a = b \text{ или } (3)\; a > b$$

Со комбинирање (унија) на релациите $<$ и $=$ се добива релацијата „помало или еднакво“, означена со $\leq$. Имено, за произволни реални броеви a и b, записот $a \leq b$ означува дека $a < b$ или $a = b$, односно дека a *е помало или еднакво од* b.

<u>Прашање:</u> Што кажува и како се чита ознаката $a \geq b$?

<u>Прашање:</u> Кои од (C1)-(C7) важат доколку $<$ се замени со $\leq$?

<u>Прашање:</u> Запиши аналогни својства на (П1) и (П2) за броеви $x, y \geq 0$.

За секој реален број $a \geq 0$ уште велиме и дека е *ненегативен број*. Слично, за секој реален број $a \leq 0$ велиме дека е *непозитивен број*. Овој параграф го завршуваме со три примери.

<u>Пример 0.1:</u> За произволни $a, b \geq 0$ важи неравенството

$$a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + a^2b^3,$$

со равенство ако и само ако $a = b$.

Доволно е да го разгледаме еквивалентниот запис $a^5 + b^5 - a^3b^2 - a^2b^3 \geq 0$ и за него да забележиме дека левата страна може да се запише во облик $(a^3 - b^3)(a^2 - b^2)$. Од причини на симетрија, може да претпоставиме дека $a \geq b$. Но, тогаш, според (C6), важи $(a^3 - b^3)(a^2 - b^2) \geq 0$.

<u>Забелешка:</u> Нема ништо специфично кај броевите 2, 3 и 5 кои се јавуваат како експоненти во претходниот пример. Единствено е значајно тоа што $5 = 2 + 3$. Имено, за произволни природни броеви m и n и секои $a, b \geq 0$ важи

$$a^{m+n} + b^{m+n} \geq a^m b^n + a^n b^m,$$

со равенство ако и само ако $a = b$. Како доказ, доволно е да се воочи дека последното неравенство е еквивалентно на неравенството $(a^m - b^m)(a^n - b^n) \geq 0$.

<u>Пример 0.2:</u> За $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, за кои $a \geq b$ и $c \geq d$ важи неравенството

$$ac + bd \geq ad + bc,$$

со равенство ако и само ако $a = b$ или $c = d$.

Користиме дека $a \geq b \iff a - b \geq 0$ и $c \geq d \iff c - d \geq 0$. Оттука, според аналогното својство на (П2) за ненегативни броеви, имаме дека $(a-b)(c-d) \geq 0$, со равенство ако и само ако $a = b$ или $c = d$. Преостанува да забележиме дека важи

$$(a-b)(c-d) = (ac+bd) - (ad+bc).$$

<u>Пример 0.3:</u> За произволни $x, y \in \mathbb{R}^+$ важи неравенството

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

со равенство ако и само ако $x = y$.

Од причини на симетрија, може да претпоставиме дека $x \geq y$. Тогаш, според (С4) и (С6), $\frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Неравенството од овој пример сега следува од неравенството во претходниот пример за $a = x, b = y, c = \frac{1}{\sqrt{y}}, d = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

1. Квадратот на секој реален број е ненегативен

Имајќи го предвид (П2) и она што го кажавме во контекст на (П2) за негативните реални броеви, следново неравенство е очигледно; се нарекува *фундаментално неравенство*:

за секој $a \in \mathbb{R}$ важи $a^2 \geq 0$, со равенство ако и само ако $a = 0$.

Низ неколку примери ќе ја илустрираме примената на горенаведеното неравенство.

<u>Пример 1.1:</u> За произволни $a, b \in \mathbb{R}$ важи неравенството

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

со равенство ако и само ако $a = b$.

Јасно, $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Од тие причини, доволно е да забележиме дека е веродостоен идентитетот $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

Пример 1.2: За произволни $a, b, c \in \mathbb{R}$ важи неравенството

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

со равенство ако и само ако $a = b = c$.

Имено, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) \geq 0$. Затоа, доволно е да забележиме дека е веродостоен идентитетот

$$(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) = \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2).$$

Пример 1.3: За произволни $a, b \in \mathbb{R}$ важи неравенството

$$2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2,$$

со равенство ако и само ако $a = b$.

Доволно е да забележиме дека $2(a^2 + b^2) - (a+b)^2 = (a-b)^2$.

Со помош на пример 1.3, неравенството од пример 1.2 може да се подобри.

Пример 1.4: За произволни $a, b, c \in \mathbb{R}$ важи неравенството

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca + \frac{3}{4}(a-b)^2.$$

Користејќи дека $(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) = \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$, горното неравенство добива облик

$$2((b-c)^2 + (c-a)^2) \geq (b-a)^2.$$

Од друга страна, последното неравенство не е ништо друго туку она од пример 1.3. Навистина, ставајќи $x = b - c$ и $y = c - a$, имаме дека $x + y = b - a$.

Прашање: Кога се достигнува равенство во пример 1.4?

Одговор: Ако и само ако $a + b = 2c$.

Пример 1.5: За произволен $a \in \mathbb{R}^+$ важи неравенството

$$a + \frac{1}{a} \geq 2\,,$$

со равенство ако и само ако $a = 1$.

Непосредно следува од пример 1.1 или ако користиме дека $a + \frac{1}{a} - 2 = (\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})^2$.

2. Квадратна функција $x \mapsto ax^2 + bx + c$

Нека $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$. Пресликувањето $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, зададено со $x \mapsto ax^2 + bx + c$, е општ пример за т.н. *квадратна функција*. Основните два примера за квадратна функција се $x \mapsto x^2$ и $x \mapsto -x^2$. Во контекст на квадратни функции, фундаменталното неравенство од претходниот параграф кажува дека квадратната функција $x \mapsto x^2$ прима исклучиво ненегативни вредности, нејзиниот минимум (најмала можна вредност) е 0 и се достигнува само за $x = 0$. Од друга страна, квадратната функција $x \mapsto -x^2$ прима исклучиво непозитивни вредности, нејзиниот максимум (најголема можна вредност) е 0 и се достигнува само за $x = 0$.

Теорема 2.1: За секој $a \in \mathbb{R}^+$, квадратната функција $x \mapsto ax^2 + bx + c$ има минимум

$$c - \frac{b^2}{4a}\,, \text{ кој се достигнува само за } x = -\frac{b}{2a}.$$

Теорема 2.2: За секој $a \in \mathbb{R}^-$, квадратната функција $x \mapsto ax^2 + bx + c$ има максимум

$$c - \frac{b^2}{4a}\,, \text{ кој се достигнува само за } x = -\frac{b}{2a}.$$

Доказ: Доволно е да забележиме дека $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$. Со овој запис фундаменталното неравенство применето врз $(x + \frac{b}{2a})^2$ ги дава теоремите 2.1 и 2.2.

Во продолжение, горните две теореми ќе ги илустрираме со неколку примери.

Пример 2.3: Ако $x, y \in \mathbb{R}$ имаат збир $x + y = C$, тогаш за нивниот производ важи

$$xy \leq \frac{C^2}{4},$$

при што равенство се достигнува ако и само ако $x = y$.

Имено, примерот следува од теорема 2.2 бидејќи $xy = x(C - x) = -x^2 + Cx$

Забелешка: Со други зборови, при константен збир на променливи собироци, нивниот производ се максимизира доколку множителите (собироците) се еднакви. Овој принцип дозволува интересна геометриска интерпретација: **од сите правоаголници со даден константен периметар, најголема плоштина има соодветниот квадрат**.

Пример 2.4: Ако $a, b \geq 0$, тогаш барем еден од $a(1 - b)$ и $b(1 - a)$ не е поголем од $\frac{1}{4}$.

Навистина, да претпоставиме дека $a(1 - b) > \frac{1}{4}$ и $b(1 - a) > \frac{1}{4}$. Тогаш $a, b < 1$ и важи $a(1 - b)b(1 - a) > \frac{1}{16}$. Од друга страна, според претходниот пример, за секој $0 \leq x \leq 1$ важи $x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$. Затоа, $a(1 - a)b(1 - b) \leq \frac{1}{16}$, што противречи на претпоставката. Од ова заклучуваме дека првичната претпоставка е грешна, односно барем еден од $a(1 - b)$ и $b(1 - a)$ не е поголем од $\frac{1}{4}$.

За позитивни реални броеви, дуален на примерот 2.3 е примерот што следува.

Пример 2.5: Ако $x, y \in \mathbb{R}^+$ имаат производ $xy = C$, тогаш за нивниот збир важи

$$x + y \geq 2\sqrt{C},$$

при што равенство се достигнува ако и само ако $x = y$.

Имено, според пример 1.1, $x + y = x + \frac{C}{x} = \sqrt{x}^{\,2} + \sqrt{\frac{C}{x}}^{\,2} \geq 2\sqrt{x}\sqrt{\frac{C}{x}} = 2\sqrt{C}$, со равенство ако и само ако $x = y = \sqrt{C}$.

Прашање: Зошто е значајно x и y да се позитивни?

Забелешка: Со други зборови, при константен производ и променливи позитивни множители, нивниот збир се минимизира доколку собироците (множителите) се еднакви. Овој принцип дозволува интересна геометриска интерпретација: **од сите правоаголници со дадена константна плоштина, најмал периметар има соодветниот квадрат.**

3. Неравенства меѓу средини

Во овој дел ќе се ограничиме на позитивните реални броеви $a_1, a_2, \dots, a_n$ каде што $n \in \mathbb{N}$. Броевите:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \quad , \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots\ a_n} \quad , \quad \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \quad , \quad \sqrt{\frac{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2}{n}}$$

се наречени, редоследно, *хармониска средина*, *геометриска средина*, *аритметичка средина*, и *квадратна средина* на броевите $a_1, a_2, \dots, a_n$.
Соодветните ознаки за овие средини се $\mathrm{HM}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (англ. *harmonic mean*), $\mathrm{GM}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (англ. *geometric mean*), $\mathrm{AM}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (англ. *aritmetic mean*), и $\mathrm{QM}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (англ. *quadratic mean*). Ќе покажеме дека важи:

Теорема 3.1: За секои $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ се исполнети неравенствата:

$$\mathrm{HM}(a_1, a_2, \dots, a_n) \le \mathrm{GM}(a_1, a_2, \dots, a_n) \le \mathrm{AM}(a_1, a_2, \dots, a_n) \le \mathrm{QM}(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

при што во барем едно се достигнува равенство ако и само ако $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Како подготовка за доказот на теорема 3.1, најпрво ќе го разгледаме случајот $n = 2$. Притоа, наместо a_1 и a_2 ќе употребуваме ознаки a и b (за два произволни позитивни реални броја), и ќе покажеме дека за нив важат следниве три неравенства:

$$\text{(I)}\ \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab}, \quad \text{(II)}\ \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}, \quad \text{(III)}\ \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

при што во барем едно од (I) до (III) се достигнува равенство ако и само ако $a = b$.

Всушност (S4) кажува дека (I) е еквивалентно со (II) во следната смисла:

(I) важи за секои $a, b \in \mathbb{R}^+$, со равенство ако и само ако $a = b$

$$\Updownarrow$$

(II) важи за секои $a, b \in \mathbb{R}^+$, со равенство ако и само ако $a = b$

Навистина, $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \iff \frac{2}{\sqrt{ab}} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \iff \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \le \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$.

Во продолжение ќе дадеме алгебарски докази на (II) и (III).

За секои $a, b \in \mathbb{R}^+$ важи

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

со равенство ако $a = b$. (**)

Доказ: Да појдеме од фундаменталното неравенство:

p: $(a-b)^2 \geq 0$

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$

$(a+b)^2 \geq 4ab$

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$

q: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \ /\cdot 2$

$a + b \geq 2\sqrt{ab} \ /^2$

$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$(a-b)^2 \geq 0$

За секои $a, b \in \mathbb{R}^+$ важи

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

со равенство ако $a = b$. (***)

Доказ: Да појдеме од фундаменталното неравенство:

p: $(a-b)^2 \geq 0$

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2 - 2ab \geq 0$

$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$

q: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \ /^2$

$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a^2+b^2+2ab}{4} \ /\cdot 4$

$2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2 - 2ab \geq 0$

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$(a-b)^2 \geq 0$

Со ова ја покажавме теоремата 3.1 во случајот $n = 2$. Да го разгледаме случајот $n = 4$.

<u>Пример 3.1:</u> За секои $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, важат неравенствата:

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}},$$

со равенство во барем едно од нив ако и само ако $a = b = c = d$.

Најпрво ќе го покажеме левото неравенство:

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \overset{(**)}{\leq} \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \overset{(**)}{\leq} \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

Како што е назначено, во два наврати е искористено (**). Лесно се заклучува дека во двете $\overset{(**)}{\leq}$ истовремено важи равенство ако и само ако $a = b = c = d$.

Аналогно се покажува и десното неравенство, со тоа што наместо (**) во два наврати се користи (***):

$$\frac{a+b+c+d}{4} \leq \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \overset{(***)}{\leq} \frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+d^2}{2}}}{2} \overset{(***)}{\leq} \sqrt{\frac{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{c^2+d^2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}.$$

Со ова ја покажавме теоремата 3.1 во случајот $n = 4$. Подготвени сме да ја покажеме теоремата во случајот $n = 3$.

<u>Пример 3.2:</u> За секои $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ важат неравенствата:

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}},$$

со равенство во барем едно од нив ако и само ако $a = b = c$.

За да го покажеме левото неравенство, користиме дека

$$\mathrm{GM}\big(a, b, c, \mathrm{GM}(a, b, c)\big) = \mathrm{GM}(a, b, c).$$

Така, $\sqrt[3]{abc} = \mathrm{GM}\big(a, b, c, \sqrt[3]{abc}\big) \leq \mathrm{AM}\big(a, b, c, \sqrt[3]{abc}\big) = \sqrt[3]{abc} + \frac{3}{4}\Big(\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc}\Big).$

За да го покажеме десното неравенство, користиме дека

$$\mathrm{QM}\big(a, b, c, \mathrm{QM}(a, b, c)\big) = \mathrm{QM}(a, b, c).$$

Така, $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} = \mathrm{QM}\left(a,b,c,\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right) \geq \mathrm{AM}\left(a,b,c,\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right) =$

$$= \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} - \frac{3}{4}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \frac{a+b+c}{3}\right).$$

Доказ на теорема 3.1: За комплетирање на доказот преостанува да воочиме четири факти.

Факт 1. Неравенството $\mathrm{HM}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \mathrm{GM}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ е еквивалентно со неравенството:
$\mathrm{GM}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}\right) \leq \mathrm{AM}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$, па според тоа (*) се сведува на

$$\mathrm{GM}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \mathrm{AM}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \mathrm{QM}(a_1, a_2, \dots, a_n) \qquad (****)$$

Факт 2. Примерот 3.1 едноставно се воопштува за 8, за 16, итн., за 2^k позитивни реални броеви $a_1, a_2, \dots, a_{2^k}$. Навистина, сè се сведува на тоа дека:

$$\mathrm{GM}(a_1, a_2, \dots, a_{2^k}) = \mathrm{GM}\left(\mathrm{GM}(a_1, \dots, a_{2^{k-1}}), \mathrm{GM}(a_{2^{k-1}+1}, \dots, a_{2^k})\right),$$
$$\mathrm{AM}(a_1, a_2, \dots, a_{2^k}) = \mathrm{AM}\left(\mathrm{AM}(a_1, \dots, a_{2^{k-1}}), \mathrm{AM}(a_{2^{k-1}+1}, \dots, a_{2^k})\right), \text{ и}$$
$$\mathrm{QM}(a_1, a_2, \dots, a_{2^k}) = \mathrm{QM}\left(\mathrm{QM}(a_1, \dots, a_{2^{k-1}}), \mathrm{QM}(a_{2^{k-1}+1}, \dots, a_{2^k})\right).$$

Со други зборови, (****) важи ако n е степен од бројот 2. Притоа, во барем едно од двете неравенства се достигнува равенство ако и само ако $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Факт 3. За секој $n \in \mathbb{N}$ постои степен на бројот 2, т.е. некој 2^k таков што $n \leq 2^k$. На пример, со математичка индукција едноставно се покажува дека $n \leq 2^{n-1}$.

Факт 4. Со помош на фактите 2 и 3, примерот 3.2 се обопштува за секој природен број n. Имено, нека $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ и k е таков што $n \leq 2^k$. Тогаш неравенството $\mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n) \leq \mathrm{AM}(a_1, \dots, a_n)$ следува од:

$$\mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{GM}\big(a_1, \dots, a_n, \underbrace{\mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n), \mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n), \dots, \mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n)}_{2^k - n}\big)$$
$$\leq \mathrm{AM}\big(a_1, \dots, a_n, \underbrace{\mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n), \mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n), \dots, \mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n)}_{2^k - n}\big)$$
$$= \mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n) + \frac{n}{2^k}\big(\mathrm{AM}(a_1, \dots, a_n) - \mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n)\big).$$

Аналогно, неравенството $\mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n) \geq \mathrm{AM}(a_1, \dots, a_n)$ следува од

$$\begin{aligned}\mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n) &= \mathrm{QM}\big(a_1, \dots, a_n, \underbrace{\mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n), \mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n), \dots, \mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n)}_{2^k - n}\big)\\ &\geq \mathrm{AM}\big(a_1, \dots, a_n, \underbrace{\mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n), \mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n), \dots, \mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n)}_{2^k - n}\big)\\ &= \mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n) + \frac{n}{2^k}\big(\mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n) - \mathrm{AM}(a_1, \dots, a_n)\big).\end{aligned}$$

Неколку примени на теоремата 3.1 ќе илустрираме низ примерите што следуваат.

<u>Пример 3.3:</u> Нека $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ се нивна пермутација. Тогаш,

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq n,$$

со равенство ако и само ако $b_1 = a_1,\ b_2 = a_2, \dots,\ b_n = a_n$.

Доволно е да искористиме дека $\mathrm{GM}\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}\right) = 1$ и неравенството $\mathrm{AM} \geq \mathrm{GM}$.

<u>Пример 3.4:</u> За секои $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ важи неравенството

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz,$$

со равенство ако и само ако $x = y = z$.

Во три наврати го користиме (**): еднаш за x и y , еднаш за y и z, и еднаш за z и x. Така добиените три неравенства ги множиме.

<u>Пример 3.5:</u> За секои $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ важи неравенството

$$xy + yz + zx \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy},$$

со равенство ако и само ако $x = y = z$.

Во три наврати го користиме (**): еднаш за xy и zx, еднаш за xy и yz, и еднаш за yz и zx. Така добиените три неравенства ги собираме.

Пример 3.6: За секои $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ важи неравенството

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z,$$

со равенство ако и само ако $x = y = z$.

Во три наврати го користиме (**): еднаш за $\frac{xy}{z}$ и $\frac{zx}{y}$, еднаш за $\frac{xy}{z}$ и $\frac{yz}{x}$, и еднаш за $\frac{yz}{x}$ и $\frac{zx}{y}$. Добиените три неравенства ги собираме.

Пример 3.7: За секои $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ важи неравенството

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq xy + yz + zx,$$

со равенство ако и само ако $x = y = z$.

Од $\text{AM} \geq \text{GM}$ следува дека $\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + yz \geq 3xy$, $\frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} + zx \geq 3yz$, $\frac{z^3}{x} + \frac{x^3}{y} + xy \geq 3zx$. Со собирање на овие три неравенства го добиваме неравенството од примерот.

Пример 3.8: За секои $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ важи неравенството $x^4 + y^4 + z^2 \geq \sqrt{8}xyz$.

Следува од $\text{AM} \geq \text{GM}$ за броевите x^4, y^4, $\frac{z^2}{2}$, $\frac{z^2}{2}$.

Прашање: Кога во претходниот пример се достигнува равенство?

Одговор: Ако и само ако $x = y = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{2}}$.

Пример 3.9: Нека за $x, y \in \mathbb{R}^+$ важи $x + y = 3$. Тогаш е исполнето неравенството

$$xy^2 \leq 4,$$

со равенство ако и само ако $x = 1$, $y = 2$.

Имено, $3 = x + y = x + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \geq 3\sqrt[3]{x\frac{y}{2}\frac{y}{2}}$ повлекува дека $xy^2 \leq 4$, со равенство ако и само ако $x = \frac{y}{2} = 1$.

Пример 3.10: Нека за $x, y \in \mathbb{R}^{+}$ важи $x + y = 5$. Тогаш е исполнето неравенството

$$x^2 y^3 \leq 108,$$

со равенство ако и само ако $x = 2,\ y = 3$.

Аналогно на претходниот пример, користи дека $x + y = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{y}{3} + \frac{y}{3}$.

ТЕМА 6

Конгруенции во $\mathbb{Z}$

Конгруенциите претставуваат моќна алатка која се користи во теоријата на броеви и се занимава со остатоците при делење. Со оваа техника може да се докажуваат признаци за деливост, како и деливости на изрази со степени и полиноми. Во текстот се дадени неколку примени на конгруенциите.

$$a \equiv b(mod\ m) \Leftrightarrow m|a-b$$

$$2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 0(mod 7)$$

$$19|a \Leftrightarrow 19|(\overline{a_1a_0} + 5 \cdot \overline{a_3a_2} + 5^2 \cdot \overline{a_5a_4} + 5^3 \cdot \overline{a_7a_6} + \cdots)$$

Дефиниција 1: Нека $m \in \mathbb{N}$ и $a, b \in \mathbb{Z}$. Ако $m|a-b$, тогаш велиме дека бројот a е *конгруентен* со бројот b по модул m и пишуваме

$$a \equiv b(\mathrm{mod}\, m).$$

Ако $m \nmid a-b$, тогаш велиме дека бројот a не е конгруентен со бројот b по модул m.

Пример 1: Нека $a = 17, b = 11$ и $m = 3$. Бидејќи $3|(17-11)$, $17 \equiv 11(\mathrm{mod}\, 3)$.

Теорема 1: Конгруенцијата $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ важи ако и само ако при делење со m броевите a и b даваат еднакви остатоци.

Доказ: Имајќи предвид дека тврдењето на теоремата е искажано во облик на еквиваленција, поодделно ќе ги докажеме двете импликации.

$\boxed{\Rightarrow}$ Претпоставувајќи дека $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, нека $a = mp + r$ и $b = mq + s$ се делењата со остаток на a и b со m. Со други зборови, p, q, r и s се ненегативни цели броеви и уште $r, s < m$. Тогаш,

$$m|(mp + r) - (mq + s) \text{ т.е. } m|m(p - q) + (r - s).$$

Значи, $m|r - s$. Од друга страна, $-m < r - s < m$ (бидејќи $0 \leq r, s < m$), што повлекува дека $r - s = 0$, т.е. $r = s$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нека при делење со m броевите a и b даваат еднакви остатоци, на пример, нека $a = mp + r$ и $b = mq + r$. Тогаш,

$$a - b = (mp + r) - (mq + r) = m(p - q).$$

Значи, $m|a - b$, т.е. $a \equiv b\ (\mathrm{mod}\, m)$.

Пример 2: Од $33 = 4 \cdot 8 + 1$ и $25 = 3 \cdot 8 + 1$ имаме дека $33 \equiv 25(\mathrm{mod}\, 8)$.

Пример 3: $21 \equiv 49(\mathrm{mod}\, 4)$, бидејќи $21 = 4 \cdot 5 + 1$ и $49 = 4 \cdot 12 + 1$.

$29 \equiv -3(\mathrm{mod}\, 4)$, бидејќи $29 = 4 \cdot 7 + 1$ и $-3 = 4 \cdot (-1) + 1$.

$37 \equiv 9(\mathrm{mod} 7)$, бидејќи $37 = 7 \cdot 5 + 2$ и $9 = 7 \cdot 1 + 2$.

Теорема 2: $a \equiv b (\text{mod } m)$ ако и само ако постои $k \in \mathbb{Z}$ таков што $a = b + km$.

Доказ: $\boxed{\Rightarrow}$ Нека $a \equiv b (\text{mod } m)$, т.е. $m|a - b$. Тогаш, постои $k \in \mathbb{Z}$ така што $a - b = km$, односно $a = b + km$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нека $a = b + km$. Од $a - b = km$ следува $m|a - b$, т.е. $a \equiv b (\text{mod } m)$.

Последица: Ако $a = km + r$ и $0 \leq r < m$, тогаш $a \equiv r (\text{mod } m)$.

Доказ: Равенството $a - r = km$ повлекува дека $m|a - r$ т.е. $a \equiv r (\text{mod } m)$.

Заклучок: $a \equiv 0 (\text{mod } m)$ ако и само ако $m|a$.

Следната теорема кажува дека секоја конгруенција претставува релација на еквиваленција во множеството на цели броеви. Со други зборови, секоја конгруенција е рефлексивна, симетрична и транзитивна операција.

Теорема 3: За секои цели броеви a, b и c и релацијата $\equiv (\text{mod } m)$ важи:

(рефлексивност) $a \equiv a (\text{mod } m)$,

(симетричност) $a \equiv b (\text{mod } m) \Rightarrow b \equiv a (\text{mod } m)$,

(транзитивност) $a \equiv b (\text{mod } m)$ и $b \equiv c (\text{mod } m) \Rightarrow a \equiv c (\text{mod } m)$.

Релацијата $\equiv (\text{mod } m)$ е еквиваленција во множеството $\mathbb{Z}$.

Доказ: Од $a - a = 0$ следува $m|a - a$, т.е. $a \equiv a (\text{mod } m)$, со што ја покажавме рефлексивноста. Нека $a \equiv b (\text{mod } m)$, т.е. $m|a - b$. Бидејќи $b - a = -(a - b)$, следува дека $m|b - a$, односно $b \equiv a (\text{mod } m)$, со што ја покажавме и симетричноста. Останува да ја покажеме транзитивноста. Нека $a \equiv b (\text{mod } m)$ и $b \equiv c (\text{mod } m)$, т.е. $m|a - b$ и $m|b - c$. Тогаш, $m|a - b + b - c$ односно, $m|a - c$. Значи, $a \equiv c\ (\text{mod } m)$.

Следната теорема кажува дека конгруенциите не се „обични“ еквиваленции во множеството на цели броеви, туку се еквиваленции кои се согласни со операциите собирање и множење.

Теорема 4: Ако $a \equiv b (\text{mod } m)$ и $c \equiv d (\text{mod } m)$, тогаш:

$a + c \equiv (b + d) (\text{mod } m)$,

$a - c \equiv (b - d) (\text{mod } m)$,

$ac \equiv bd (\text{mod } m)$.

Доказ 1: Нека $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ и $c \equiv d(\mathrm{mod}\ m)$, т.е. $m|a-b$ и $m|c-d$. Собирајќи ги последните две деливости, добиваме дека $m|a-b+c-d$, т.е. $m|a+c-(b+d)$. Со тоа покажавме дека $a+c \equiv (b+d)(\mathrm{mod}\ m)$.

Слично, одземајќи ги една од друга деливостите $m|a-b$ и $m|c-d$, добиваме дека $m|(a-c)-(b-d)$, т.е. $a-c \equiv (b-d)(\mathrm{mod}\ m)$.

Од $m|a-b$ и $m|c-d$ следува и деливоста $m|(a-b)\cdot c+(c-d)\cdot b$, што со средување дава $m|ac-bc+bc-bd$, т.е. $m|ac-bd$. Така покажавме и дека $ac \equiv bd(\mathrm{mod}\ m)$.

Доказ 2: Бидејќи $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$, имаме дека $a = mp_1 + r_1$ и $b = mq_1 + r_1$. Слично, од $c \equiv d(\mathrm{mod}\ m)$ следува дека $c = mp_2 + r_2$ и $d = mq_2 + r_2$. Оттука,

$$a + c = mp_1 + r_1 + mp_2 + r_2 = m(p_1 + p_2) + r_1 + r_2 = mp_3 + r_3,$$

$$b + d = mq_1 + r_1 + mq_2 + r_2 = m(q_1 + q_2) + r_1 + r_2 = mq_3 + r_3.$$

Со тоа покажавме дека $a+c \equiv (b+d)(\mathrm{mod}\ m)$. Слично се докажуваат и останатите две тврдења.

Последица 1: Ако $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$, тогаш за секој $c \in \mathbb{Z}$ се исполнети конгруенциите:

$$a + c \equiv (b + c)(\mathrm{mod}\ m),$$

$$a - c \equiv (b - c)(\mathrm{mod}\ m),$$

$$ac \equiv bc(\mathrm{mod}\ m).$$

Доказ: Користејќи дека $c \equiv c(\mathrm{mod}\ m)$, последицата следува од претходната теорема.

Последица 2: Ако $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ и $n \in \mathbb{N}$, тогаш $a^n \equiv b^n(\mathrm{mod}\ m)$.

Скица на доказ: Од $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ и $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$, користејќи ја теоремата 4, заклучуваме дека $a^2 \equiv b^2(\mathrm{mod}\ m)$. Слично, од $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ и $a^2 \equiv b^2(\mathrm{mod}\ m)$, следува дека $a^3 \equiv b^3(\mathrm{mod}\ m)$ итн., т.е.

$$\begin{gathered} a^2 \equiv b^2(\mathrm{mod}\ m), \\ a^3 \equiv b^2(\mathrm{mod}\ m), \\ \vdots \\ a^n \equiv b^n(\mathrm{mod}\ m). \end{gathered}$$

Тврдењето $a^n \equiv b^n(\mathrm{mod}\ m)$ е добиено со емпириска индукција, а се докажува со принципот на математичка индукција.

Последица 3: Ако $a \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$ и $k, s \in \mathbb{Z}$, тогаш:

$$a \equiv (b + km)(\mathrm{mod}\, m)$$

$$a + sm \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$$

$$a + sm \equiv (b + km)(\mathrm{mod}\, m).$$

Доказ: Нека $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, т.е. $m|a - b$. Тогаш, $m|a - b - km$, т.е. $m|a - (b + km)$. Со тоа покажавме дека $a \equiv (b + km)(\mathrm{mod}\, m)$. Слично се докажуваат и останатите две тврдења.

ПРИМЕНА НА КОНГРУЕНЦИИТЕ ВО $\mathbb{Z}$

А) ОДРЕДУВАЊЕ НА ОСТАТОК ПРИ ДЕЛЕЊЕ СО НЕКОЈ БРОЈ

Пример 1: Одреди го остатокот при делење на бројот 6^{1990} со 7.

Прв начин:

$6 \equiv 6(\text{mod } 7)$

$6^2 \equiv 36(\text{mod } 7)$

$6^2 \equiv 1(\text{mod } 7)/\ ^{995}$ $\qquad (1990 = 2 \cdot 995)$

$6^{1990} \equiv 1(\text{mod } 7)$

Значи, остатокот при делење на бројот 6^{1990} со 7 е 1.

Втор начин:

$6 \equiv 6(\text{mod } 7)$

$6 \equiv -1(\text{mod } 7)/\ ^{1990}$

$6^{1990} \equiv 1(\text{mod } 7)$

Значи, остатокот при делење на бројот 6^{1990} со 7 е 1.

Трет начин:

$6 \equiv 6(\text{mod } 7)$

$6 \equiv -1(\text{mod } 7)/\ ^{2}$

$6^2 \equiv 1(\text{mod } 7)/\ ^{995}$ $\qquad (1990 = 2 \cdot 995)$

$6^{1990} \equiv 1(\text{mod } 7)$

Значи, остатокот при делење на бројот 6^{1990} со 7 е 1.

Пример 2: Одреди го остатокот при делење на бројот 3^{555} со 10.

$3 \equiv 3(\text{mod } 10)$

$3^2 \equiv 9(\text{mod } 10)$

$3^2 \equiv -1(\text{mod } 10)/\ ^{277}$ $\qquad (354 = 2 \cdot 277)$

$3^{554} \equiv -1(\text{mod} 10)$

Со множење на конгруенциите $3 \equiv 3(\text{mod}10)$ и $3^{554} \equiv -1(\text{mod}10)$ се добива:
$3^{555} \equiv -3(\text{mod}10)$, односно $3^{555} \equiv\ 7(\text{mod}10)$.
Значи, остатокот при делење на бројот 3^{555} со 10 е 7.

Пример 3: Одреди го остатокот при делење на бројот $222^{555}+555^{222}$ со 7.

$222 \equiv 5(\mathrm{mod}\ 7)/\ ^{2}$ $\qquad (222 = 31 \cdot 7 + 5)$

$222^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 7)$

$222^3 \equiv -1(\mathrm{mod}\ 7)\ /\ ^{185}$ $\qquad (555 = 3 \cdot 185)$

$222^{555} \equiv -1(\mathrm{mod}\ 7)$

$555 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7)/\ ^{2}$ $\qquad (555 = 79 \cdot 7 + 2)$

$555^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 7)$

$555^3 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)\ /\ ^{74} 222 = 3 \cdot 74$

$555^{222} \equiv 1(\mathrm{mod} 7)$

Со собирање на конгруенциите $222^{555} \equiv -1(\mathrm{mod}\ 7)$ и $555^{222} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$ се добива $222^{555}+555^{222} \equiv (-1+1)(\mathrm{mod}\ 7)$, т.е. $222^{555}+555^{222} \equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$.
Значи, остатокот при делење на бројот $222^{555}+555^{222}$ со 7 е 0.

Пример 4: Одреди го остатокот при делење на бројот $(5^{100}+55)^{100}$ со 24.

$5 \equiv 5(\mathrm{mod}\ 24)$

$5^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 24)/\ ^{50}$

$5^{100} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 24)$

$5^{100}+55 \equiv 56(\mathrm{mod}\ 24)$

$5^{100}+55 \equiv 8(\mathrm{mod}\ 24)/\ ^{2}$

$(5^{100}+55)^2 \equiv 16(\mathrm{mod}\ 24)$

$(5^{100}+55)^3 \equiv 8(\mathrm{mod}\ 24)$

$(5^{100}+55)^4 \equiv 16(\mathrm{mod} 24)$

Заклучуваме дека изразот $5^{100}+55$ секогаш кога е степенуван на парен степенов показател е конгруентен со 16, а секогаш кога е степенуван на непарен степенов показател е конгруентен со 8. Значи, $(5^{100}+55)^{100} \equiv 16(\mathrm{mod}\ 24)$, т.е. остатокот при делење на $(5^{100}+55)^{100}$ со 24 е 16.

Задачи:

Одреди го остатокот при делење на:

а) 8^{42} со 5

б) $2222^{5555} + 5555^{2222}$ со 7

в) 14^{256} со 17

Решенија:

а) $8 \equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)$

$8^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 5)$

$8^3 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 5)$

$8^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)/\ ^{10}$

$8^{40} \equiv 1(\mathrm{mod} 5)$

Со множење на конгруенциите $8^{40} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$ и $8^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 5)$ се добива:

$8^{42} \equiv 4(\mathrm{mod}\ 5)$.

Значи, остатокот при делење на бројот 8^{42} со 5 е 4.

б) $2222 \equiv 3(\mathrm{mod}\ 7)$ $\qquad (2222 = 317 \cdot 7 + 3)$

$2222^2 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7)$

$2222^3 \equiv -1(\mathrm{mod}\ 7)\ /\ ^2$

$2222^6 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)/\ ^{925}$ $\qquad (5555 = 6 \cdot 925 + 5)$

$2222^{5550} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$

Со множење на конгруенциите $2222^{5550} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$ и $2222^5 \equiv -2(\mathrm{mod}\ 7)$ се добива:

$2222^{5555} \equiv -2(\mathrm{mod}\ 7)$

$5555 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 7)$ $\qquad (5555 = 793 \cdot 7 + 4)$

$5555^2 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7)$

$5555^3 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)\ /\ ^{740}$ $\qquad (2222 = 3 \cdot 740 + 2)$

$5555^{2220} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$

Со множење на конгруенциите $5555^{2220} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$ и $5555^{2} \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7)$ се добива: $5555^{2222} \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7)$.

Сега, со собирање на конгруенциите $2222^{5555} \equiv -2(\mathrm{mod} 7)$ и $5555^{2222} \equiv 2(\mathrm{mod} 7)$ се добива $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv (-2+2)(\mathrm{mod}\ 7)$, т.е. $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$.

Значи, остатокот при делење на бројот $2222^{5555} + 5555^{2222}$ со 7 е 0.

в) $14 \equiv 14(\mathrm{mod}\ 17)$
$14^{2} \equiv 9(\mathrm{mod}\ 17)$
$14^{3} \equiv 7(\mathrm{mod}\ 17)$
$14^{4} \equiv 13(\mathrm{mod}\ 17)$
$14^{5} \equiv 12(\mathrm{mod}\ 17)$
$14^{6} \equiv 15(\mathrm{mod}\ 17)$
$14^{7} \equiv 6(\mathrm{mod}\ 17)$
$14^{8} \equiv 16(\mathrm{mod}\ 17)$
$14^{8} \equiv -1(\mathrm{mod}\ 17) /\ ^{2}$
$14^{16} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 17) /\ ^{16}$
$14^{256} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 17)$

Значи, остатокот при делење на бројот 14^{256} со 17 е 1.

Б) ОДРЕДУВАЊЕ НА КОЈА ЗАВРШУВА ДАДЕН СТЕПЕН

Бидејќи $a = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2 a_1 a_0} =$

$$= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 =$$

$$= 10A + a_0,$$

значи дека бројот a завршува на цифрата која е остаток при делење на a со 10.

Пример1: Одреди на која цифра завршува степенот 6^{811}.

$6 \equiv 6(\text{mod } 10)$

$6^2 \equiv 6(\text{mod } 10)$

$6^3 \equiv 1(\text{mod } 10)$

$6^{811} \equiv 6(\text{mod}7)$

Значи, остатокот при делење на бројот 6^{811} со бројот 10 е 6. Со други зборови, степенот 6^{811} завршува на цифрата 6.

Задачи:

Одреди на која цифра завршува степенот:

а) 2^{1000}

б) 3^{9999}

Решенија:

а) $2 \equiv 2(\text{mod } 10)$

$2^2 \equiv 4(\text{mod } 10)$

$2^3 \equiv 8(\text{mod } 10)$

$2^4 \equiv 6(\text{mod } 10)$

$2^5 \equiv 2(\text{mod } 10)$

$2^6 \equiv 4(\text{mod } 10)$

$2^7 \equiv 8(\text{mod } 10)$

$2^8 \equiv 6(\text{mod } 10)$

$2^9 \equiv 2(\text{mod } 10)$

Оттука заклучуваме дека:

$2^{4k-3} \equiv 2(\text{mod } 10)$

$2^{4k-2} \equiv 4(\text{mod } 10)$

$2^{4k-1} \equiv 8(\text{mod } 10)$

$2^{4k} \equiv 6(\text{mod} 10)$

Бидејќи $1000 : 4 = 250$, т. е. $1000 = 4k$ за $k = 250$, следува дека $2^{1000} \equiv 6(\text{mod } 10)$. Значи, степенот 2^{1000} завршува на цифрата 6.

б) $3 \equiv 3(\text{mod } 10)$

$3^2 \equiv 9(\text{mod } 10)$

$3^3 \equiv 7(\text{mod } 10)$

$3^4 \equiv 1(\text{mod } 10)$ $\qquad (9999 = 4 \cdot 2499 + 3)$

$3^{9996} \equiv 1(\text{mod} 10)$

Со множење на конгруенциите $3^{9996} \equiv 1(\text{mod} 10)$ и $3^3 \equiv 7(\text{mod} 10)$ се добива:

$3^{9999} \equiv 7(\text{mod} 10)$.

Значи, степенот 3^{9999} завршува на цифрата 7.

В) ПРОВЕРУВАЊЕ НА ДЕЛИВОСТ НА БРОЕН ИЗРАЗ СО БРОЈ

Пример1: Провери дали изразот $7^{100}+11^{100}+17$ е делив со 13.

$7 \equiv 7(\text{mod } 13)$

$7^2 \equiv 10(\text{mod } 13)$

$7^3 \equiv 5(\text{mod } 13)$

$7^4 \equiv 9(\text{mod } 13)$

$7^5 \equiv 11(\text{mod } 13)$

$7^6 \equiv -1(\text{mod } 13)/\ ^{16}$ $\qquad (100 = 6 \cdot 16 + 4)$

$7^{96} \equiv 1(\text{mod} 13)$

Со множење на конгруенциите $7^{96} \equiv 1(\text{mod } 13)$и $7^4 \equiv 9(\text{mod } 13)$ се добива:
$7^{100} \equiv 9(\text{mod } 13)$

$11 \equiv 11(\text{mod } 13)$

$11^2 \equiv 4(\text{mod } 13)$

$11^3 \equiv 5(\text{mod } 13)$

$11^4 \equiv 3(\text{mod } 13)$

$11^5 \equiv 7(\text{mod } 13)$

$11^6 \equiv -1(\text{mod } 13)/\ ^{16}$ $\qquad (100 = 6 \cdot 16 + 4)$

$11^{96} \equiv 1(\text{mod} 13)$

Со множење на $11^{96} \equiv 1(\text{mod } 13)$ и $11^4 \equiv 3(\text{mod } 13)$ се добива:
$11^{100} \equiv 3(\text{mod} 13)$.

За дадениот израз добиваме: $7^{100}+11^{100}+17 \equiv (9+3+17)(\text{mod } 13)$

$\equiv 29(\text{mod } 13)$

$\equiv 3(\text{mod } 13)$.

Значи, изразот $7^{100}+11^{100}+17$ не е делив со бројот 13 (дава остаток 3).

Задачи:

Провери дали изразот:

а) $13^{101} - 13^{95}$ е делив со 7.

б) $3^{103} + 5^{105}$ е делив со 7.

Решенија:

а) $13 \equiv 6(\mathrm{mod}7)$
$13^2 \equiv 1(\mathrm{mod}7)\ /\ ^{50}$
$13^{100} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$
$13^{101} \equiv 6(\mathrm{mod}\ 7)$

$13 \equiv 6(\mathrm{mod}\ 7)$
$13^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)\ /\ ^{47}$
$13^{94} \equiv 1(\mathrm{mod}7)$
$13^{95} \equiv 6(\mathrm{mod}7)$

Добиваме $13^{101} - 13^{95} \equiv (6-6)(\mathrm{mod}7) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$. Значи, разликата $13^{101} - 13^{95}$ е делива со бројот 7.

б) $3 \equiv 3(\mathrm{mod}7)$
$3^2 \equiv 2(\mathrm{mod}7)$
$3^3 \equiv -1(\mathrm{mod}\ 7)$
$3^6 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$
$3^{102} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$
$3^{103} \equiv 3(\mathrm{mod}\ 7)$

$5 \equiv 5(\mathrm{mod}\ 7)$
$5^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 7)$
$5^3 \equiv -1(\mathrm{mod}\ 7)$
$5^6 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$
$5^{102} \equiv 1(\mathrm{mod}7)$
$5^{105} \equiv -1(\mathrm{mod}7)$

Добиваме дека $3^{103} + 5^{105} \equiv (3-1)(\mathrm{mod}\ 7) \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7)$. Значи, збирот $3^{103} + 5^{105}$ не е делив со бројот 7 (дава остаток 2).

Г) ДОКАЖУВАЊЕ НА ДЕЛИВОСТ НА БРОЕН ИЗРАЗ СО БРОЈ

$n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n)$
$n - k \equiv -k (\mathrm{mod}\ n)$
$(n-k)^n \equiv (-k)^n (\mathrm{mod}\ n)$

Ако n е непарен, тогаш важи:
$(n-k)^n + k^n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n)$

Пример1: Докажи дека збирот $1^{1991} + 2^{1991} + \cdots + 1991^{1991}$ е делив со 1991.

За $n = 1991$, имаме: $(1991 - k)^{1991} + k^{1991} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 1991)$.

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{- за } k = 0 & 1991^{1991} + 0^{1991} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 1991) \\
\text{- за } k = 1 & 1990^{1991} + 1^{1991} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 1991) \\
\text{- за } k = 2 & 1989^{1991} + 2^{1991} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 1991) \\
\text{- за } k = 3 & 1988^{1991} + 3^{1991} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 1991) \\
 & \vdots \\
\text{- за } k = 994 & 997^{1991} + 994^{1991} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 1991) \\
\text{- за } k = 995 & 996^{1991} + 995^{1991} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 1991)
\end{array}\right\} +$$

Оттука,

$$1^{1991} + 2^{1991} + \cdots + 994^{1991} + 995^{1991} + 996^{1991} + 997^{1991} + \cdots + 1990^{1991} + 1991^{1991} \equiv 0 (\mathrm{mod} 1991).$$

Значи, збирот $1^{1991} + 2^{1991} + \cdots + 1991^{1991}$ е делив со 1991.

Задачи:

Докажи дека бројниот израз:

а) $1^{2007} + 2^{2007} + \cdots + 2007^{2007}$ е делив со 2007.

б) $19^{91} - 91^{19}$ е делив со 18.

Решенија:

а) Ќе користиме дека $(n-k)^n+k^n \equiv 0(\mathrm{mod}\; n)$ за секој непарен n.

За $n = 2007$ имаме: $(2007-k)^{2007} + k^{2007} \equiv 0(\mathrm{mod}\; 2007)$.

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{- за } k=0 & 2007^{2007}+0^{2007} \equiv 0(\mathrm{mod}\; 2007) \\
\text{- за } k=1 & 2006^{2007}+1^{2007} \equiv 0(\mathrm{mod}\; 2007) \\
\text{- за } k=2 & 2005^{2007}+2^{2007} \equiv 0(\mathrm{mod}\; 2007) \\
\text{- за } k=3 & 2004^{2007}+3^{2007} \equiv 0(\mathrm{mod}\; 2007) \\
 & \vdots \\
\text{- за } k=1002 & 1005^{2007}+1002^{2007} \equiv 0(\mathrm{mod}\; 2007) \\
\text{- за } k=1003 & 1004^{2007}+1003^{2007} \equiv 0(\mathrm{mod}\; 2007)
\end{array}\right\} +$$

Оттука,

$$1^{2007}+2^{2007}+\cdots+1002^{2007}+1003^{2007}+1004^{2007}+1005^{2007}+\cdots+ \\ +2006^{2007}+2007^{2007} \equiv 0(\mathrm{mod}\; 2007).$$

Значи, бројниот израз $1^{2007}+2^{2007}+\cdots+2007^{2007}$ е делив со 2007.

б) $19 \equiv 1(\mathrm{mod}\; 18)$

$19^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\; 18) \; /\; ^{45}$

$19^{90} \equiv 1(\mathrm{mod}\; 18)$

Со множење на конгруенциите $19^{90} \equiv 1(\mathrm{mod}\; 18)$ и $19 \equiv 1(\mathrm{mod}\; 18)$ се добива: $19^{91} \equiv 1(\mathrm{mod} 18)$

$91 \equiv 1(\mathrm{mod}\; 18)$

$91^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\; 18) \; /\; ^{9}$

$91^{18} \equiv 1(\mathrm{mod}\; 18)$

Со множење на конгруенциите $91^{18} \equiv 1(\mathrm{mod}\; 18)$ и $91 \equiv 1(\mathrm{mod}\; 18)$ се добива: $91^{19} \equiv 1(\mathrm{mod}\; 18)$.

Добиваме дека $19^{91}-91^{19} \equiv (1-1)(\mathrm{mod} 18) \equiv 0(\mathrm{mod} 18)$. Значи, изразот $19^{91}-91^{19}$ е делив со бројот 18.

Д) ДОКАЖУВАЊЕ НА ДЕЛИВОСТ СО ДАДЕН БРОЈ НА ИЗРАЗ ШТО СОДРЖИ САМО СТЕПЕНИ

Пример 1: Докажи дека изразот $42^{n+3}+29^{n+1}+9^{2n+1}$ е делив со 13.

$42\equiv 3(\mathrm{mod}\ 13)$

$42^2\equiv 9(\mathrm{mod}\ 13)$

$42^3\equiv 1(\mathrm{mod}\ 13)$

$42^n\equiv 3^n(\mathrm{mod}\ 13)$

Со множење на $42^n\equiv 3^n(\mathrm{mod}\ 13)$ и $42^3\equiv 1(\mathrm{mod}\ 13)$ се добива:

$42^{n+3}\equiv 3^n(\mathrm{mod}\ 13)$ ....(1)

$29\equiv 3(\mathrm{mod}\ 13)$

$29^n\equiv 3^n(\mathrm{mod}\ 13)$

Со множење на $29^n\equiv 3^n(\mathrm{mod}\ 13)$ и $29\equiv 3(\mathrm{mod}\ 13)$ се добива:

$29^{n+1}\equiv 3\cdot 3^n(\mathrm{mod} 13)$ ....(2)

$9\equiv 9(\mathrm{mod}\ 13)$

$9^2\equiv 3(\mathrm{mod}\ 13)$

$9^{2n}\equiv 3^n(\mathrm{mod}\ 13)$

Со множење на $9^{2n}\equiv 3^n(\mathrm{mod}\ 13)$ и $9\equiv 9(\mathrm{mod}\ 13)$ се добива:

$9^{2n+1}\equiv 9\cdot 3^n(\mathrm{mod} 13)$ ....(3)

Од (1), (2) и (3) се добива
$$\begin{aligned}42^{n+3}+29^{n+1}+9^{2n+1}&\equiv(3^n+3\cdot 3^n+9\cdot 3^n)(\mathrm{mod}\ 13)\\&\equiv 3^n(1+3+9)(\mathrm{mod}\ 13)\\&\equiv 3^n\cdot 13(\mathrm{mod}\ 13)\\&\equiv 0(\mathrm{mod}\ 13)\end{aligned}$$

Значи, изразот $42^{n+3}+29^{n+1}+9^{2n+1}$ е делив со бројот 13.

Пример 2: Докажи дека изразот $7^{n+2}+8^{2n+1}$ е делив со 57.

$7 \equiv 7(\text{mod } 57)$

$7^2 \equiv 49(\text{mod } 57)$

$7^n \equiv 7^n(\text{mod } 57)$

Со множење на $7^n \equiv 7^n(\text{mod } 57)$ и $7^2 \equiv 49(\text{mod } 57)$ се добива:

$7^{n+2} \equiv 49 \cdot 7(\text{mod } 57)$ …………(1)

$8 \equiv 8(\text{mod } 57)$

$8^2 \equiv 7(\text{mod } 57)$

$8^{2n} \equiv 7^n(\text{mod } 57)$

Со множење на $8^{2n} \equiv 7^n(\text{mod } 57)$ и $8 \equiv 8(\text{mod } 57)$) се добива:

$8^{2n+1} \equiv 8 \cdot 7^n(\text{mod} 57)$ …………(2)

Од (1) и (2) се добива: $7^{n+2}+8^{2n+1} \equiv (49 \cdot 7^n + 8 \cdot 7^n)(\text{mod } 57)$

$$\begin{aligned} &\equiv 7^n(49+8)(\text{mod } 57) \\ &\equiv 3^n \cdot 57(\text{mod } 57) \\ &\equiv 0(\text{mod } 57) \end{aligned}$$

Значи, изразот $7^{n+2}+8^{2n+1}$ е делив со бројот 57.

Задачи:

Докажи дека изразот:

а) $47^{n+3}+5^{n+2}+69^n$ е делив со 11.

б) $8^{n+2}+9^{2n+1}$ е делив со 73.

в) $37^{n+2}+51^{n+1}+30^n$ е делив со 7.

Решенија:

а) $47 \equiv 3(\text{mod } 11)$

$47^2 \equiv 9(\text{mod } 11)$

$47^3 \equiv 5(\text{mod } 11)$

$47^n \equiv 3^n(\text{mod } 11)$

Со множење на $47^n \equiv 3^n (\mathrm{mod}\ 11)$ и $47^3 \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 11)$ се добива:

$47^{n+3} \equiv 5 \cdot 3^n (\mathrm{mod}\ 11)$ …………(1)

$5 \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 11)$

$5^2 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 11)$

$5^{2n} \equiv 3^n (\mathrm{mod}\ 11)$

Со множење на $5^{2n} \equiv 3^n (\mathrm{mod}\ 11)$ и $5 \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 11)$ се добива:

$5^{2n+1} \equiv 5 \cdot 3^n (\mathrm{mod}\ 11)$ …………(2)

$69 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 11)$

$69^n \equiv 3^n (\mathrm{mod}\ 11)$ …………(3)

Од (1), (2) и (3) се добива: $47^{n+3} + 5^{n+2} + 69^n \equiv (5 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^n + 3^n)(\mathrm{mod}\ 11)$

$$\equiv 3^n (5 + 5 + 1)(\mathrm{mod}\ 11)$$

$$\equiv 3^n \cdot 11 (\mathrm{mod}\ 11)$$

$$\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 11)$$

Значи, изразот $47^{n+3} + 5^{n+2} + 69^n$ е делив со бројот 11.

б) $8 \equiv 8 (\mathrm{mod}\ 73)$

$8^2 \equiv 64 (\mathrm{mod}\ 73)$

$8^n \equiv 8^n (\mathrm{mod}\ 73)$

Со множење на $8^n \equiv 8^n (\mathrm{mod}\ 73)$ и $8^2 \equiv 64 (\mathrm{mod}\ 73)$ се добива:

$8^{n+2} \equiv 64 \cdot 8^n (\mathrm{mod}\ 73)$ …………(1)

$9 \equiv 9 (\mathrm{mod}\ 73)$

$9^2 \equiv 8 (\mathrm{mod}\ 73)$

$9^{2n} \equiv 8^n (\mathrm{mod}\ 73)$

Со множење на $9^{2n} \equiv 8^n (\mathrm{mod}\ 73)$ и $9 \equiv 9 (\mathrm{mod}\ 73)$ се добива:

$9^{2n+1} \equiv 9 \cdot 8^n (\mathrm{mod} 73)$ …………(2)

Од (1) и (2) се добива: $8^{n+2} + 9^{2n+1} \equiv (64 \cdot 8^n + 9 \cdot 8^n)(\text{mod } 11)$

$$\equiv 8^n(64 + 9)(\text{mod } 11)$$

$$\equiv 8^n \cdot 73(\text{mod } 11)$$

$$\equiv 0(\text{mod } 11)$$

Значи, изразот $8^{n+2} + 9^{2n+1}$ е делив со бројот 73.

в) $37 \equiv 2(\text{mod } 7)$
$37^2 \equiv 4(\text{mod } 7)$
$37^n \equiv 2^n(\text{mod } 7)$

Со множење на $37^n \equiv 2^n(\text{mod } 7)$ и $37^2 \equiv 4(\text{mod } 7)$ се добива:

$37^{n+2} \equiv 4 \cdot 2^n(\text{mod } 7)$ ....(1)

$51 \equiv 2(\text{mod } 7)$

$51^n \equiv 2^n(\text{mod } 7)$

Со множење на $51^n \equiv 2^n(\text{mod } 7)$ и $51 \equiv 2(\text{mod } 7)$ се добива:

$51^{n+1} \equiv 2 \cdot 2^n(\text{mod } 7)$ ....(2)

$30 \equiv 2(\text{mod } 7)$

$30 \equiv 2^n(\text{mod } 7)$ ....(3)

Од (1), (2) и (3) се добива: $37^{n+2} + 51^{n+1} + 30^n \equiv (4 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^n + 2^n)(\text{mod } 11)$

$$\equiv 2^n(4 + 2 + 1)(\text{mod } 11)$$

$$\equiv 3^n \cdot 7(\text{mod } 11)$$

$$\equiv 0(\text{mod } 11)$$

Значи, изразот $37^{n+2} + 51^{n+1} + 30^n$ е делив со бројот 7.

Ѓ) ДОКАЖУВАЊЕ НА ДЕЛИВОСТ НА ПОЛИНОМЕН ИЗРАЗ СО БРОЈ

Пример 1: Докажи дека $4|n^2(n^2+1)$.

Случај 1: $n=4k$

$n \equiv 0(\mathrm{mod}4)$

$n^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$

$n^2-1 \equiv -1(\mathrm{mod}\ 4)$

$n^2(n^2-1) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ ....(1).

Случај 2: $n=4k+1$

$n \equiv 1(\mathrm{mod}4)$

$n^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$

$n^2-1 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$

$n^2(n^2-1) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$ ....(2).

Случај 3: $n=4k+2$

$n \equiv 2(\mathrm{mod}4)$

$n^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$

$n^2-1 \equiv -1(\mathrm{mod}\ 4)$

$n^2(n^2-1) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ ....(3).

Случај 4: $n=4k+3$

$n \equiv 3(\mathrm{mod}4)$

$n^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$

$n^2-1 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$

$n^2(n^2-1) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$ ....(4).

Од (1), (2), (3) и(4) следува дека $4|n^2(n^2+1)$.

Пример 2: Докажи дека $30|n^5-n$.

Прв начин: $n^5-n=n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)=n(n-1)(n+1)(n^2+1)=$

$$=n(n-1)(n+1)(n^2-4+5)=$$

$$=n(n-1)(n+1)(n^2-4)+5n(n-1)(n+1)=$$

$$=n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)+5n(n-1)(n+1)=$$

$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5(n-1)n(n+1)$.

Бидејќи, производот на пет последователни природни броеви е делив со 2, 3 и 5, а производот на три последователни природни броеви е делив со 6, следува дека:

$n^5-n=30\cdot A+5\cdot 6\cdot B=30A+30B=30(A+B)=30C$.

Значи, $30|n^5-n$.

Втор начин: Ќе докажеме деливост со 2, 3 и 5.

Деливост со 2.

Случај 1: $n=2k$

$n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$

$n^2\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$

$n^5\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$

$n^5-n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$ …………(1).

Случај 2: $n=2k+1$

$n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$

$n^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$

$n^5\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$

$n^5-n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$ …………(2).

Од (1) и (2) следува дека $2|n^5-n$.

Деливост со 3.

Случај 1: $n = 3k$

$n \equiv 0(\text{mod } 3)$

$n^2 \equiv 0(\text{mod } 3)$

$n^5 \equiv 0(\text{mod } 3)$

$n^5 - n \equiv 0 \ (\text{mod } 3)$ ....(1).

Случај 2: $n = 3k + 1$

$n \equiv 1(\text{mod } 3)$

$n^2 \equiv 1(\text{mod } 3)$

$n^5 \equiv 1(\text{mod } 3)$

$n^5 - n \equiv 0 \ (\text{mod } 3)$ ....(2).

Случај 3: $n = 3k + 2$

$n \equiv 2(\text{mod } 3)$

$n^2 \equiv 1(\text{mod } 3)$

$n^3 \equiv 2(\text{mod } 3)$

$n^4 \equiv 1(\text{mod } 3)$

$n^5 \equiv 2(\text{mod } 3)$

$n^5 - n \equiv 0 \ (\text{mod } 3)$ ....(3).

Од (1),(2) и (3) следува дека $3|n^5 - n$.

Деливост со 5.

Случај 1: $n = 5k$

$n \equiv 0(\text{mod } 5)$

$n^2 \equiv 0(\text{mod } 5)$

$n^5 \equiv 0(\text{mod } 5)$

$n^5 - n \equiv 0 \ (\text{mod } 5)$ ....(1).

Случај 2: $n = 5k + 1$

$n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^5 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^5 - n \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$ ....(2).

Случај 3: $n = 5k + 2$

$n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^3 \equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^5 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^5 - n \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$ ....(3).

Случај 4: $n = 5k + 3$

$n \equiv 3(\mathrm{mod}5)$

$n^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^3 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^5 \equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^5 - n \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$ ....(4).

Случај 5: $n = 5k + 4$

$n \equiv 4(\mathrm{mod}5)$

$n^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^3 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^5 \equiv 4(\mathrm{mod}5)$

$n^5 - n \equiv 0\ (\mathrm{mod}5)$ ....(5).

Од (1), (2), (3), (4) и (5) следува дека $5|n^5 - n$, а од $2|n^5 - n$, $3|n^5 - n$ и $5|n^5 - n$ се добива $30|n^5 - n$.

Трет начин: Ќе докажеме деливост со 5 и 6.

Всушност, деливоста со 5 е покажана во вториот начин.

Деливост со 6.

Случај 1: $n = 6k$

$n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^5 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^5 - n \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 6)$ ....(1).

Случај 2: $n = 6k + 1$

$n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^5 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^5 - n \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 6)$ ....(2).

Случај 3: $n = 6k + 2$

$n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^3 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^4 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^5 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^5 - n \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 6)$ ....(3).

Случај 4: $n = 6k + 3$

$n \equiv 3(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^2 \equiv 3(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^3 \equiv 3(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^4 \equiv 3(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^5 \equiv 3(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^5 - n \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 6)$ ....(4).

Случај 5: $n = 6k + 4$

$n \equiv 4(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^3 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^4 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^5 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^5 - n \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 6)$ ....(5).

Случај 6: $n = 6k + 5$

$n \equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^3 \equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^5 \equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$

$n^5 - n \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 6)$ ....(6).

Од (1), (2), (3), (4), (5) и (6) следува дека $6|n^5 - n$, а од $5|n^5 - n$ и $6|n^5 - n$, па се добива $30|n^5 - n$.

Задачи

1. Докажи дека $6|n^3 + 17n$.

Решение: Ќе докажеме деливост со 2 и 3.

Деливост со 2.

Случај 1: $n = 2k$

$n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)/\cdot 17$

$17n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$

$n^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$

$n^3 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$

$n^3 + 17n \equiv 0\ (\mathrm{mod}2)$ ....(1).

Случај 2: $n = 2k + 1$

$n \equiv 1(\text{mod } 2)/\cdot 17$

$17n \equiv 17(\text{mod } 2)$

$17n \equiv 1(\text{mod } 2)$

$n^2 \equiv 1(\text{mod } 2)$

$n^3 \equiv 1(\text{mod } 2)$

$n^3 + 17n \equiv 0\ (\text{mod } 2)$ ………..(2).

Од (1) и (2) следува дека $2|n^3 + 17n$.
Слично се покажува деливоста на $n^3 + 17n$ со 3. Оттука, бидејќи $n^3 + 17n$ е делив со 2 и со 3, следува дека е делив со 6.

Е) ДОКАЖУВАЊЕ НА ДЕЛИВОСТ НА МЕШАН ИЗРАЗ СО ДАДЕН БРОЈ

Пример 1: Докажи дека $9|7^n + 3n + 8$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

$7 \equiv 7(\text{mod } 9)$

$7^2 \equiv 4(\text{mod } 9)$

$7^3 \equiv 1(\text{mod } 9)$

$7^4 \equiv 7(\text{mod } 9)$

$7^5 \equiv 4(\text{mod } 9)$

$7^6 \equiv 1(\text{mod } 9)$

$7^7 \equiv 7(\text{mod } 9)$

$\vdots$

$7^{3k} \equiv 1(\text{mod } 9)$

$7^{3k+1} \equiv 7(\text{mod } 9)$

$7^{3k+2} \equiv 4(\text{mod} 9)$.

Ќе разгледаме три случаи.

Случај 1: За $n = 3k$ се добива дека $7^n \equiv 1(\text{mod } 9)$.

$$\begin{aligned} 7^n + 3n + 8 &\equiv (1 + 3 \cdot 3k + 8)(\text{mod } 9) \\ &\equiv (9 + 9k)(\text{mod } 9) \\ &\equiv 9(1 + k)(\text{mod } 9) \\ &\equiv 0\ (\text{mod } 9)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1). \end{aligned}$$

Случај 2: За $n = 3k + 1$ се добива дека $7^n \equiv 7(\text{mod } 9)$.

$$\begin{aligned} 7^n + 3n + 8 &\equiv (7 + 3 \cdot (3k + 1) + 8)(\text{mod } 9) \\ &\equiv (18 + 9k)(\text{mod } 9) \\ &\equiv 9(2 + k)(\text{mod } 9) \\ &\equiv 0\ (\text{mod } 9)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2). \end{aligned}$$

Случај 3: За $n = 3k + 2$ се добива дека $7^n \equiv 4(\text{mod } 9)$.

$$\begin{aligned} 7^n + 3n + 8 &\equiv (4 + 3 \cdot (3k + 2) + 8)(\text{mod } 9) \\ &\equiv (18 + 9k)(\text{mod } 9) \\ &\equiv 9(2 + k)(\text{mod } 9) \\ &\equiv 0\ (\text{mod}9)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(3). \end{aligned}$$

Од (1), (2) и (3) следува дека $9|7^n + 3n + 8$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

Задачи:

Докажи дека за секој за секој $n \in \mathbb{N}$:

а) $9|4^n + 15n - 1$

б) $49|8^n - 7n - 1$

в) $54|2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$

Решение:

а) $4 \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 9)$

$$4^2 \equiv 7 (\mathrm{mod}\ 9)$$
$$4^3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 9)$$
$$4^4 \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 9)$$
$$4^5 \equiv 7 (\mathrm{mod}\ 9)$$
$$4^6 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 9)$$
$$\vdots$$
$$4^{3k} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 9)$$
$$4^{3k+1} \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 9)$$
$$4^{3k+2} \equiv 7 (\mathrm{mod}\ 9).$$

Ќе разгледаме 3 случаи.

Случај 1: За $n = 3k$ се добива дека $4^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 9)$.

$$\begin{aligned} 4^n + 15n - 1 &\equiv (1 + 15 \cdot 3k - 1) (\mathrm{mod}\ 9) \\ &\equiv 45k (\mathrm{mod}\ 9) \\ &\equiv 5 \cdot 9k (\mathrm{mod}\ 9) \\ &\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 9)\ \ldots\ldots\ldots..(1). \end{aligned}$$

Случај 2: За $n = 3k + 1$ се добива дека $4^n \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 9)$.

$$\begin{aligned} 4^n + 15n - 1 &\equiv (4 + 15(3k + 1) - 1) (\mathrm{mod}\ 9) \\ &\equiv (18 + 45k) (\mathrm{mod}\ 9) \\ &\equiv 9(2 + 5k) (\mathrm{mod}\ 9) \\ &\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 9)\ \ldots\ldots\ldots..(2). \end{aligned}$$

Случај 3: За $n = 3k + 2$ се добива дека $4^n \equiv 7 (\mathrm{mod}\ 9)$.

$$\begin{aligned} 4^n + 15n - 1 &\equiv (7 + 15 \cdot (3k + 2) - 1) (\mathrm{mod}\ 9) \\ &\equiv (36 + 45k) (\mathrm{mod}\ 9) \\ &\equiv 9(4 + 5k) (\mathrm{mod}\ 9) \\ &\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 9)\ \ldots\ldots\ldots..(3). \end{aligned}$$

Од (1), (2) и (3) следува дека $9 | 4^n + 15n - 1$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

б) $8 \equiv 8 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^2 \equiv 15 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^3 \equiv 22 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^4 \equiv 29 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^5 \equiv 36 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^6 \equiv 43 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^7 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^8 \equiv 8 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^9 \equiv 15 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^{10} \equiv 22 (\mathrm{mod}\ 49)$

$\vdots$

$8^{3k} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^{3k+1} \equiv 8 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^{3k+2} \equiv 15 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^{3k+3} \equiv 22 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^{3k+4} \equiv 29 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^{3k+5} \equiv 36 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^{3k+6} \equiv 43 (\mathrm{mod}\ 49)$.

Ќе разгледаме 7 случаи.

Случај 1: За $n = 7k$ се добива дека $8^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 49)$.

$$\begin{aligned} 8^n - 7n - 1 &\equiv (1 - 7 \cdot 7k - 1) (\mathrm{mod}\ 49) \\ &\equiv (-49k) (\mathrm{mod}\ 49) \\ &\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 49)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1). \end{aligned}$$

Случај 2: За $n = 7k + 1$ се добива дека $8^n \equiv 8 (\mathrm{mod}\ 49)$.

$$\begin{aligned} 8^n - 7n - 1 &\equiv (8 - 7(7k + 1) - 1) (\mathrm{mod}\ 49) \\ &\equiv (-49k) (\mathrm{mod}\ 49) \\ &\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 49)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2). \end{aligned}$$

Случај 3: За $n = 7k + 2$ се добива дека $8^n \equiv 15 (\text{mod } 49)$.

$$\begin{aligned} 8^n - 7n - 1 &\equiv (15 - 7(7k + 2) - 1)(\text{mod } 49) \\ &\equiv (-49k)(\text{mod } 49) \\ &\equiv 0 \ (\text{mod } 49) \ \ldots\ldots\ldots\ldots (3). \end{aligned}$$

Случај 4: За $n = 7k + 3$ се добива дека $8^n \equiv 22 (\text{mod } 49)$.

$$\begin{aligned} 8^n - 7n - 1 &\equiv (22 - 7(7k + 3) - 1)(\text{mod } 49) \\ &\equiv (-49k)(\text{mod } 49) \\ &\equiv 0 \ (\text{mod } 49) \ \ldots\ldots\ldots\ldots (4). \end{aligned}$$

Случај 5: За $n = 7k + 4$ се добива дека $8^n \equiv 29 (\text{mod } 49)$.

$$\begin{aligned} 8^n - 7n - 1 &\equiv (29 - 7(7k + 4) - 1)(\text{mod } 49) \\ &\equiv (-49k)(\text{mod } 49) \\ &\equiv 0 \ (\text{mod } 49) \ \ldots\ldots\ldots\ldots (5). \end{aligned}$$

Случај 6: За $n = 7k + 5$ се добива дека $8^n \equiv 36 (\text{mod } 49)$.

$$\begin{aligned} 8^n - 7n - 1 &\equiv (36 - 7(7k + 5) - 1)(\text{mod } 49) \\ &\equiv (36 + 45k)(\text{mod } 49) \\ &\equiv (-49k)(\text{mod } 49) \\ &\equiv 0 \ (\text{mod } 49) \ \ldots\ldots\ldots\ldots (6). \end{aligned}$$

Случај 7: За $n = 7k + 6$ се добива дека $8^n \equiv 43 (\text{mod } 49)$.

$$\begin{aligned} 8^n - 7n - 1 &\equiv (43 - 7(7k + 6) - 1)(\text{mod } 49) \\ &\equiv (36 + 45k)(\text{mod } 49) \\ &\equiv (-49k)(\text{mod } 49) \\ &\equiv 0 \ (\text{mod } 49) \ \ldots\ldots\ldots\ldots (7). \end{aligned}$$

Од (1), (2), (3), (4), (5), (6) и (7) следува дека $49 | 8^n - 7n - 1$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

в) $2 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^3 \equiv 8(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^4 \equiv 16(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^5 \equiv 32(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^6 \equiv 10(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^7 \equiv 20(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^8 \equiv 40(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^9 \equiv 26(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{10} \equiv 2(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{11} \equiv 4(\mathrm{mod}\ 54)$

$\vdots$

$2^{9k} \equiv 26(\mathrm{mod} 54)$

$2^{9k+1} \equiv 2(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{9k+2} \equiv 4(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{9k+3} \equiv 8(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{9k+4} \equiv 16(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{9k+5} \equiv 32(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{9k+6} \equiv 10(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{9k+7} \equiv 20(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{9k+8} \equiv 40(\mathrm{mod}\ 54)$.

Потребно е да разгледаме 9 случаи.

Случај 1: За $n = 9k$ се добива дека $2^n \equiv 26(\mathrm{mod}\ 54)\ /^2$.

$2^{2n} \equiv 26^2(\mathrm{mod}\ 54) \equiv 28(\mathrm{mod}\ 54)$

$2 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{2n+1} \equiv 2 \cdot 28\ (\mathrm{mod}\ 54) \equiv 2(\mathrm{mod}\ 54)$.

Се добива дека $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2 \equiv (2 - 9(9k)^2 + 3 \cdot 9k - 2)(\mathrm{mod}\ 54)$

$$\equiv \big(-27k(k-1)\big)(\mathrm{mod}\ 54).$$

Бидејќи k и $k-1$ се два последователни природни броја, значи дека нивниот производ е делив со 2. Значи, $54|2^{2n+1}-9n^2+3n-2$ за $n=9k$.

Случај 2: За $n=9k+1$ се добива дека $2^n \equiv 2(\mathrm{mod} 54)\ /^2$.

$2^{2n} \equiv 4(\mathrm{mod}\ 54)$

$2 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{2n+1} \equiv 8\ (\mathrm{mod}\ 54)$.

Се добива дека $2^{2n+1}-9n^2+3n-2 \equiv (8-9(9k+1)^2+3\cdot(9k+1)-2)(\mathrm{mod}\ 54)$

$\equiv (-729k^2+135k)(\mathrm{mod}\ 54)$

$\equiv -27k(27k+5)(\mathrm{mod}\ 54)$.

Значи, $27|2^{2n+1}-9n^2+3n-2$ …………(1).

Треба уште да покажеме дека $2|2^{2n+1}-9n^2+3n-2$, т.е. $2|k(27k+5)$.

- за $k=2m$ имаме: $2m(27\cdot 2m+5)=2A$, т.е. $2|k(27k+5)$,
- за $k=2m+1$ имаме: $(2m+1)(27\cdot(2m+1)+5)=(2m+1)(54m+32)=$
  $=2(2m+1)(27m+16)=2B$т.е. $2|k(27k+5)$.

Значи, $2|2^{2n+1}-9n^2+3n-2$ …………(2).

Од (1) и (2) се добива дека: $54|2^{2n+1}-9n^2+3n-2$ за $n=9k+1$.

Аналогно, за $n=9k+2, \dots n=9k+8$.

Ж) КРИТЕРИУМИ ЗА ДЕЛИВОСТ СО 2, 3, 4, 8, 9, 11, 13 И 19

$$a=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}=$$
$$=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+a_{n-2}\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0$$

Критериум за деливост со 3:

$1\equiv 1(\text{mod } 3)\ /\cdot a_0$

$10\equiv 1(\text{mod } 3)\ /\cdot a_1$

$10^2\equiv 1(\text{mod } 3)/\cdot a_2$

$\vdots$

$10^n\equiv 1(\text{mod } 3)\ /\cdot a_n$

$a_0\equiv a_0(\text{mod } 3)$

$10a_1\equiv a_1(\text{mod } 3)$

$100a_2\equiv a_2(\text{mod } 3)$

$\vdots$

$10^n\cdot a_n\equiv a_n(\text{mod } 3)$

Се добива дека: $a\equiv a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1+a_0$.

Значи, $3|a\ \Leftrightarrow 3|(a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1+a_0)$.

Критериум за деливост со 9: (се добива слично како критериум за деливост со 3)

$$9|a\ \Leftrightarrow 9|(a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1+a_0).$$

Критериум за деливост со 2:

$1\equiv 1(\text{mod } 2)\ /\cdot a_0$

$10\equiv 0(\text{mod } 2)\ /\cdot a_1$

$10^2\equiv 0(\text{mod } 2)/\cdot a_2$

$\vdots$

$10^n\equiv 0(\text{mod } 2)\ /\cdot a_n$

$a_0 \equiv a_0 (\bmod 2)$

$10a_1 \equiv 0 (\bmod 2)$

$100a_2 \equiv 0 (\bmod 2)$

$\vdots$

$10^n \cdot a_n \equiv 0 (\bmod 2)$

Се добива дека $a \equiv a_0 (\bmod 2)$.

Значи, $2|a \Leftrightarrow 2|a_0$.

Критериум за деливост со 4:

$1 \equiv 1 (\bmod 4) \ /\cdot a_0$

$10 \equiv 2 (\bmod 4) \ /\cdot a_1$

$10^2 \equiv 0 (\bmod 4) /\cdot a_2$

$\vdots$

$10^n \equiv 0 (\bmod 4) \ /\cdot a_n$

$a_0 \equiv a_0 (\bmod 4)$

$10a_1 \equiv 2a_1 (\bmod 4)$

$100a_2 \equiv 0 (\bmod 4)$

$\vdots$

$10^n \cdot a_n \equiv 0 (\bmod 4)$

Се добива дека: $a \equiv (a_0 + 2a_1)(\bmod 4) \equiv (a_0 + 10a_1)(\bmod 4)$.

Значи, $4|a \Leftrightarrow 4|(a_0 + 10a_1) \Leftrightarrow 4|\overline{a_1 a_0}$.

Критериум за деливост со 8:

$1 \equiv 1 (\bmod 8) \ /\cdot a_0$

$10 \equiv 2 (\bmod 8) \ /\cdot a_1$

$10^2 \equiv 4 (\bmod 8) /\cdot a_2$

$10^3 \equiv 0 (\bmod 8) /\cdot a_3$

$10^4 \equiv 0 (\bmod 8) /\cdot a_4$

$\vdots$

$10^n \equiv 0 (\bmod 8) \ /\cdot a_n$

Оттука,

$a_0 \equiv a_0 (\mathrm{mod}\ 8)$

$10a_1 \equiv 2a_1 (\mathrm{mod}\ 8)$

$100a_2 \equiv 4a_2 (\mathrm{mod}\ 8)$

$1000a_3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 8)$

$\vdots$

$10^n \cdot a_n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 8)$

Се добива дека: $a \equiv (a_0 + 2a_1 + 4a_2)(\mathrm{mod}\ 8) \equiv (a_0 + 10a_1 + 100a_2)(\mathrm{mod}\ 8)$.

Значи, $8|a \iff 8|(a_0 + 10a_1 + 100a_2) \Leftrightarrow 8|\overline{a_2a_1a_0}$.

Критериум за деливост со 11:

$1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 11)\ \ /\cdot a_0$

$10 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 11)\ /\cdot a_1$

$10^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 11) /\cdot a_2$

$10^3 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 11) /\cdot a_3$

$10^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 11) /\cdot a_4$

$\vdots$

$10^n \equiv (-1)^n\ (\mathrm{mod}\ 11)\ /\cdot a_n$

$a_0 \equiv a_0 (\mathrm{mod}\ 11)$

$10a_1 \equiv -a_1 (\mathrm{mod}\ 11)$

$100a_2 \equiv a_2 (\mathrm{mod}\ 11)$

$1000a_3 \equiv -a_3 (\mathrm{mod}\ 11)$

$10000a_4 \equiv a_4 (\mathrm{mod}\ 11)$

$\vdots$

$10^n \cdot a_n \equiv (-1)^n a_n (\mathrm{mod}\ 11)$

Се добива дека: $a \equiv (a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0)(\mathrm{mod}\ 11)$.

Значи, $11|a \iff 11|(a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0)$.

Критериум за деливост со 13:

прв начин

$1 \equiv 1(\mathrm{mod} 13) \ /\cdot a_0$

$10 \equiv 10(\mathrm{mod}\ 13) \ /\cdot a_1$

$10^2 \equiv 9(\mathrm{mod}\ 13)/\cdot a_2$

$10^3 \equiv -1(\mathrm{mod}\ 13)/\cdot a_3$

$10^4 \equiv -10(\mathrm{mod}\ 13)/\cdot a_4$

$10^5 \equiv -9(\mathrm{mod}\ 13)/\cdot a_5$

$10^6 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 13)/\cdot a_6$

$10^7 \equiv 10(\mathrm{mod}\ 13)/\cdot a_7$

$10^8 \equiv 9(\mathrm{mod}\ 13)/\cdot a_8$

$\vdots$

Оттука,

$a_0 \equiv a_0(\mathrm{mod}\ 13)$

$10a_1 \equiv 10a_1(\mathrm{mod}\ 13)$

$100a_2 \equiv 9a_2(\mathrm{mod}\ 13)$

$1000a_3 \equiv -a_3(\mathrm{mod}\ 13)$

$10000a_4 \equiv -10a_4(\mathrm{mod}\ 13)$

$100000a_5 \equiv -9a_5(\mathrm{mod}\ 13)$

$\vdots$

Се добива дека:

$a \equiv (a_0 + 10a_1 + 9a_2 - (a_3 + 10a_4 + 9a_5) + a_6 + 10a_7 + 9a_8 - \cdots)(\mathrm{mod}\ 13).$

Значи, $13|a \ \Leftrightarrow 13|(a_0 + 10a_1 + 9a_2 - (a_3 + 10a_4 + 9a_5) + a_6 + 10a_7 + 9a_8 - \cdots).$

втор начин

$1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 13)\ \ /\cdot a_0$

$10 \equiv 10 (\mathrm{mod}\ 13)\ /\cdot a_1$

$10^2 \equiv 1\cdot 9 (\mathrm{mod}\ 13) /\cdot a_2$

$10^3 \equiv 10\cdot 9 (\mathrm{mod}\ 13) /\cdot a_3$

$10^4 \equiv 1\cdot 9^2 (\mathrm{mod}\ 13) /\cdot a_4$

$10^5 \equiv 10\cdot 9^2 (\mathrm{mod}\ 13) /\cdot a_5$

$10^6 \equiv 1\cdot 9^3 (\mathrm{mod}\ 13) /\cdot a_6$

$10^7 \equiv 10\cdot 9^3 (\mathrm{mod}\ 13) /\cdot a_7$

$\vdots$

Се добива дека:

$a \equiv (a_0 + 10a_1 + 9a_2 + 10\cdot 9a_3 + 9^2a_4 + 10\cdot 9^2a_5 + 9^3a_6 + 10\cdot 9^3a_7 + \cdots)(\mathrm{mod}\ 13)$
$\equiv (\overline{a_1a_0} + 9\cdot\overline{a_3a_2} + 9^2\cdot\overline{a_5a_4} + 9^3\cdot\overline{a_7a_6} + \cdots)(\mathrm{mod}\ 13).$

Значи, $13|a \Leftrightarrow 13|(\overline{a_1a_0} + 9\cdot\overline{a_3a_2} + 9^2\cdot\overline{a_5a_4} + 9^3\cdot\overline{a_7a_6} + \cdots)$.

Критериум за деливост со 19:

$1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 19)\ \ /\cdot a_0$

$10 \equiv 10 (\mathrm{mod}\ 19)\ /\cdot a_1$

$10^2 \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 19) /\cdot a_2$

$10^3 \equiv 10\cdot 5 (\mathrm{mod}\ 19) /\cdot a_3$

$10^4 \equiv 1\cdot 5^2 (\mathrm{mod}\ 19) /\cdot a_4$

$10^5 \equiv 10\cdot 5^2 (\mathrm{mod}\ 19) /\cdot a_5$

$10^6 \equiv 1\cdot 5^3 (\mathrm{mod}\ 19) /\cdot a_6$

$10^7 \equiv 10\cdot 5^3 (\mathrm{mod}\ 19) /\cdot a_7$

$\vdots$

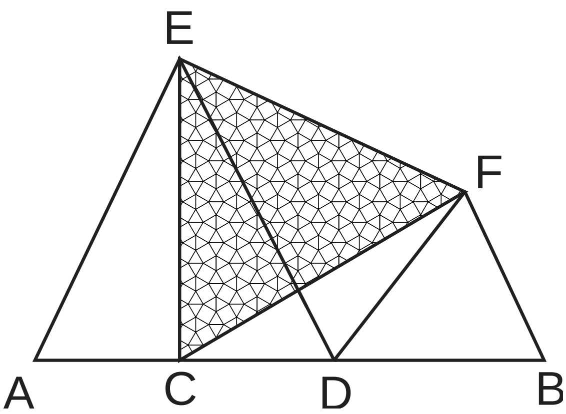
Се добива дека:

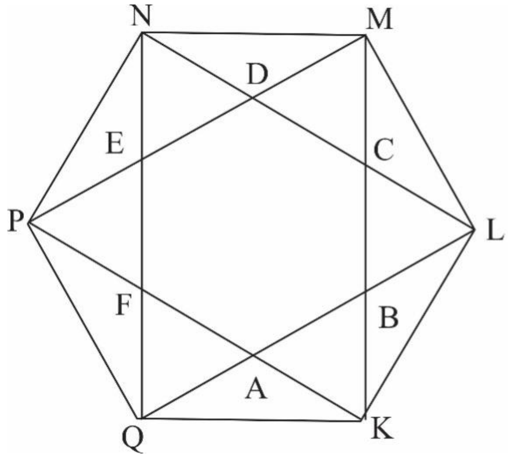
$a \equiv (a_0 + 10a_1 + 5a_2 + 10\cdot 5a_3 + 5^2a_4 + 10\cdot 5^2a_5 + 5^3a_6 + 10\cdot 5^3a_7 + \cdots)(\mathrm{mod}\ 19)$
$\equiv (\overline{a_1a_0} + 5\cdot\overline{a_3a_2} + 5^2\cdot\overline{a_5a_4} + 5^3\cdot\overline{a_7a_6} + \cdots)(\mathrm{mod}\ 19).$

Значи, $19|a \Leftrightarrow 19|(\overline{a_1a_0} + 5\cdot\overline{a_3a_2} + 5^2\cdot\overline{a_5a_4} + 5^3\cdot\overline{a_7a_6} + \cdots)$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

Во овој дел се дадени задачи за вежбање за посолидните ученици од 7, 8 и 9 одделение. За секоја од задачите е понуден одговор или решение. Овие задачи може да се решаваат во рамките на додатната настава со поддршка на наставниците.





1. Иван има пет пати повеќе пари од сестра му. Ако Иван потроши 200 денари, тогаш тие двајца ќе имаат подеднакво пари. По колку денари има секој од нив?

2. Дешифрирај (реши) ги равенките, ако се знае дека позади секоја буква се крие по една декадна цифра:

   а) $A + AB + ABC + ABCD = 1995$

   б) $A + AB + BB + ABBC = 1996$

3. Во едно училиште на секои две момчиња има по три девојчиња, а на секои десет момчиња има по еден наставник. Колку момчиња и колку девојчиња има во училиштето, ако има вкупно 936 ученици и наставници?

4. Една црква има две различни ѕвона. И двете удираат рамномерно, но ударите од првото ѕвоно се слушаат на секои четири секунди, а ударите од второто звоно се слушаат на секои три секунди. Истовремените удари на двете звона се слушаат како еден удар. Еден ден и двете звона се огласиле истовремено. Некој внимателно ги броел ударите и избројал вкупно 20 удари од ѕвоната. Колку време поминало од првиот до последниот удар на звоната?

5. Одреди ги броевите a, b и c, ако се знае дека $a < b < c$ и собрани по два даваат збирови 332, 408 и 466.

6. Во едно стадо имало вкупно 560 глави добиток: овци и кози. По еден месец бројот на козите се зголемил за 16, по што бројот на овците станал 15 пати поголем од бројот на козите. Колку овци, а колку кози имало на почетокот?

7. При делењето на некој број со 48 се добива количник n и остаток 36. Колкав ќе биде количникот, а колкав ќе биде остатокот, при делење на истиот број со 16?

8. Збирот на двоцифрен и трицифрен број е четирицифрен број. Секој од тие три броја подеднакво се чита одлево надесно и оддесно налево, т.е. во секој број цифрите се симетрично распоредени. Пронајди ги тие броеви.

9. Еден ден од паралелката биле отсутни $\frac{1}{12}$ од учениците. Наредниот ден дошол 1 ученик повеќе така што отсутни биле $\frac{1}{18}$ од учениците. Колку ученици има паралелката?

10. Шестцифрен број почнува со цифрата 1. Ако таа цифра се премести на последното место, се добива број кој е три пати поголем од почетниот. Пронајди го почетниот број.

11. Докажи дека бројот $10^{1999}-7$ е делив со 3, но не е делив со 27.

12. Пронајди ги сите природни броеви n за кои е $10^{2n}-1$ е делив со 3^4.

13. На кружна патека долга 120 метри од исто место и во иста насока тргнуваат двајца велосипедисти. Првиот се движи со брзина од 320 m во минута, а вториот со брзина од 250 m во минута. По колку минути двајцата велосипедисти ќе се најдат на исто место на патеката?

14. Колку природни броеви помали од 100 не се деливи ниту со 3 ниту со 5?

15. За прошетка на 46 туристи на едно езеро биле ангажирани чамци со по 4 и чамци со по 6 седишта. Колку чамци имале по 4, а колку по 6 седишта, ако имало вкупно 10 чамци, и при прошетката сите биле целосно полни со седнати туристи?

16. Еден ученик прочитал книга за 3 дена. Првиот ден тој прочитал 2/5 од книгата, вториот ден 2/5 од остатокот, а третиот ден последните 36 страници. Колку страници имала книгата?

17. Пронајди ги сите шестцифрени броеви од обликот $\overline{A1996B}$, кои се деливи со 36.

18. Одреди ги непознатите цифри во бројот 199АА6В ако се знае дека е делив со 12.

19. Збирот на должините на рабовите на еден квадар изнесува 60 cm. Определи ги плоштината и волуменот на тој квадар, ако мерните броеви на должините на рабовите (изразени во центиметри) се последователни природни броеви.

20. Еден селанец на пазар продавал јагне, јаре и теле. Кога го прашале по колку килограми има секое од нив, тој одговорил загадочно: „Јагнето и јарето имаат заедно 32 kg, јагнето и телето 102 kg, а јарето и телето 100 kg“. Определи колку kg имало секое од нив.

21. Определи ги сите трицифрени броеви што се деливи со 18 и цифрите на единиците и стотките им се еднакви.

22. Збирот на цифрите на еден трицифрен број е еднаков на најмалиот двоцифрен број. Цифрата на десетките на трицифрениот број е 6, а ако цифрите на единиците и стотките си ги заменат местата, се добива истиот број. Кој е тој број?

23. Збирот на цифрите на еден трицифрен број е 12. При делењето на тој број со 257 се добива остаток 47. Кој е тој трицифрен број?

24. Збирот на два броја изнесува 374. Едниот од собироците завршува на 0. Ако таа цифра се избрише се добива другиот собирок. Кои се тие броеви?

25. Одреди ги цифрите A и B, ако се знае дека бројот $\overline{A1996B}$ е делив со 72.

26. Одреди ги броевите поголеми од 100 и помали од 200, кои при делење со 2 даваат остаток 1, при делење со 3 даваат остаток 2, при делење со 4 даваат остаток 3 и при делење со 5 даваат остаток 4.

27. Најди го најголемиот четирицифрен број, кој при делење со 3, 4, 5, 6 и 7 дава остаток 2.

28. Најди го најмалиот природен број делив со 33, кој е запишан само со единици.

29. Реши ја равенката $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)=3024$ во множеството на цели броеви.

30. Одреди го најмалиот природен број со кој треба да се помножи бројот 8316 за да се добие квадрат на природен број.

31. Производот на два трицифрени броја се запишува само со цифрите 7. Одреди ги тие трицифрени броеви.

32. Еден туристички брод има 20 кабини со вкупно 86 кревети. Секоја од кабините има 2, 3 или 4 кревети. Докажи дека бројот на трикреветните кабини е парен.

33. Секој човек, од денот кога настанал поздравот со ракување до денес, се ракувал одереден број пати. Докажи дека бројот на луѓе, кои до овој момент направиле непарен број ракувања, е парен.

34. Дедо му и татко му на Мики сега имаат 63 години и 37 години, соодветно. Мики има 10 години, а сестра му 6 години. По колку години Мики, татко му и сестра му ќе имаат заедно онолку години колку што ќе има дедо му?

35. Во една низа составена од 7 природни броеви, почнувајќи од третиот секој член е збир на претходните два. Определи ја низата, ако третиот член е 5.

36. Два трактора треба да изораат нива од 450 ha. Едниот трактор може да изора 15 ha на ден, а другиот 20 ha на ден. Откако првиот трактор орал 2 дена, му се придружил вториот. За колку дена заедно ќе го довршат орањето на нивата?

37. Најди го најмалиот природен број делив со 6, кој при делењето со 4 и со 5 дава остаток 2.

38. Одреди го најмалиот природен број, кој помножен со 814 дава број напишан само со двојки.

39. Дали е можно 1999 телефони меѓусебно да бидат поврзани, така што секој од нив да има директна врска точно со 7 други телефони? (Одговорот да се образложи.)

40. Три пати по должината на даден правоаголник е еднакво на четири пати по ширината. Ако површината на правоаголникот е 108 cm^2, тогаш колкав е периметарот?

41. Еден лист во форма на квадрат со две засечувања со ножици (со две прави) е поделен на два квадрати и два правоаголници. Површината на едниот од добиените квадрати е 81 cm^2, а површината на едниот од добиените правоаголници е 63 cm^2. Колкава е површината на дадениот лист?

42. Пресметај ја плоштината на триаголник ако две негови страни имаат должини 27 cm и 29 cm, а тежишната линија кон третата страна има должина 26 cm.

43. Периметарот на даден правоаголник изнесува 2 метра. Ако должината на правоаголникот се намали за 10 cm, а ширината се зголеми за 10 cm, тогаш ќе се добие квадрат. Колкава е плоштината на тој квадрат?

44. Периметарот на рамнокрак триаголник е 64 cm, а разликата на кракот и основата изнесува 11 cm. Пресметај ја плоштината на триаголникот.

45. Еден квадрат е поделен со две прави на четири правоаголници. Колкава е страната на дадениот квадрат ако плоштините на три од четирите добиени правоаголници се: 48 cm^2, 96 cm^2 и 144 cm^2 ? Сечењето е направено така што двата најголеми од споменатите три правоаголници имаат заедничко само едно теме.

46. Во рамнокрак трапез $ABCD$ со $\overline{AD} = \overline{BC} = 6$ cm дијагоналата ја дели средната линија на делови од 2 cm и 5 cm, соодветно. Одреди:

а) периметар на трапезот,

б) внатрешни агли на трапезот.

47. Даден квадрат со должина на страната од 10 cm е пресечен со една права на два правоаголници. Пресметај ги параметрите на тие правоаголници, ако се знае дека двојниот периметар на едниот е еднаков со тројниот периметар на другиот.

48. Во рамнокрак трапез $ABCD$ поголемата основа е $a = 3{,}7$ dm, кракот $c = 1{,}5$ dm и аголот меѓу нив е $\alpha = 60°$. Одреди ја должината на средната линија на трапезот.

49. Ако еден пар спротивни страни на квадратот се продолжат за по 2 cm, а другиот пар за по 5 cm, добиениот правоаголник ќе има плоштина која е за 45 cm^2 поголема од плоштината на дадениот квадрат. Колкава е плоштината на квадратот?

50. Страните на еден триаголник се 13 cm, 14 cm и 15 cm. Одреди го радиусот на кружницата со центар на средната по големина страна која ги допира другите две страни на триаголникот.

51. Како треба да се наредат сто идентични квадрати со страни од 3 cm за да се добие правоаголник:

а) со најмал можен периметар?

б) со најголем можен периметар?

52. Во еден правоаголник пресекот на дијагоналите е за 4 cm поблиску до поголемата отколку до помалата страна. Пресметај ја плоштината на правоаголникот ако неговиот периметар е 56 cm.

53. Правоаголник со периметар 96 cm е поделен со една права на два еднакви квадрати. За колку е поголем периметарот на правоаголникот од периметарот на еден од добиените квадрати?

54. Во лифт влегле момче и девојче. Лифтот поаѓа од приземјето, а зградата има 5 ката. На колку различни начини може да се испразни лифтот?

55. Еден ѓердан е направен од 20 мониста еднакви по форма и големина, но различни по боја: има 5 бели, 5 жолти, 5 сини и 5 црвени, така што секои четири последователни мониста се во четири различни бои.

а) Колку различни ѓердани можат да се направат од овие 20 мониста?

б) Колку различни ѓердани можат да се направат под исти услови од 100 мониста (по 25 од секоја боја)?

56. За запишување на четирицифрени броеви ги користиме само цифрите 1, 2 и 3. Колку има такви броеви кои се деливи со 9?

57. Девет различни предмети треба да се поделат на три лица, и тоа на еден два предмета, на друг три предмети и на третиот четири предмети. На колку начини тоа може да се направи?

58. На роденденската прослава Јована ги послужила гостите со торта. Нина прва добила $\frac{1}{10}$ од тортата, а потоа Сара добила $\frac{1}{9}$ од остатокот. После тоа Ева добила $\frac{1}{8}$ од тоа што останало после Нина, Драгана добила $\frac{1}{7}$ од остатокот и на крајот Виктор добил $\frac{1}{6}$ од тоа што останало од тортата. Колкав дел од тортата останал за Јована и за нејзините деца?

59. Одреди ги броевите a, b, c ако нивниот збир е поголем од бројот a за $\frac{5}{2}$, од бројот b за $\frac{59}{6}$, а од бројот c за $\frac{5}{3}$.

60. Во една продавница имало вкупно 180 килограми јаболка и круши. Се продале $\frac{3}{8}$ од јаболката и $\frac{3}{10}$ од крушите, што претставувало $\frac{1}{3}$ од вкупната количина на јаболка и круши. Колку килограми јаболка имало во продавницата на почетокот?

61. Еден брод се движи по мирна вода со брзина од 18 km на час. Колку километри ќе помине бродот за 8 часа по река во која водата се движи со брзина 5 km на час, ако се движи:

а) по текот на водата?

б) спроти текот на водата?

62. Две ленти имаат вкупна должина од 4 m 12 cm. Ако од првата лента се отсече парче долго 50 cm и се залепи на втората лента (во продолжение), тогаш втората лента ќе биде три пати подолга од првата. Колку се долги лентите?

63. Еден ученик купил 4 учебници. Трите учебници без првиот чинат 700 денари, трите без вториот чинат 740 денари, трите без третиот чинат 760 денари и трите без четвртиот чинат 800 денари. По колку денари чини секој учебник?

64. Во еден сад имало 420 грама дваесет процентен раствор на сол во вода. По извесно време, поради испарувањето, количината на растворот е намалена на 300 грама. Колку проценти на сол има растворот сега?

65. Свежото грозје содржи во себе 80 % вода, а сувото содржи 12 % вода. Колку килограми свежо грозје се потребни за да се добијат 16 килограми суво грозје?

66. Трактористот ја изорал нивата за 3 дена. Првиот ден тој изорал 7/10 од нивата, вториот ден изорал 3/5 од остатокот и третиот ден останатиот дел. Колкава е плоштината на нивата, ако третиот ден трактористот изорал за 11,2 ha помалку од вториот ден?

67. За еден насип да биде изграден за 20 дена ангажирани се 44 работници. Но, 4 дена по отпочнувањето на работата е договорено таа да биде завршена 5 дена порано од предвиденото. Уште колку работници треба да се ангажираат?

68. Во едно училиште има помалку од 400 ученици. Шест одделенија имаат еднаков број ученици и во тие шест одделенија има повеќе од 150 ученици. Во останатите одделенија има вкупно за 15 % ученици повеќе отколку во овие шест одделенија. Колку вкупно ученици има во училиштето?

69. Анѓелина тврди: „Бобан лаже!“, Бобан тврди: „Цвета лаже!“ Цвета тврди: „Анѓелина и Бобан лажат!“. Кој навистина лаже?

70. Една година 1 јануари и 1 април се паднале во четврток. Колку месеци со пет петоци имало во таа година?

71. Јована го поминала првиот вторник од месецот во Париз, а првиот вторник по првиот понеделник од истиот месец била на Флорида. Првата среда од следниот месец Јована била во Белград, а првата среда по првиот вторник ја поминала во Венеција. Каде Јована го прославила 8-ми Март таа година?

72. Четири мачки за четири дена ловат четири глувчиња. За колку дена 100 мачки ловат 100 глувчиња?

73. Располагаме со две празни тенџериња од кои едното има волумен 11 литри, а другото 7 литри. Како со помош на овие тенџериња од чешма во буре ќе налееме 6 литри вода?

74. Аголот α е суплементен со аголот β, а комплементен е со една третина од аголот β. Одреди ги аглите α и β.

75. Одреди ја плоштината на ромбот $ABCD$, ако R и r, соодветно, се радиусите на опишаните кружници околу триаголниците ABC и ABD.

76. Точките A и B ја делат отсечката MN на три отсечки чии должини се однесуваат како 2 : 3 : 4. Растојанието помеѓу средините на крајните делови е 30 cm. Колкава е должината на отсечката MN?

77. На една права се дадени точки A, B и C, во тој редослед, така што должината на отсечката AB е 3 cm, а должината на отсечката BC е 2 cm. Нека M, N и P се средините на AB, AC и BC, соодветно. Кои се должините на отсечките BC, AP и MN?

78. Даден е правоаголникот $ABCD$ со страни $AB = 16$ cm и $BC = 12$ cm. Точките E и F лежат на правите AB и CD, соодветно, така што $AECF$ е ромб. Одреди ја должината на отсечката EF.

79. Разликата на аголот α и неговиот сумплементен агол β изнесува 56^0. Пресметај го аголот γ кој е комплементен на аголот β.

80. Над катетите на правоаголен триаголник се конструирани рамнострани триаголници со плоштини $64\sqrt{3}$ cm^2 и $36\sqrt{3}$ cm^2, соодветно. Одреди ја плоштината на опишаната кружница на правоаголниот триаголник.

81. Еден зајак се наоѓа на ливада. Прво скока 4 m на запад, потоа 2 m на југоисток и на крајот скока 4 m на југ. Одреди на кое растојание од почетокот ќе се најде зајакот по скокањето.

82. Една петтина од аголот α е еднаква на една седмина од неговиот суплементен агол β. Колкав е аголот кој е комплементен со α?

83. Докажи дека во секој правилен многуаголник може да се впише кружница.

84. Кој агол е за 1° поголем од својот суплементен агол?

85. Во дадената кружница, тетивите $\overline{AB} = 6$ cm и $\overline{AC} = 8$ cm се заемно нормални. Одреди ја плоштината на кругот.

86. Колкав е збирот на два агли кои се, соодветно, суплементни на два комплементни агли?

87. Од произволна точка A на кружница повлечени се две тетиви со должина 9 cm и 17 cm. Одреди го радиусот на кружницата, ако растојанието меѓу средините на тетивите е 5 cm.

88. Аглите α и β се, соодветно, комплементни со два суплементни агли φ и θ. Пресметај ги тие четири агли.

89. Во квадрат со страна a е вписан помал квадрат чии темиња ги делат страните на поголемиот квадрат во однос 2 : 3. Одреди го односот на плоштините на квадратите.

90. Основите на трапезот се $a = 25$ и $b = 15$, а еден од краците е $c = 8$. Определи го периметарот и плоштината на трапезот ако се знае дека збирот на внатрешните агли на поголемата основа изнесува 90°.

91. Одреди го аголот α, кој од својот суплементен агол е помал точно за онолку колку што е поголем од својот комплементен агол.

92. Даден е правоаголник $ABCD$ со димензии 8 cm и 6 cm. Дијагоналата AC го дели правоаголникот на два триаголници. Одреди го растојанието меѓу центрите на впишаните кружници во тие два триаголници.

93. Докажи дека триаголникот е правоаголен ако и само ако еден негов внатрешен агол е еднаков на збирот или разликата од другите два внатрешни агли.

94. Во ромб е впишана кружница со радиус r. Изрази ја должината на страната на ромбот преку радиусот r, ако е познато дека таа е шест пати помала од збирот на дијагоналите.

95. На страната AC од триаголникот ABC е дадена точка K така што правата BK е симетрала на внатрешниот агол β. Ако се знае дека $\measuredangle BKC = 70°$, пресметај ја разликата на аглите $\measuredangle ACB = \gamma$ и $\measuredangle CAB = \alpha$.

96. Пресметај ја плоштината на трапез со основи 19 cm и 2 cm и дијагонали 17 cm и 10 cm.

97. Ако збирот на два надворешни агли од триаголникот е еднаков на 270°, докажи дека тој триаголник е правоаголен.

98. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи 20 cm и 12 cm ако се знае дека дијагоналите се взаемно нормални.

99. Симетралите на два внатрешни агли на даден триаголник се сечат под агол од $135°$. Докажи дека тој триаголник е правоаголен.

100. Одреди ја должината на најдолгата дијагонала на правилен триесетаголник со страна $a = 6$ cm.

101. Еден од внатрешните агли на триаголникот е $75°$. Колкави се другите два внатрешни агли, ако се знае дека постои права која го содржи темето на дадениот агол и го дели триаголникот на два рамнокраки триаголници?

102. Одреди го радиусот R на опишаната кружница околу рамнокракиот триаголник ABC со основа a и крак b.

103. Од полукруг со радиус $R = 10$ cm се отсечени два полукруга со радиуси $r_1 = 3$ cm и $r_2 = 7$, чии центри лежат на дијаметарот на полукругот и се допираат меѓу себе однадвор. Одреди ја плоштината на остатокот.

104. Нека $ABCD$ е паралелограм и $P \in BC$, $Q \in AD$, $K \in AB$ и $L \in CD$ се такви што $PQ \parallel AB$, $KL \parallel BC$ и $\{M\} = KL \cap PQ \cap AC$. Докажи дека паралелограмите $KBPM$ и $QMLD$ имаат еднакви плоштини.

105. Докажи дека околу секој правилен многуаголник може да се опише кружница.

106. Квадратот $ABCD$ има страна со должина од 36 cm. На страната AB е избрана точка E на растојание од 12 cm од темето B. Нека средината на страната BC е точката F, а на страната CD е избрана точката G на растојание од 12 cm од темето C. Одреди ја плоштината на делот кој лежи во внатрешноста на триаголникот EFG и во надворешноста на триаголникот AFD.

107. Основите на трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$) се однесуваат како 1 : 5 , а дијагоналите се сечат во точка O. Збирот на плоштините на триаголниците ABO и CDO изнесува 120 cm^2. Најди ги плоштините на тие триаголници.

108. Во ΔABC нека точката D е средина на страната BC. За точката E на отсечката AD важи равенството $4\overline{AE} = 3\overline{AD}$. Правата BE ја сече страната AC во точката F. Одреди го односот на плоштините на ΔABF и ΔBCF.

109. На една права се нанесени отсечките AB, AC, AD и AE така што точката B е средина на отсечката AC, C на AD и D на AE. Определи го растојанието меѓу средишните точки на отсечките AB и DE, ако се знае дека $\overline{AE} = 16$ cm.

110. Полжав се качува на дрво високо 15 m. Во текот на секој ден полжавот се искачува 5 m, а во текот на секоја ноќ, поради лизгањето, се спушта за 4 m. За колку дена полжавот ќе се искачи на врвот од дрвото?

111. Нива во форма на правоаголник, за кој $\frac{3}{4}$ од должината се 90 m и ширината претставува $\frac{7}{8}$ од должината, е посеана со пченица. Колку килограми пченица ќе се добијат од нивата, ако од 1 ар се добиваат по 32 kg?

112. Над кракот на рамнокракиот триаголник ABC е конструиран рамностран триаголник. Периметарот на така добиената 2Д - форма е 26 cm. Определи ги страните на триаголниците, ако основата на рамнокракиот триаголник е за 2 cm помала од кракот.

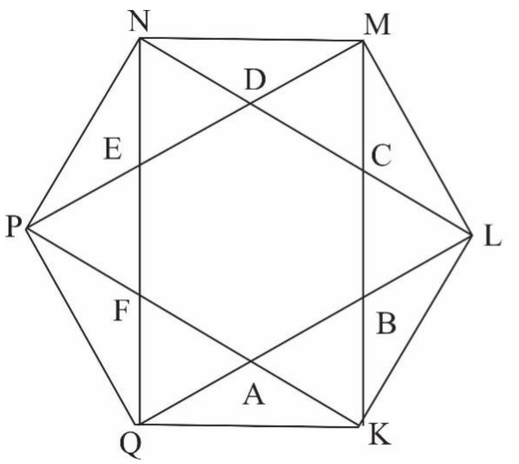
113. Во рамнокракиот триаголник ABC ($\overleftarrow{AC}=\overleftarrow{BC}$) точката D е средишна за отсечката AB. Периметарот на $\Delta\, ABC$ е 36 cm, а периметарот на $\Delta\, ADC$ е 24 cm. Определи ја должината на отсечката $\overline{CD}$.

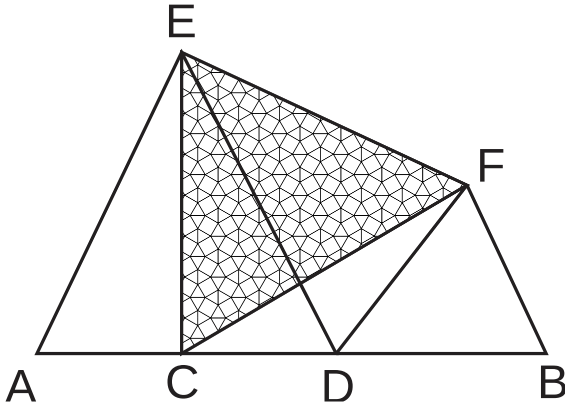
114. Дадени се 5 точки во рамнина, такви што никои три не лежат на иста права. Колку различни триаголници се образувани со тие точки?

115. Коцка со раб 1 m^3 е разрежана на мали коцки со рабови 1 mm^3. Колку метри ќе биде висок столбот ако сите мали коцки се наредат една врз друга?

116. Докажи дека бисектрисата на надворешниот агол при врвот на рамнокрак триаголник е паралелна со неговата основа.

РЕШЕНИЈА





Решение 1: Иван има 250 денари, а сестра му 50 денари.

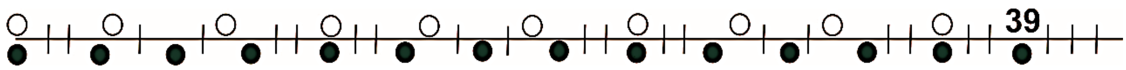
Решение 2:

а) Да забележиме најпрво дека $A = 1$. Оттука, $B + BC + BCD = 884$, поради што $B = 7$. Така, $C + CD = 107$, што повлекува дека $C = 9$ и $D = 8$. Значи, дешифрирањето дава:
$1 + 17 + 179 + 1798 = 1995$.

б) Повторно $A = 1$, од каде што се добива равенството $B + BB + BBC = 985$. Ова повлекува дека $B = 8$ и $C = 9$. Значи, дешифрирањето дава:
$1 + 18 + 88 + 1889 = 1996$.

Решение 3: Бидејќи на секои две момчиња одговараат три девојчиња, на секои 10 момчиња има по 15 девојчиња. Според тоа, момчиња има 10 пати повеќе од наставници, а девојчиња има 15 пати повеќе од наставници. Заклучуваме дека ученици и наставници има 26 пати повеќе отколку наставници. Оттука, наставници има $936 : 26 = 36$, момчиња има 360, а девојчиња 540.

Решение 4: На права со празни кружчиња ги означуваме ударите од првото звоно, а со полни кружчиња ударите од второто звоно. Забележуваме дека првиот, седмиот, тринаесеттиот и деветнаесеттиот удар се истовремени за двете звона и тие ги броиме како поединечни удари. Со непосредно пребројување добиваме дека од првиот до дваесеттиот удар поминале точно 39 секунди.



Решение 5: Со собирањето на равенствата $a + b = 332$, $a + c = 408$ и $b + c = 466$ добиваме дека $2a + 2b + 2c = 1206$, односно $a + b + c = 603$. Со одземање на по една од првите три равенки од последната, заклучуваме дека $c = 271$, $b = 195$ и $a = 137$.

Решение 6: Ако имало x кози, тогаш овци имало $560 - x$. Според условот на задачата, $(x + 16) * 15 = 560 - x$, од каде што се добива $x = 20$. Значи, во стадото на почетокот имало 20 кози и 540 овци.

Решение 7: Да го означиме деленикот со а. Тогаш, а $= 48\,n + 36 = 16\,(4\,n + 2) + 4$. Остатокот при делење со 16 е 4.

Решение 8: Дадениот услов е $\overline{AA} + \overline{BCB} = \overline{DEED}$. Оттука, $D = 1$, $B = 9$ и $E = 0$. Бидејќи четирицифрениот број е 1001, добиваме дека $A = 2$, $C = 7$. Значи, бараните броеви се: 22, 979 и 1001.

Решение 9: $1:(\frac{1}{12}-\frac{1}{18})=36$ ученици.

Решение 10: Дадено е шифрираното равенство: $3 \cdot 1{*}{*}{*}{*}{*} = {*}{*}{*}{*}{*}1$. Заклучуваме дека бараниот број завршува на 7, па и претпоследната цифра на десната страна од равенството е 7. Така, добиваме: $3 \cdot 1{*}{*}{*}{*}7 = {*}{*}{*}{*}71$. Оттука, претпоследната цифра на бараниот број е 5. Сега имаме: $3 \cdot 1\,{*}{*}{*}57 = {*}{*}{*}571$. Со слично размислување ја откриваме следната цифра 8, па имаме: $3 \cdot 1{*}{*}857 = {*}{*}8571$ итн. Бараниот број е 142857. Навистина, $3 \cdot 142857 = 428571$.

Решение 11: $10^{1999} - 7 = 1000...00-7 = 999...93$, при што резултатот има вкупно 1998 цифри 9. Очигледно е дека овој број е делив со 3, и притоа 999...93 : 3 = 333...31. Последниот број не е делив со 9, бидејќи збирот на неговите цифри не е делив со 9, па затоа дадениот број не е делив со 27.

Решение 12: Бидејќи $3^4 = 9 \cdot 9$, треба да ја потврдиме деливоста со 9, потоа дадениот број го делиме со 9 и да се потврди кога добиениот количник повторно е делив со 9.
Да забележиме дека $10^{2n} - 1 = 1000 \ldots - 1 = 999 \ldots 99$, при што има вкупно $2n$ деветки. Бидејќи $3^4 = 9 \cdot 9$ и $(10^{2n} - 1) : 9 = 111\ldots11$ (точно $2n$ единици), заклучуваме дека бараните броеви n се оние од облик $n = 9k,\ k \in \mathbb{N}$.

Решение 13: $120 : (320 - 260) = 2$ минути

Решение 14: Со 3 се деливи 33 броја помали од 100, со 5 се деливи 20 броја помали од 100, а со 3 и 5 (т.е. со 15) се деливи 6 броја помали од 100. Бидејќи $100 - (33 + 20 - 6) = 53$, заклучуваме дека ниту со 3 ниту со 5 не се деливи точно 53 броја помали од 100.

Решение 15: По 6 седишта имале $(46 - 4 \cdot 10) : 2 = 3$ чамци, а по 4 седишта $10 - 3 = 7$ чамци.

Решение 16: Бидејќи 36 : (1− 2/5 − 3/5 − 2/5)=36 : 9/25=36 *25/9=100, заклучуваме дека книгата имала 100 страници.

Решение 17: Тоа се броевите: 219960, 719964 и 319668.

Решение 18: Користиме дека бројот е делив со 3 и со 4. Решенијата се: 1991160, 1994460, 1997760, 1992264, 1995564, 1998864, 1990068, 1993368, 1996668 и 1999968.

Решение 19: Нека должините на рабовите се $x-1$, x и $x+1$. Од $4(x-1+x+x+1)=60$ се добива $3x=15$. Рабовите се долги 4 cm, 5 cm и 6 cm, соодветно. Оттука, имаме дека P = 2(5*6 + 5*4 + 6*4), односно P = 148 cm^2, додека V = 4*6*5, т.е. V = 120 cm^3.

Решение 20: Трите заедно имале вкупно $(32+102+100):2=117$ kg. Значи, телето имало $117-32=85$ kg, јарето $117-102=15$ kg, а јагнето $117-100=17$ kg.

Решение 21: 252, 414, 666 и 828.

Решение 22: 262.

Решение 23: Да го означиме бараниот број со $\overline{abc}$ каде што a, b и c, соодветно, се цифрата на стотки, десетки и единици. Според условот, $\overline{abc}=257\cdot q+47$ за некој $q\in\{1,2,3\}$. Дополнителниот услов дека $a+b+c=12$ повлекува дека $q=2$. Бараниот број изнесува $257\cdot 2+47=561$.

Решение 24: Според условот на задачата, едниот од броевите е 10 пати поголем од другиот. Оттука, помалиот број е еднаков на $374:(10+1)=34$, а поголемиот е 340.

Решение 25: Бројот $\overline{A1996B}$ е делив со 8 и 9. Од деливоста со 8 следува дека неговиот трицифрен завршеток е 960 или 968. Деливоста со 9 повлекува дека бројот $\overline{A1996B}$ е 219960 или 319968. Значи, решенијата се: $A=2$, $B=0$ и $A=3$, $B=8$.

Решение 26: Ако таков број зголемиме за 1, добиениот број е делив со 2, со 3, со 4 и со 5. Бидејќи НЗС$(2,3,4,5)=60$, бараните броеви се од облик $60k-1$ каде што $k\in\mathbb{N}_0$.
Дополнителното неравенство $100<60k-1<200$ е исполнето само за $k=2$ и $k=3$. Бараните броеви се 116 и 179.

Решение 27: Бидејќи НЗС$(3,4,5,6,7)=420$, бараниот број е најголемиот четирицифрен број од облик $420k+2$ каде што $k\in\mathbb{N}_0$. Непосредно проверуваме дека за $k=23$ важи $420k+2=9662$, додека за $k=24$ важи $420k+2=10082$. Според тоа, бараниот број е 9662.

Решение 28: Потребно и доволно за број од облик 11111.....1 да е делив со 11 е да има парен број на цифри. Потребно и доволно за деливост со 3 е збирот на цифрите да е делив со 3. Најмалиот број со наведените две особини е бројот 111111.

Решение 29: Да го разложиме 3024 на прости множители: $3024 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7$. Левата страна на равенката е производ од четири последователни цели броеви. Да забележиме дека $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7 = 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = (-6)\cdot(-7)\cdot(-8)\cdot(-9)$. Па така, од записите $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$ и $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) =$ $= (-6)\cdot(-7)\cdot(-8)\cdot(-9)$, соодветно, ги добиваме единствените решенија $x = 11$ и $x = -4$.

Решение 30: Од разложувањето $8316 = 2^2\cdot 3^3\cdot 7\cdot 11$ заклучуваме дека бараниот број е $3\cdot 7\cdot 11 = 231$. Така, $8316\cdot 231 = 2^2\cdot 3^3\cdot 7\cdot 11\cdot 3\cdot 7\cdot 11 = (2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11)^2 =$ $= 1386^2$.

Решение 31: Има две можности за производот: 77777 или 777777. Во првиот случај, од разложувањето $77777 = 7\cdot 41\cdot 271$, заклучуваме дека единствено решение е $287\cdot 271 = 77777$. Во вториот случај нема решение.

Решение 32: Да ги означиме со m, n и p, соодветно, бројот на кабини со 2, 3 и 4 кревети. Тогаш $2m + 3n + 4p = 84$. Оттука, $3n$ е парен број. Значи, n е парен број.

Решение 33: Ракувањето е симетрична релација. Во секое ракување учествуваат две лица, односно секое ракување го зголемува вкупниот број на ракувања за два. Значи, вкупниот број на ракувања, кои го имале сите луѓе од памтивек до овој момент, е парен број. Поради тоа, бројот на луѓето кои непарен број пати се ракувале, сигурно е парен број.

Решение 34: $(63 - 37 - 10 - 6) : 2 = 5$ години.

Решение 35: Има четири такви низи: 1, 4, 5, 9, 14, 23, 37; 4, 1, 5, 6, 11, 17, 28; 2, 3, 5, 8, 13, 21,34; и 3, 2, 7, 9, 16, 25,41.

Решение 36: $(450 - 2*15) : (15 + 20) = 12$ дена.

Решение 37: Од условот $a = 4k + 2 = 5s + 2$, каде што $k, s \in \mathbb{N}_0$, следува дека $4k = 5s$. Значи, $k = 5n$ за некој $n \in \mathbb{N}_0$. Оттука, бараниот број a е најмалиот број од облик $20n + 2, n \in \mathbb{N}_0$, кој е делив со 6. Тоа е бројот 42.

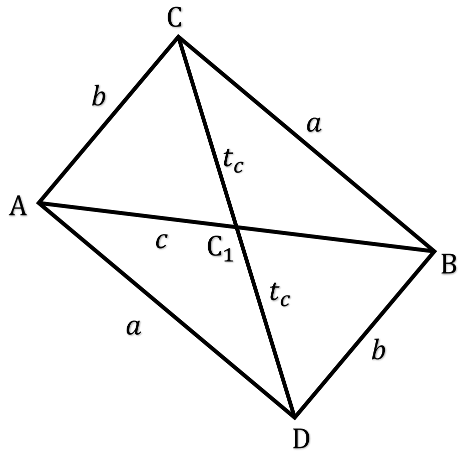
Решение 38: Непосредно проверуваме дека најмалиот природен број запишан само со двојки, кој е содржател на 814, е бројот 222222. Бидејќи $222222 : 814 = 273$, бараниот број е 273.

Решение 39: Секое поврзување на два телефони обезбедува две директни врски. Според условот, вкупниот број на директни врски треба да е $1995\cdot 7$, што е непарен број. Значи, опишаното поврзување не е можно.

Решение 40: Нека должината на правоаголникот е $4x$. Тогаш, ширината е $3x$. Бидејќи површината $P = 4x \cdot 3x = 108$, добиваме дека $12x^2 = 108$, односно $x = 3$. Значи, должината е 12 cm, а ширината 9 cm. Периметарот е 42 cm.

Решение 41: Пресечениот квадрат има страна долга 9 cm, а страните на пресечениот праоаголник се 9 cm и 7 cm (Зошто?). Оттука, страната на листот е $(9 + 7)$ cm. Бараната површина е 256 cm^2.

Решение 42: Нека $a = 29$ cm, $b = 27$ cm и $t_c = \overline{CC_1} = 26$ cm. Нека D е точка колинеарна со C и C_1, таква што $\overline{CD} = 2t_c$. Тогаш, $\Delta\, AC_1C \cong BC_1D$ и $\Delta\, AC_1D \cong BC_1C$ (бидејќи $\overline{AC_1} = \overline{C_1B} = \frac{c}{2}$, $\overline{CC_1} = \overline{C_1D} = t_c$ и $AC_1C = DC_1B$). Значи, четириаголникот $ADBC$ е паралелограм. Затоа, бараната плоштина е $P_{\Delta\, ABC} = \frac{P_{\Delta\, ADBC}}{2} = \frac{2P_{\Delta\, ADC}}{2} =$ $= P_{\Delta\, ADC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-2t_c)}$ каде што $s = \frac{a+b+2t_c}{2} = 54$ cm.
Добиваме дека $P_{\Delta\, ABC} = \sqrt{54 \cdot 27 \cdot 25 \cdot 2} = 270$cm^2.



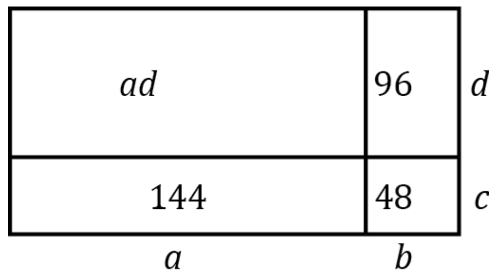
Решение 43: Бидејќи периметрите на квадратот и правоаголникот се еднакви, должината на страната на квадратот е 50 cm. Значи, плоштината на квадратот е 2500 cm^2.

Решение 44: Нека a е основата, а b кракот на триаголникот. Според условот, $a + 2b = 64$ и $b - a = 11$. Со собирање на овие равенства добиваме $3b = 75$, и оттука $b = 25$ cm. Следува дека $a = 14$ cm. Од Питагоровата теорема за висината спуштена кон основата добиваме

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{625 - 49} = 24 \text{ cm},$$

па плоштината на триаголникот изнесува $P = \frac{ah}{2} = 168$ cm^2.

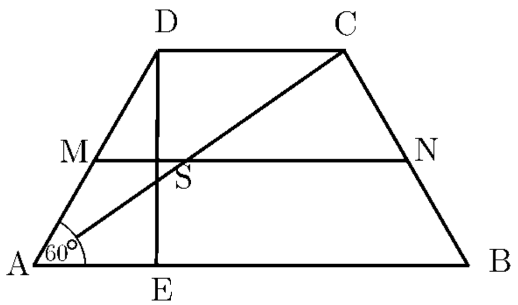
Решение 45: Да ги означиме должините (во центиметри) на страните на добиените правоаголници. Тогаш, $a{\cdot}c = 144$, $b{\cdot}c = 96$ и $b{\cdot}d = 96$. Со множење на првата и третата равенка добиваме $a{\cdot}c{\cdot}b{\cdot}d = 144 \cdot 96$. Бидејќи $b{\cdot}c = 48$, имаме $a{\cdot}d = 288$. Значи, плоштината на квадратот е $144 + 48 + 96 + 288 = 576$ cm^2, а страната е 24 cm.



Решение 46: Да ја означиме средната линија на трапезот со MN, а пресекот на MN и дијагоналата AC со S. Според условот на задачата, $\overline{MS} = 2$ cm и $\overline{SN} = 5$ cm. Бидејќи MS е средна линија за триаголникот ACD, имаме дека $\overline{DC} = 2 \cdot \overline{MS} = 4$ cm. Слично, $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{SN} = 10$ cm.

а) Периметарот на трапезот е $L = 26$ cm.

б) Нека DE е висина во трапезот спуштена кон основата. Тогаш, $\overline{AE} = \frac{10-4}{2} = 3$ cm. Значи, ΔAED е правоаголен со катети 6 cm и 3 cm, што повлекува дека $EAD = 60°$ и $ADC = 180° - 60° = 120°$.

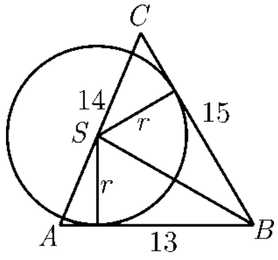


Решение 47: Со ознаките од слика 2, периметарот на помалиот правоаголник е $20 + 2x$, а периметарот на поголемиот е $20 + 20 - 2x$. Од условот на задачата ја добиваме равенката $2(40 - 2x) = 3(20 + 2x)$, чие решение е $x = 2$ cm. Бараните периметри се 24 cm и 36 cm.

Решение 48: Да го разгледаме правоаголниот триаголник AED каде што E е подножјето на висината спуштена од темето D. Од тоа што $EAD = \alpha = 60°$ следува дек $AED = 30°$, па $\overline{AE} = \frac{c}{2} = 0{,}75$ dm. Бидејќи трапезот е рамнокрак, имаме $a = b + 2\overline{AE}$, т.е. $b = 2{,}2$ dm. Така, добиваме дека $m = \frac{a+b}{2} = \frac{3{,}7+2{,}2}{2} = 2{,}95$ dm.

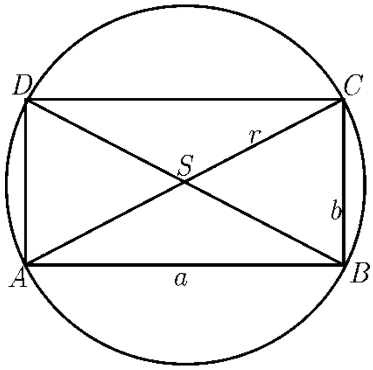
Решение 49: $P = 25$ cm^2.

Решение 50: Нека $a = 15$ cm, $b = 14$ cm и $c = 13$ cm. Плоштината на триаголникот е $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84$ cm².
Нека S е центарот на споменатата кружница и r е нејзиниот радиус. Тогаш, $P = P_{\Delta\,ABS} + P_{\Delta\,SBC} = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2}$, т.е. $84 = 14r$. Следува дека $r = 6$ cm.



Решение 51:
а) Најмал можен периметар има квадратот со страна 30 cm.
б) Најголем можен периметар има правоаголникот со димензии 3 cm и 300 cm.

Решение 52: Нека $a > b$ се две соседни страни на правоаголникот. Тогаш, $\frac{a}{2} = 4 + \frac{b}{2}$, т.е. $a = 8 + b$. Притоа, $2a + 2b = 56$, т.е. $a + b = 28$. Оттука, се добива $8 + 2b = 28$, па $b = 10$ cm. Значи, $a = 18$ cm, а плоштината е $P = 180$ cm².



Решение 53: Очигледно е дека едната страна на правоаголникот е два пати подолга од другата. Ако должината на пократката страна ја означиме со x, од условот на задачата следува дека $x = 16$ cm. Значи, периметарот на правоаголникот е за 32 cm поголем од периметарот на еден од квадратите.

Решение 54: Момчето и девојчето можат да излезат на ист кат или на различни катови. Во првиот случај имаме 5 различни начини (момчето и девојчето излегуваат на еден од 5 ката). Во вториот случај лифтот може да се испразни на $5 \cdot 4$ начини. Значи, вкупно има 25 начини.

Решение 55: а) Најпрво ги распоредуваме белите мониста. Тие сите се идентични, па постои само еден распоред. Помеѓу две произволно избрани соседни бели мониста, распоредувањето на една жолта, една сина и една црвена мониста може да се направи на 6 начини. Поради условот секои четири последователни мониста да се со различна боја, овој избран редослед е ист за сите останати тројки од жолти, сини и црвени мониста помеѓу две последователни бели монсита. Имајќи ја предвид и можноста за свртување на ѓерданот за 180°, бројот на различните ѓердани е 6 : 2=3.

б) Одговорот е ист како под а), бидејќи бројот на последователните четворки мониста не го зголемува бројот на различни можности.

Решение 56: Збирот од цифрите на секој од бараните броеви мора да биде 9 (бидејќи $3+3+3+3<18$). Такви броеви има 16. Имено, 12 од нив се запишани со цифрите: 1, 2, 3 и 3 (во некој редослед), а 4 од нив се запишани со цифрите 2, 2, 2 и 3 (во некој редослед).

Решение 57: На првото лице можеме да му дадеме 2 предмета на $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ начини. Од преостанатите 8 предмети, на второто лице може да му дадеме 3 предмети на $\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=56$ начини. Третото лице ќе ги добие преостантите 4 предмети. Секој од 45 начини на првата поделба може произволно да се комбинира со секој од 56 начини на втората поделба, па затоа вкупниот број на можности е: $45\cdot 56=2520$.

Решение 58: Кога Нина добила $\frac{1}{10}$, останале $\frac{9}{10}$ од тортата. Сара добила $\frac{1}{9}\cdot\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$ торта, а Ева добила $\frac{1}{8}$ од $\frac{8}{10}$, т.е. $\frac{1}{10}$ торта. На сличен начин заклучуваме дека и Драгана и Виктор добиле по $\frac{1}{10}$ од тортата. За Јована и за нејзините деца останала половина торта.

Решение 59: Од условот ги добиваме равенките $b+c=\frac{5}{2}$, $a+c=\frac{59}{6}$ и $a+b=\frac{5}{3}$. Со собирање на овие три равенки и делење со 2 добиваме дека $a+b+c=7$. Значи, $a=7-\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$, $b=7-\frac{59}{6}=-\frac{17}{6}$ и $c=7-\frac{5}{3}=\frac{16}{3}$.

Решение 60: Бидејќи $\frac{3}{8}$ од јаболката и $\frac{3}{10}$ од крушите тежат 60 килограми, имаме дека $\frac{9}{8}$ јаболка и $\frac{9}{10}$ круши тежат 180 килограми. Значи, $\frac{1}{8}$ јаболка имаат иста маса со $\frac{1}{10}$ круши. Оттука следува дека во продавницата на почетокот имало 80 килограми јаболка и 100 килограми круши.

Решение 61: а) $8*(18+5)=184$ km б) $8*(18-5)=104$ km

Решение 62: Првата е долга 153 cm, а втората е долга 259 cm.

Решение 63: $(700 + 740 + 760 + 800) : 3 = 1000$. Првиот учебник чини $1000 - 700 = 300$ денари, вториот $1000 - 740 = 260$ денари, третиот $1000 - 760 = 240$ денари и четвртиот $1000 - 800 = 200$ денари.

Решение 64: Во 420 грама раствор имало $420 \cdot 0{,}2 = 84$ грама сол. Во новиот раствор, на 300 грама, оваа сол претставува дел од $84 : 300 = 0{,}28$. Значи, сега има 300 грама раствор со 28 % сол.

Решение 65: Сувото грозје го добиваме со испарување на водата од свежото грозје. Количината на така наречената „сува материја“ останува непроменета. Од суво грозје „сувата материја“ сочинува 88 %. Значи, потребни се $16 \cdot 0{,}88 : 0{,}20 = 70{,}4$ килограми свежо грозје.

Решение 66: Нека плоштината на нивата (во хектари) ја означиме со x. Првиот ден трактористот изорал $7/10\ x$, вториот ден изорал $7/5 * 3/10\ x = 9/50\ x$, а третиот ден изорал $x - 7/10\ x - 9/50\ x = 6/50\ x$. Бидејќи $9/50\ x - 6/50\ x = 11{,}2$, добиваме дека $x = 186\ 2/3$.

Решение 67: Да го означиме со x бројот на дополнителни работници. Тогаш имаме $x : 44 = (20 - 4) : (20 - 4 - 5)$, од каде што се добива дека $x = 64$.

Решение 68: Ако во тие шест одделенија има n ученици, тогаш во останатите одделенија има за $0{,}15n$ повеќе. Бидејќи $0{,}15n$ е цел број, n е делив со 20 (имено, $0{,}15 = 3/20$). Од друга страна, n е делив со 6 (поради еднаквиот број на ученици во тие шест одделенија). Значи n е делив со 60. Бидејќи n е поголем од 150 и помал од 200, тоа е бројот 180. Во училиштето има 387 ученици.

Решение 69: Сигурно е дека Цвета лаже: имено, ако нејзината изјава е точна, тогаш изјавата на Анѓелина е лажна, од што би следувало дека Бобан не лаже, па тогаш изјавата на Цвета би била неточна. Бидејќи Цвета лаже, Бобан не лаже. Значи, изјавата на Анѓелина е лажна.

Решение 70: Од 1 јануари до 1 април има или 90 денови или 91 ден, во зависност од тоа дали годината е престапна или не е. Ако 1 јануари и 1 април биле во четврток, тогаш бројот на денови помеѓу овие датуми бил делив со 7. Значи, станува збор за бројот 91, а годината била престапна. Секоја престапна година има 52 недели и уште 2 дена. Бидејќи 2 јануари бил во петок, тоа значи дека во таа престапна година имало 53 петоци, а секој месец имал 4 или 5 петоци. Значи, 5 месеци имале по 5 петоци, а 7 месеци имале по 4 петоци.

Решение 71: Јована во Париз го поминала првиот ден од месецот, бидејќи ако тој вторник не е прв ден во месецот, тогаш тоа е првиот вторник по првиот понеделник. Тогаш Јована би била истовремено и во Париз и на Флорида, што не е можно. Првиот ден од следниот месец Јована била во Белград. Значи, два последователни месеци почнуваат со вторник, односно среда, што е можно само ако првиот од тие два месеца има 29 дена. Оттука заклучуваме дека годината била престапна, и дека први март бил во среда. Значи, Јована го поминала 8-Ми март во Венеција (првата среда по првиот вторник).

Решение 72: 4 мачки ловат 4 глувчиња за 4 дена, а 25 пати повеќе мачки (100 мачки) за истиот број денови ловат 25 пати повеќе (т.е. 100) глувчиња. Одговор е: за 4 дена.

Решение 73: Го полниме помалото тенџере (од 7 литри) и претураме во поголемото тенџере (од 11 литри). Повторно го полниме помалото тенџере и од него го дополнуваме поголемото тенџере. Така, во малото тенџере остануваат 3 литри вода. Таа количина ја истураме во бурето, го празниме големото тенџере и целата постапка ја повторуваме уште еднаш.

Решение 74: Од условот следува дека $\frac{2}{3}\beta$ е прав агол, т.е. $\frac{2}{3}\beta = 90°$. Оттука, $\beta = 135°$, а $\alpha = 450°$.

Решение 75: Нека страната на ромбот ја означиме со $\overline{AB} = \overline{AD} = a$, а дијагоналите со $\overline{AC} = d_1$ и $\overline{BD} = d_2$. Тогаш важат равенствата $R = \frac{a^2 d_1}{4P_{\Delta ABC}}$ и $r = \frac{a^2 d_2}{4P_{\Delta ABD}}$. Ако со P ја означиме плоштината на ромбот, тогаш $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}P$ и $P_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}P$, па $R = \frac{a^2 d_1}{2P}$ и $r = \frac{a^2 d_2}{2P}$, од каде што се добива дека $d_1 = \frac{2PR}{a^2}$ и $d_2 = \frac{2Pr}{a^2}$. Со замена на последните две равенства во $P = \frac{d_1 d_2}{2}$ се добива $P = \frac{4P^2 Rr}{2a^4}$, односно $a^4 = 2PRr$. Така, $a^2 = \sqrt{2PRr}$, па $d_1 = \frac{2PR}{\sqrt{2PRr}} = \sqrt{\frac{2PR}{r}}$ и $d_2 = \frac{2PR}{\sqrt{2PRr}} = \sqrt{\frac{2Pr}{R}}$. Со замена на последните две равенства во $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$ имаме $2\left(\frac{PR}{r} + \frac{Pr}{R}\right) = 4\sqrt{2PRr}$, од каде што со степенување се добива $P^2\left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R}\right)^2 = 8PRr$, т.е. $P = \frac{8Rr}{\left(\frac{R}{r}+\frac{r}{R}\right)^2}$.

Решение 76: Од 9 еднакви делови на отсечката MN, првата отсечка содржи 2 дела, втората 3 и третата 4. Од средината на првата отсечка до средината на третата отсечка има 6 такви делови со вкупна должина од 30 cm. Значи, деветтина од должината на отсечката MN е 5 cm, па така должината на отсечката MN е точно 45 cm.

Решение 77: $BC = 2\ cm$, $AP = 4\ cm$, $MN = 1\ cm$.

Решение 78: Нека ромбот $AECF$ има страна x. Така, $\overline{AE} = x$ и $\overline{EB} = 16 - x$. Бидејќи $ABCD$ е правоаголник,триаголникот EBC е правоаголен. Според Питагоровата теорема, имаме

$$\overline{EC}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BC}^2, \text{ т.е. } x^2 = 12^2 + (16 - x)^2.$$

Последната равенка може да се запише во облик

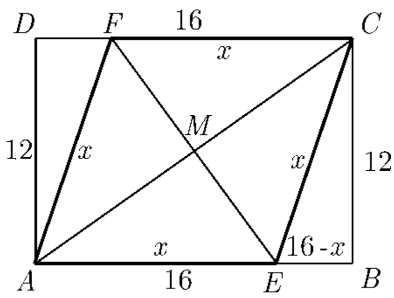
$$x^2 = 144 + 256 - 32x + x^2,$$

од каде што добиваме $32x = 400$, т.е. $x = \frac{25}{2}$.

Ќе ги употребиме плоштините на правоаголникот, ромбот и триаголникот EBC. Бидејќи $\overline{EB} = 16 - \frac{25}{2} = \frac{7}{2}$, а плоштината на ромбот е половина од производот на неговите дијагонали, добиваме:

$\frac{1}{2}\overline{EF} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} - 2\frac{1}{2}\overline{EB} \cdot \overline{BC}, \frac{1}{2}\overline{EF} \cdot 20 = 16 \cdot 12 - \frac{7}{2} \cdot 12, \frac{1}{2}EF \cdot 20 = 190 - 42.$

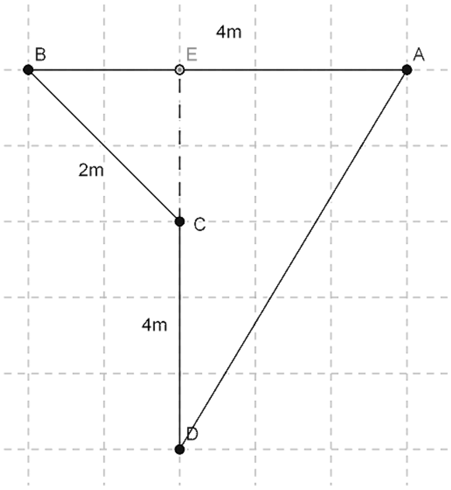
Од последната равенка следува дека $\overline{EF} = 15$ cm.



Решение 79: Бидејќи $\alpha = 180° - \beta$, имаме $(180° - \beta) - \beta = 56°$. Значи, $\beta = 62°$ и $\gamma = 28°$.

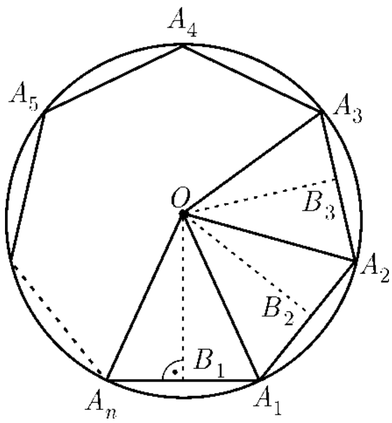
Решение 80: Должините на катетите на триаголникот се 12 cm и 16 cm, а хипотенузата е 20 cm. Радиусот на опишаната кружница е $R = \frac{c}{2} = 10$ cm, а плоштината $P = 100\pi$ cm^2.

Решение 81: Триаголникот BCE е рамнокрак правоаголен, па $\overline{CE} = \overline{BE} = \sqrt{2}$ m. Притоа, $\overline{AE} = 4 - \sqrt{2}$, $\overline{DE} = 4 + \sqrt{2}$. Значи, $\overline{AD} = \sqrt{\left(4-\sqrt{2}\right)^2 + \left(4+\sqrt{2}\right)^2} =$
$= \sqrt{16 - 8\sqrt{2} + 2 + 16 + 8\sqrt{2} + 2} = \sqrt{32 + 4} = 6$ m



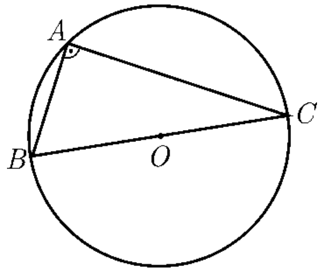
Решение 82: Бидејќи една дванаесеттина од рамниот агол е 15°, за аголот α имаме дека $\alpha = 5 \cdot 15° = 75°$. Комплементниот агол на α е 15°.

Доказ 83: Нека O е центарот на симетрија на правилниот многуаголник (види цртеж). Од складноста на рамнокраките триаголници: OA_1A_2, OA_2A_3,..., OA_nA_1 добиваме дека и нивните висини спуштени од темето O се еднакви, па лежат на иста кружница со центар во O. Таа е впишаната кружница во многуаголникот.



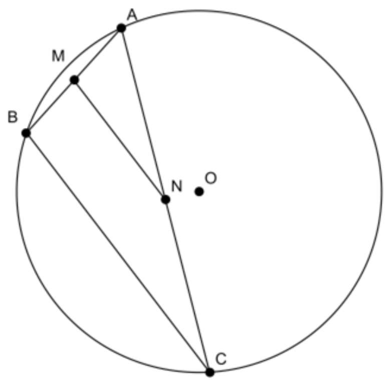
Решение 84: Бараниот агол е 90°30′.

Решение 85: Бидејќи ΔABC е правоаголен, кружницата е опишана околу него и нејзиниот центар лежи на средината на хипотенузата BC. Од Питагоровата теорема имаме дека $\overline{BC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm. Значи, радиусот на кружницата е $r = 5$ cm, а бараната плоштина е $P = 25\pi$ cm².



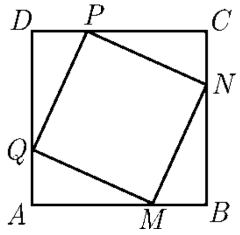
Решение 86: Од $\alpha + \beta = 90°$ имаме дека $(180° - \alpha) + (180° - \beta) = 360 - (\alpha + \beta) =$ $= 270°$.

Решение 87: Нека се тоа тетивите $\overline{AB} = 9$ cm и $\overline{AC} = 17$ cm и нивните средишни точки се M и N, соодветно. Отсечката MN е средна линија во триаголникот ABC, па $\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}$, т.е. $\overline{BC} = 10$ cm. Според Хероновата формула, $P_{\Delta ABC} = 36$ cm². Оттука $R = \frac{abc}{4P} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 17}{4 \cdot 36} = \frac{85}{8}$ cm.



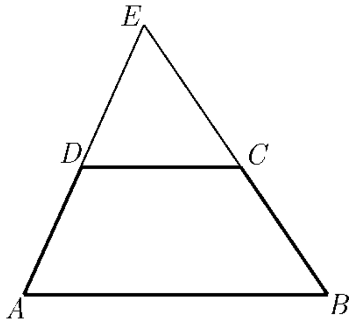
Решение 88: Бидејќи два суплементни агли φ и θ имат комплементни агли, станува збор за прави агли. Значи, $\varphi = \theta = 90°$ и $\alpha = \beta = 0°$.

Решение 89: Нека во квадратот $ABCD$ е впишан квадратот $MNPQ$ така што $\overline{AM}:\overline{MB} = 2 : 3 = k$. Од $\overline{AM} = 2k$ и $\overline{MB} = 3k$ добиваме $\overline{AB} = a = 5k$ и $\overline{MN} = a_1 = = \sqrt{(3k)^2 + (2k)^2} = \sqrt{13k^2}$. За односот на плоштините имаме $\frac{P}{P_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{25k^2}{13k^2} = \frac{25}{13}$.



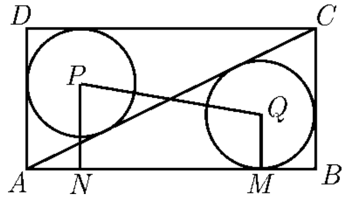
Решение 90: Нека $\overline{AD} = c = 8$ и $\overline{DE} = x$ каде што E е пресек на (продолженијата на) краците на трапезот.

Од сличноста ΔABE ΔDCE имаме $\frac{25}{15} = \frac{8+x}{8}$. Оттука, $x = 12$. Според условот на задачата $AEB = 90$. Применувајќи ја Питагоровата теорема за правоаголниот триаголник ΔDCE, добиваме дека $\overline{CE} = 9$. Слично, за правоаголниот триаголник ΔABE имаме $\overline{BE} = 15$. Оттука, $\overline{BC} = 6$. Периметарот на трапезот е $L = 54$. За плоштината на трапезот добиваме $P = P_{ABE} - P_{DCE} = 150 - 54 = 96$.



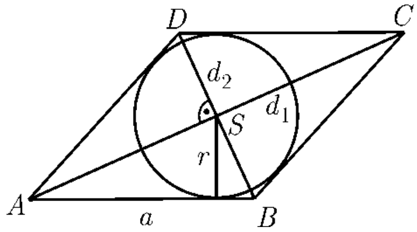
Решение 91: Според условот, $(180 - \alpha) - \alpha = \alpha - (90° - \alpha)$. Оттука, $\alpha = 67°30'$.

Решение 92: Според Питагоровата теорема, $\overline{AC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ cm. Од формулата $P = rs$ за радиусите на впишаните кружници имаме дека изнесуваат $r = 2$ cm. Четириаголникот $NMQP$ е правоаголен трапез, при што со P и Q се означени центрите на впишаните кружници, а со N и M нивните подножја на страната AB, соодветно. Оттука, $\overline{PQ} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ cm.

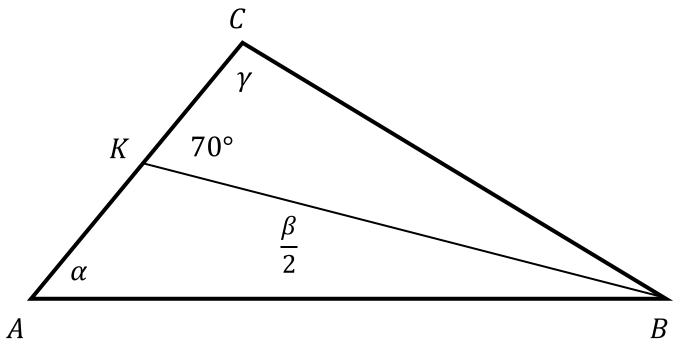


Решение 93: Ако триаголникот е правоаголен, тогаш збирот на неговите остри внатрешни агли е еднаков на третиот (прав) агол, односно еден остар агол е еднаков на разликата од правиот агол и другиот остар агол.
Обратно, нека важи $\alpha = \beta + \gamma$. Бидејќи $\alpha + (\beta + \gamma) = 180°$, имаме дека $\alpha + \alpha = 180°$, т.е. аголот $\alpha = 90°$. Следува дека триаголникот е правоаголен. Ако, пак, $\alpha = \beta - \gamma$, тогаш $\alpha + \gamma = \beta$, па, како во претходниот случај, докажуваме дека $\beta = 90°$.

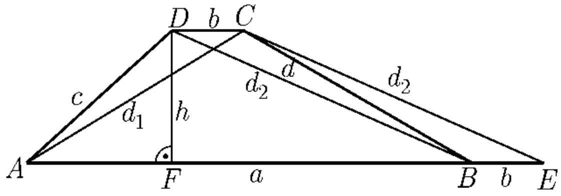
Решение 94: Познато е дека $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$, од каде што $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$. Бидејќи $h = 2r$, за плоштината на ромбот важи равенството $\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = a \cdot 2r$, од каде што се добива дека $d_1 \cdot d_2 = 4ar$. Од условот на задачата имаме $6a = d_1 + d_2$. Со квадрирање на ова равенство и со замена на $d_1 \cdot d_2 = 4ar$ се добива $4a^2 - ar = 0$, односно $a(4a - r) = 0$. Оттука, $a = \frac{r}{4}$.



Решение 95: Аголот BKA е суплементен со аголот $\measuredangle BKC$, па според тоа, $\measuredangle BKA = 110°$. Како надворешен агол за триаголникот ABK (види цртеж) $\measuredangle BKC = = \alpha + \frac{\beta}{2}$, па оттука, $\alpha = 70° - \frac{\beta}{2}$. Слично, $\measuredangle BKA$ е надворешен агол на триаголникот BCK, па $\gamma = 110° - \frac{\beta}{2}$. Според тоа, $\gamma - \alpha = 110° - \frac{\beta}{2} - \left(70° - \frac{\beta}{2}\right) = 40°$.



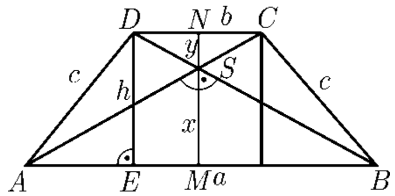
Решение 96: Нека E е точка од продолжението на AB (преку темето B) така што $\overline{BE} = b$. Тогаш, $BECD$ е паралелограм и $\overline{CE} = d_2$. Да забележиме дека плоштината на трапезот е еднаква со плоштината на триаголникот AEC. Бидејќи ни се познати сите страни на ΔAEC (тоа се $a + b$, d_1 и d_2), неговата плоштина може да ја пресметаме со помош на Хероновата формула. Имаме $s = \frac{21+17+10}{2} = 24$, па $P_{ABCD} = P_{\Delta AEC} = \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} = 84$ cm².



Решение 97: Нека $\alpha_1 + \beta_1 = 270°$. Бидејќи $\alpha_1 = \beta + \gamma$ и $\beta_1 = \alpha + \gamma$, добиваме дека $\alpha_1 + \beta_1 = (\beta + \gamma + \alpha) + \gamma = 180° + \gamma$, односно $270° = 180° + \gamma$. Оттука, $\gamma = 90°$.

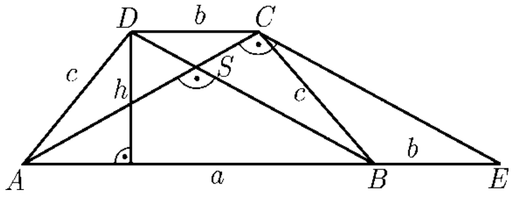
Решение 98:

Прв начин: Да го означиме пресекот на дијагоналите со S. Тогаш, ΔABS е рамнокрак и правоаголен со висина $\overline{SM} = x$. Од Евклидовата теорема следува $x^2 = \overline{AM} \cdot \overline{MB}$, т.е. $x = 10$ cm. Аналогно од ΔCDS се добива дека $y = \overline{SN} = 6$ cm. Конечно, $h = x + y = 16$ cm, па $P = \frac{(20+12)\cdot 16}{2} = 256$ cm².

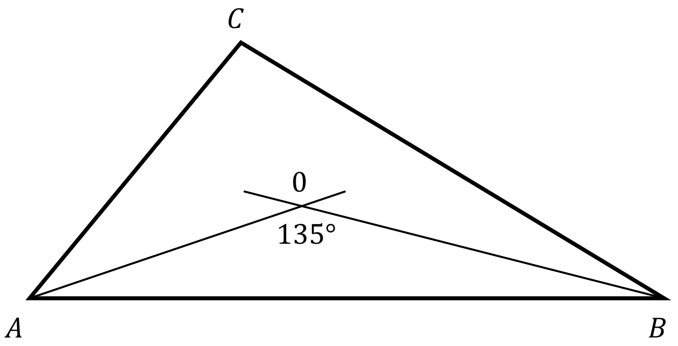


Втор начин: Низ точката C да повлечеме права паралелна со BD до пресекот E со продолжението на AB. Тогаш, $BECD$ е паралелограм, а ΔAEC е рамнокрак и правоаголен со хипотенуза $\overline{AE} = 32$ cm.

Според Евклидовата теорема, $h^2 = \left(\frac{32}{2}\right)^2$, т.е. $h = 16$ cm. За плоштината на трапезот имаме $P = \frac{(20+12)\cdot 16}{2} = 256$ cm².

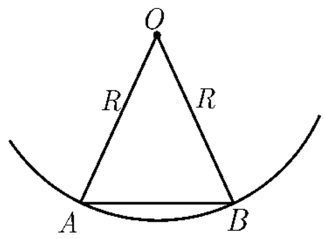


Решение 99: Нека симетралите на внатрешните агли α и β на триаголникот ABC се сечат во точка O (види цртеж) и $\sphericalangle AOB = 135°$. Од теоремата за збир на внатрешните агли на триаголникот AOB добиваме $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 135° = 180°$. Оттука, $\alpha + \beta = 90°$. Следува дека $\gamma = 90°$.

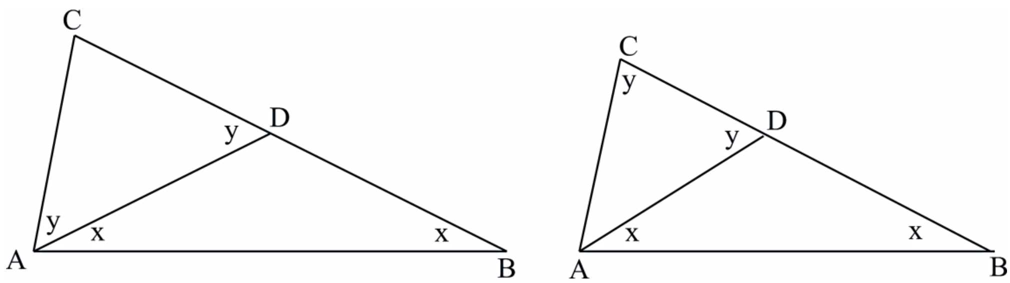


Решение 100: Карактеристичен триаголник (види цртеж) за правилен триесетаголник со страна $a = 6$ cm е ΔABO за кој $AOB = \frac{360°}{30} = 12°$ и $\overline{AB} = 6$ cm. Најдолгата дијагонала на правилен триесетаголник има должина еднаква на дијаметарот на опишаната кружница, т.е.

$$d = 2R = 2\overline{AO} = 2 \cdot \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{sin\frac{12°}{2}} = \frac{\overline{AB}}{sin6°} \approx 57{,}4 \text{ cm}.$$



Решение 101: Нека ABC е дадениот триаголник со агол $\alpha = 75°$ и нека D е точка на страната BC така што триаголниците ABD и ACD се рамнокраки.



Има две можности: $AD = BD$ и $AC = CD$ (сликата горе лево) или $AC = AD = BD$ (слика горе десно). Да ги означиме со x и y, соодветно, еднаквите агли на рамнокраките триаголници. И во двата случаја y е надворешен агол кај врвот на рамнокракиот триаголник ABD, па затоа $y = 2x$. Во првиот случај, $x + y = 75°$, т.е. $x = 25°$, а аглите на триаголникот ABC се: $\alpha = 75°$, $\beta = 25°$, $\gamma = 80°$ Во вториот случај, $x + y + 75° = 180°$, од каде што $x = 35°$, а аглите на триаголникот ABC се: $\alpha = 75°, \beta = 35°, \gamma = 70°$.

Решение 102: Ќе ги разгледаме трите можни случаи.

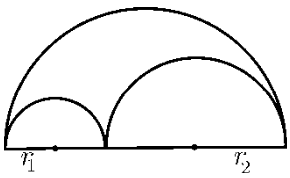
Прв случај: Центарот на кружницата лежи на висината CD на триаголникот ABC. Да означиме $\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AO}=R$. Тогаш, $\overline{AD}=\frac{a}{2}$, ΔADC и ΔADO се правоаголни, па Питагоровата теорема дава $\overline{CD}^2=b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ и $R^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\overline{OD}^2$. Бидејќи $\overline{OD}=\overline{CD}-\overline{CO}=\overline{CD}-R$, имаме $R^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2-2R\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}+R^2$, т.е. $b^2-2R\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=0$, од каде што $R=\frac{b^2}{2\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}$.

Втор случај: Центарот на кружницата лежи на продолжението на висината CD од триаголникот ABC. Да означиме $\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AO}=R$. Тогаш, $\overline{AD}=\frac{a}{2}$, ΔADC и ΔADO се правоаголни, па Питагоровата теорема дава $\overline{CD}^2=b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ и $R^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+$ $+\overline{OD}^2$. Бидејќи $\overline{OD}=\overline{CO}-\overline{CD}=R-\overline{CD}$, имаме $R^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+R^2-2R\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}+$ $+b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ т.е. $b^2-2R\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=0$, од каде што $R=\frac{b^2}{2\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}$.

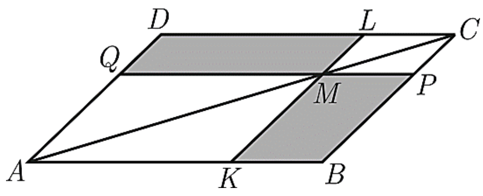
Трет случај: Центарот на кружницата лежи на основата AB, т.е. $R=\frac{a}{2}$.

Да забележиме дека радиусот на опишаната кружница може да се одреди и со помош на формулата $R=\frac{ab^2}{4P}$, ако за P се користи Хероновата формула.

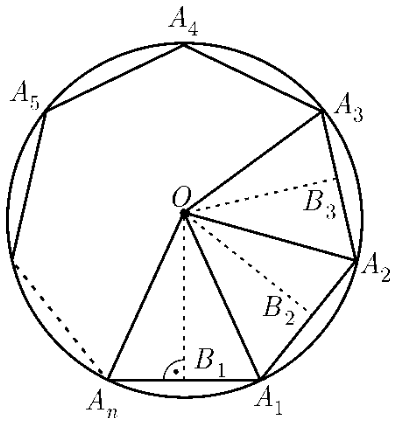
Решение 103: (остатокот се вика ARBELOS што во превод значи чевларски нож)
Бидејќи $r_1+r_2=R$, со квадрирање на ова равенство се добива $r_1^2+2r_1r_2+r_2^2=R^2$. Плоштината на остатокот е разлика помеѓу плоштината на полукругот и збирот од плоштините на двата полукруга: $P=\frac{R^2\pi}{2}-\left(\frac{r_1^2\pi+r_2^2\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}(R^2-r_1^2-r_2^2)=r_1r_2\pi$. Добиваме дека $P=21\pi$ cm².



Решение 104: Триаголниците AKM и MQA имаат еднакви страни, па $\Delta AKM \cong \Delta MQA$. Слично, $\Delta MPC \cong \Delta CLM$ и $\Delta ABC \cong \Delta CDA$. Оттука, $P_{QMLD} = P_{\Delta ACD} - P_{\Delta AMQ} - P_{\Delta MCL} = P_{\Delta ABC} - P_{\Delta AKM} - P_{\Delta MPC} = P_{KBPM}$.



Решение 105: Нека многуаголникот има n страни, внатрешен агол α и страна a. Да ги повлечеме симетралите на внатрешните агли кај две соседни темиња, на пример, A_1 и A_2, и да го означиме пресекот со O (бидејќи $\alpha < 180$, симетралите се сечат во внатрешноста на многуаголникот). Тогаш, $OA_1A_2 = OA_2A_1 = \frac{\alpha}{2}$, па триаголникот OA_1A_2 е рамнокрак. Нека O_1 е пресек на симетралите на аглите $A_1A_2A_3$ и $A_2A_3A_4$. Точките O и O_1 лежат на симетралата на $A_1A_2A_3$.
Бидејќи $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$ и $OA_1A_2 = OA_2A_1 = OA_2A_3 = OA_3A_2 = \frac{\alpha}{2}$, добиваме дека $\Delta OA_1A_2 \cong O_1A_2A_3$, па следува дека $\overline{OA_2} = \overline{O_1A_2}$ и оттука $O \equiv O_1$. Значи, симетралите на аглите кај A_1, A_2 и A_3 се сечат во една точка O, и $\overline{OA_1} = \overline{O_1A_2} = \overline{OA_3}$. Резонирајќи на овој начин, заклучуваме дека симетралите на сите внатрешни агли на многуаголникот се сечат во O и $\overline{OA_1} = \overline{O_1A_2} = \overline{OA_3} = \cdots = \overline{OA_n}$. Значи, темињата A_1, A_2,..., A_n лежат на кружница со радиус $R = \overline{OA_1}$ и центар во O. Тоа е бараната кружница опишана околу многуаголникот.

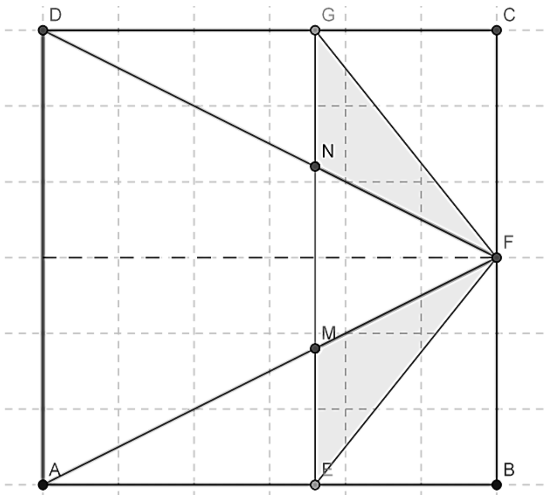


Решение 106: Според условот на задачата,

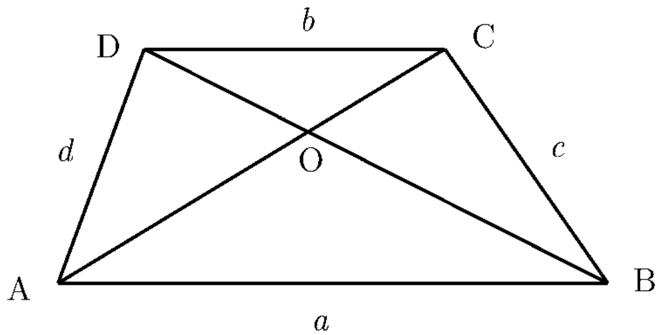
$$P_{\Delta GEF} = \frac{36 \cdot 12}{2} = 216 \text{ cm}^2.$$

Да ги означиме со M, N пресечните точки на GE со страните AF, DF, соодветно. Бараната плоштина е $P = P_{\Delta GEF} - P_{\Delta NMF}$. Значи, останува да ја одредиме плоштината на триаголникот NMF.

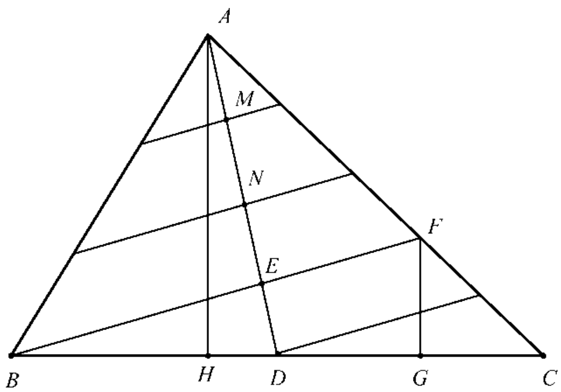
Бидејќи триаголниците ABF и AEM се слични, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EM}}$, т.е. $\frac{36}{18} = \frac{36-12}{\overline{EM}}$. Оттука, $\overline{EM} = 12$ cm. Аналогно, од сличноста на триаголниците DFC и DNG, се добива дека $\overline{GN} = 12$ cm. Значи, $\overline{MN} = 36 - 2 \cdot 12 = 12$ cm. Конечно, $P_{\Delta NMF} = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72$ cm², а $P = P_{\Delta GEF} - P_{\Delta NMF} = 216 - 72 = 144$ cm².



Решение 107: Нека $\overline{AB} = a$ и $\overline{CD} = b$ така што $a : b = 1 : 5$, односно $b = 5a$. Од сличноста на триаголниците ABO и CDO имаме $P_{\Delta ABO} : P_{\Delta CDO} = a^2 : b^2$. Така, $P_{\Delta ABO} : P_{\Delta CDO} = a^2 : 25a^2$, што повлекува дека $P_{\Delta CDO} = 25P_{\Delta ABO}$. Според условот на задачата, $P_{\Delta ABO} + P_{\Delta CDO} = 120$. Значи, $P_{\Delta ABO} + 25P_{\Delta ABO} = 120$, од каде што добиваме $P_{\Delta ABO} = 4{,}62$ cm². Така, $P_{\Delta CDO} = 115{,}38$ cm².



Решение 108: Од равенството $4\overline{AE} = 3\overline{AD}$ добиваме $\overline{AE} = \frac{3}{4}\overline{AD}$. Постојат точки M и N на $\overline{AE}$ така што $\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NE} = \overline{ED}$. Да ги повлечеме правите низ M, N и D кои се паралелни со BF. Така, страната AC е поделена на пет еднакви делови, при што $\overline{CF} : \overline{CA} = 2 : 5$. Ако AH е висина на ΔABC, тогаш од сличноста на правоаголните триаголници ΔACH и ΔECG имаме $\overline{AH} : \overline{FG} = \overline{AC} : \overline{FC} = 5 : 2$, т.е. $\overline{FG} = \frac{2}{5}\overline{AH}$. Според тоа, $P_{\Delta BCF} = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{FG} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{2}{5}P_{\Delta ABC}$. Значи, $P_{\Delta ABF} = \frac{3}{5}P_{\Delta ABC}$ и $P_{\Delta BCF} = \frac{2}{3}P_{\Delta ABF}$.



Решение 109: 11 cm.

Решение 110: За првите 11 дена ќе помине $11(5-4) = 11$ m. Во текот на дванаесеттиот ден ќе ги помине преостанатите 4 m до врвот. Значи, полжавот ќе се искачи на врвот од дрвото за 12 дена.

Решение 111: $\left(90 : \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{7}{8} \cdot \left(90 : \frac{3}{4}\right) : 100 \cdot 32 = 4032$ kg пченица.

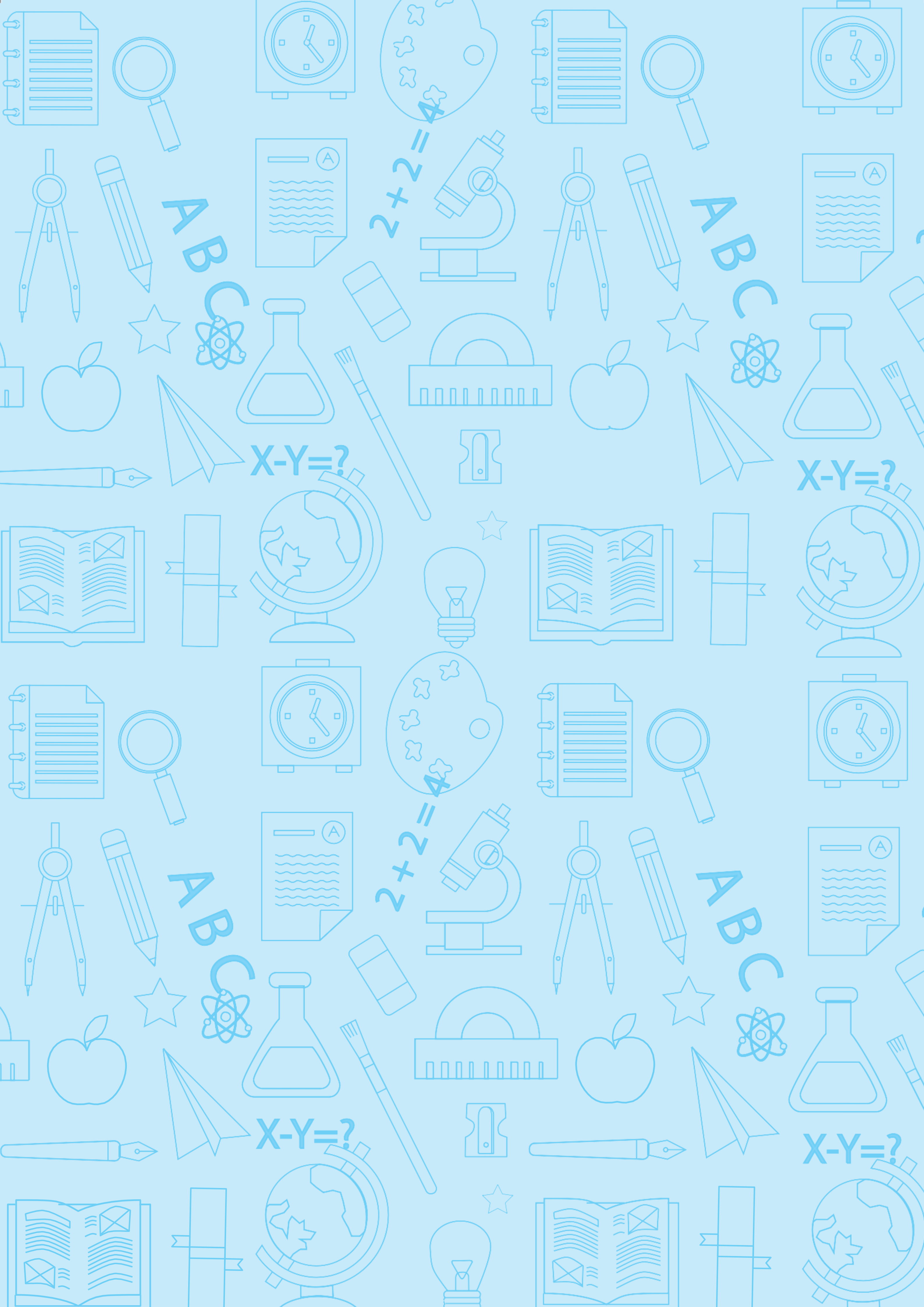
Решение112: Основата има должина $(26 - 3 \cdot 2) : 4 = 5$ cm, а кракот 7 cm.

Решение 113: $\overleftarrow{CD} = (2*24 - 32) : 2 = 8$ cm.

Решение 114: Вкупно 10. Ако се тоа точките A, B, C, D и E, тогаш триаголниците се: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE и CDE.

Решение 115: Во коцка со раб 1 m има 1000000000 коцки со раб 1mm. Висината на столбот ќе биде 1000 километри.

Решение 116: Бисектрисата на надворешниот агол е нормална на бисектрисата на внатрешниот агол, односно на висината спуштена кон основата на тој рамнокрак триаголник.


ABC
2+2=4
X-Y=?