ТРАЈЧЕ ЃОРЃИЈЕВСКИ
ЛИДИЈА ФИЛИПОВСКА
НАТАША ПОПОВСКИ
МИРКО ПЕТРУШЕВСКИ

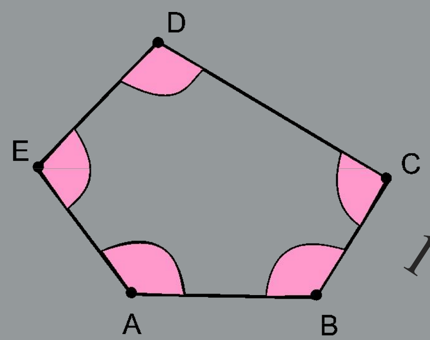
МАТЕМАТИКА СО ЛОГИКА

ПРИРАЧНИК

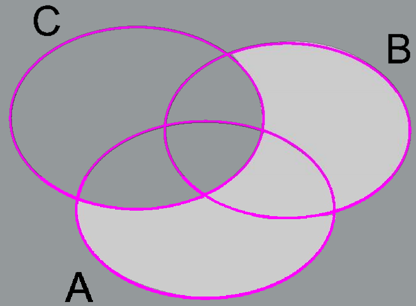
ЗА УЧЕНИЦИ, НАСТАВНИЦИ И РОДИТЕЛИ

ШЕСТО ОДДЕЛЕНИЕ НА ДЕВЕТГОДИШНОТО ОСНОВНО ОБРАЗОВАНИЕ

$T^{o}K = t^{o}C + 273{,}16$



$100 : (41{,}2 - 0{,}3x) = 2{,}5$



14,18	**2**
7,9	**3**
7,3	**3**
7,1	**7**
1	

Биро за развој на образованието

Издавач: Биро за развој на образованието
За издавачот: м-р Весна Хорватовиќ, директор

Автори: Трајче Ѓорѓијевски, Лидија Филиповска, м-р Наташа Поповски, м-р Мирко Петрушевски
МАТЕМАТИКА СО ЛОГИКА - ПРИРАЧНИК - за ученици, наставници и родители - шесто одделение на деветгодишното основно образование

Рецензенти: м-р Лилјана Поленаковиќ, Аница Алексова

Компјутерска графика: Светлана Стојчева

Печати: Европа 92 - Кочани

Тираж: 1000 примероци

Изданието е печатено со финансиска поддршка на
Канцеларијата на УНИЦЕФ, Скопје

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека
„Св. Климент Охридски“, Скопје

373.3:51(035)

МАТЕМАТИКА со логика : прирачник за ученици, наставници и родители :,
шесто одделение на деветгодишното основно образование / Трајче
Ѓорѓијевски ... (и др.). - - Скопје : Биро за развој на образованието,
2013. - 188 стр. : илустр. ; 30 см

Библиографија: стр. 188

ISBN 978-608-206-043-9
1. Ѓорѓијевски, Трајче (автора0
а) Математика - Основно образование - Прирачници

COBISS.MK-ID 94222858

СОДРЖИНА

ВОВЕД

Идејата за пишување на овој прирачник по математика за учениците во шесто одделение на деветгодишното основно образование произлезе од потребата за подобрување на знаењата и вештините на наставниците за реално, етичко и валидно оценување, како и за подобро информирање на учениците и родителите за тоа што се очекува да знаат учениците за секоја оценка. Проблемите на кои наидуваат наставниците, учениците и нивните родители, а се поврзани со оценувањето произлегуваат од:

- недоволното познавање и несоодветната примена на стандардите за оценување на постигањата на учениците;
- недоволното познавање и несоодветната примена на критериумите за оценување;
- нетранспарентното и нереалното оценување, како и оценувањето под притисок;
- немањето аргументи за оправдување на изведената оценка при средба со родителите, што предизвикува недоверба кај учениците и родителите за процесот на оценување;
- немањето увид на учениците и родителите во очекуваните резултати од учениците за различни нивоа и неинформираноста за тоа што треба да се знае за соодветна оценка;
- непрактикувањето или погрешното практикување на самооценувањето и заемното оценување кај учениците;
- некористењето од страна на наставниците на исти критериуми за оценување на знаењата на учениците;
- немањето сознание, базирано на докази, кај родителите за знаењата на сопствените деца;
- немањето можност на родителите за следење на оценувањето по математика базирано на стандарди и критериуми, а со тоа и неможност за благовремено делување за надминување на неправилностите при оценувањето.

Авторите се надеваат дека Прирачникот ќе им помогне на наставниците, на учениците и на нивните родители поуспешно да надминат дел од проблемите при оценувањето по предметот математика во шесто одделение на деветгодишното основно образование.

Очекуваме дека користењето на овој прирачник ќе им овозможи:

на наставниците:

- соодветна примена на стандардите за оценување на постигањата на учениците;
- соодветна примена на критериумот за оценување;
- транспарентно и реално оценување;
- прибирање докази и аргументи за оправданоста на изведената оценка кои може да се презентираат при средба со родителите, со што се зголемува довербата кај учениците и родителите за процесот на оценување;
- согледување на границата помеѓу преодната оценка и слабата оценка;
- стекнување сознание за тоа што се очекува ученикот да знае за определена оценка;
- можност за користење на самооценувањето и заемното оценување на часовите;
- користење еднакви критериуми при вреднувањето на знаења кај учениците;
- стекнување информации кои овозможуваат благовремено коригирање при оценувањето:

на учениците и родителите:

- да проценат дали оценувањето е реално;
- зголемување на довербата за процесот на оценување;
- согледување на границата помеѓу преодната оценка и слабата оценка;
- стекнување информации за тоа што се очекува ученикот да знае за определена оценка;
- појасно и полесно разбирање на очекуваните резултати од учениците;
- навремена информираност за напредокот при напорите за да се постигне повисоко ниво на знаење;
- можност за само-оценување и заемно оценување;
- можност на родителите за проценка на објективноста на оценувањето кај своите деца;
- стекнување информации кои овозможуваат благовремено реагирање за надминување на неправилностите при оценувањето.

Меѓу другото, задачите кои ги нуди Прирачникот може да се користат при диференцирана работа во наставата по математика. Во диференцираната настава често се планираат самостојни активности на учениците, при што наставникот може да формира хомогени групи (ученици со исти/слични знаења и способности) и во работата со секоја група да користи задачи од соодветно ниво.

Прирачникот содржи:

1. Стандарди по математика за шесто одделение на деветгодишното основно образование, кои даваат информации за очекуваните знаења на учениците на четири нивоа, и тоа за секоја тема која се изучува во VI одделение.
2. Критериум за оценки.
3. Во рубриката **(А) УЧЕНИКОТ ТРЕБА ДА ЗНАЕ ДЕКА** се дадени поими, дефиниции и правила, кои се илустрирани со соодветни примери (прашања и задачи) за I, II, III и IV тема застапени во VI одделение. Содржините во оваа рубрика се однесуваат на она што најслабите ученици би требало да го знаат и да умеат да го направат.
4. Во рубриката **(Б) УЧЕНИКОТ ПОКАЖУВА ДЕКА РАЗБИРА** се дадени објаснувања на поими, дефиниции и правила, кои се илустрирани со соодветни примери (прашања и задачи) од I, II, III и IV тема.
5. Во рубриката **ЗАДАЧИ ОД НИВО А И НИВО Б** се избрани задачи од I, II, III и IV тема.
6. Во рубриката **(В) УЧЕНИКОТ ТРЕБА ДА ГО ПРИМЕНИ СВОЕТО ЗНАЕЊЕ И РАЗБИРАЊЕ** се обраќаме на учениците со трето ниво од когнитивните способности од I, II и III тема.
7. Во рубриката **(Г) УЧЕНИКОТ ТРЕБА ДА КОРИСТИ ЛОГИЧКО СЛЕДСТВО** се обраќаме на учениците со четврто ниво од когнитивните способности од I, II и III тема.
8. Во рубриката **ЗАДАЧИ ОД НИВО В И НИВО Г** се избрани задачи од I, II, III и IV тема.
9. Во рубриката **ЗАДАЧИ ШТО СЕ РЕШАВААТ НА ПОВЕЌЕ НАЧИНИ** се дадени задачи од сите теми и се понудени повеќе решенија. Ваквите задачи може да бидат решени на повеќе различни начини и треба да се бара од учениците да ги решаваат на за нив најпогодниот начин и да го образложат своето решавање.
10. Во рубриката **ТЕСТОВИ** дадени се тестови со задачи на различни нивоа од темите I, II и III и IV, како и клуч за оценување и скала за вреднување на резултатите.

Голема благодарност до рецезентите за нивниот придонес во подобрувањето на ракописот.

Авторите

СТАНДАРДИ

<table>
<tr><th colspan="2">Тема 1: ПРИРОДНИ БРОЕВИ</th></tr>
<tr><th>НИВО</th><th>СТАНДАРДИ</th></tr>
<tr><td>ПОМНЕЊЕ</td><td>Ученикот/ученичката:
▪ воочува множество;
▪ препознава множество запишано со Венов дијаграм, на табеларен начин и описно;
▪ означува припадност на елемент на множество и број на елементи на дадено множество;
▪ искажува дефиниција за конечно и бесконечно множество;
▪ искажува дефиниција за еквивалентни множества;
▪ искажува дефиниција за подмножество и вистинско подмножетво;
▪ искажува дефиниции за унија, пресек и разлика на две множества;
▪ обележува унија, пресек и разлика на множества, како и подмножество со симболи;
▪ искажува дефиниција за подреден пар и декартов производ;
▪ идентификува и именува прва и втора компонента на подреден пар;
▪ го запишува множеството $\mathbb{N}_0$;
▪ идентификува класи и позиции на броеви;
▪ ги идентификува компонентите од собирањето, одземањето, множењето и делењето на два броја;
▪ искажува зависност на збир, разлика, производ и количник од промената на компонентите;
▪ ги искажува и запишува комутативното и асоцијативното својство на собирањето и множењето во множеството природни броеви;
▪ ги искажува и запишува дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето или одземањето во множеството природни броеви;
▪ искажува дефиниција за степен и дава примери;
▪ идентификува и именува основа и степенов показател на степен;
▪ ги искажува правилата за одредување на непознатите компоненти во елементарните равенки;
▪ ги искажува признаците за деливост со 2, 3, 4, 5 и 9;
▪ искажува дефиниција за прост и сложен број;
▪ дефинира заеднички делител и најголем заеднички делител;
▪ дефинира заеднички содржател и најмал заеднички содржател.</td></tr>
</table>

РАЗБИРАЊЕ	▪ Запишува подмножество и вистинско подмножество на дадено множество; ▪ го разбира значењето на <u>и</u> и <u>или</u>; ▪ одредува унија, пресек и разлика на две множества дадени табеларно и со Венов дијаграм; ▪ разликува подреден пар и двоелементно множество; ▪ дава примери со броеви за комутативен и асоцијативен закон за собирање и множење; ▪ дава примери со броеви за дистрибутивен закон за множење во однос на собирање и одземање; ▪ разликува цифра од број; ▪ ги извршува четирите аритметички операции со природни броеви; ▪ одредува количник и остаток при делење на природни броеви; ▪ објаснува што е бројна права и ги подредува природните броеви на бројна права; ▪ запишува производ на еднакви множители во вид на степен; ▪ составува и решава бројни изрази со една операција, зададени текстуално; ▪ објаснува преку пример за промената на вредноста на операцијата во зависност од промената на компонентите и истото го запишува симболички; ▪ одредува непозната компонента во равенка; ја објаснува скратената постапка за одредување на НЗС.
ПРИМЕНА	▪ Утврдува дали множеството дадено со кој било запис е конечно или бесконечно; ▪ утврдува дали две можества дадени со кој било запис се еднакви или еквивалентни; ▪ одредува вредност на бројни изрази; ▪ применува комутативен и асоцијативен закон за побрзо собирање и множење; ▪ применува дистрибутивен закон за множење во однос на собирање и множење; ▪ решава посложени равенки со сведување на елементарни равенки; ▪ составува и решава бројни изрази зададени текстуално; ▪ одредува НЗС и НЗД на два и повеќе броеви; ▪ одредува непозната цифра на број за да биде задоволен некој признак за деливост; ▪ решава текстуални задачи со примена на НЗС и НЗД; утврдува дали збир, разлика и производ на природни броеви е делив со природен број.
АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ	▪ Одредува унија, пресек и разлика на две множества дадени на описен начин; ▪ ја разбира смислата на зборовите <u>и</u> и <u>или</u>; ▪ докажува некои тврдења од деливост; ▪ одредува остаток при делење на степен со број и одредува на која цифра завршува број запишан во вид на степен; ▪ дискутира за резултатите добиени при делење со нула; ▪ открива свој начин на решавање задачи и истиот го објаснува; ▪ со броен израз претставува проблемски ситуации и образложува; решава сложени проблемски ситуации од секојдневниот живот и го објаснува решението.

<table>
<tr><th colspan="2">Тема 2: ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ ВО РАМНИНАТА</th></tr>
<tr><th>НИВО</th><th>СТАНДАРДИ</th></tr>
<tr><td>ПОМНЕЊЕ</td><td>Ученикот/ученичката:
▪ искажува основни својства на права;
▪ искажува дефиниција за отсечка, полуправа и растојание меѓу две точки;
▪ препознава колинеарни и неколинеарни точки;
▪ препознава заемен однос на точка и права;
▪ препознава заемен однос на две прави;
▪ искажува својства за растојание меѓу две точки;
▪ разликува полуправа од права и отсечка од полуправа;
▪ искажува дефиниција за средна точка на отсечка и дава пример;
▪ искажува дефиниција за искршена линија;
▪ препознава и именува елементи на искршена линија;
▪ искажува дефиниција за изведени и основни поими;
▪ набројува основни и изведени поими;
▪ искажува дефиниција за кружница и дава пример каде што ги покажува и означува нејзините елементи: центар, радиус, дијаметар и тетива;
▪ црта кружница со шестар при даден радиус и центар и ги именува областите кои се добиени со цртање на кружницата;
▪ разликува кружница од круг;
▪ препознава и именува заемна положба на права и кружница;
▪ препознава и именува заемна положба на две кружници;
▪ искажува дефиниција за агол;
▪ ги набројува елементите на аголот;
▪ разликува конвексен од неконвексен агол;
▪ препознава соседни, накрсни и напоредни агли;
▪ препознава полн, рамен, тап, прав и остар агол;
▪ искажува дефиниција за централен агол и кружен лак;
▪ запомнува што претставува еден степен и ги наведува помалите мерки од степенот;
▪ искажува дефиниција за нормални прави, растојание од точка до права, симетрала на отсечка и симетрала на агол;
▪ искажува дефиниции за комплементни и сумплементни агли;
▪ искажува дефиниција за многуаголник, дава пример и ги набројува елементите на многуаголникот;
▪ именува видови на многуаголници.
▪ Дава примери за повеќе начини на означување на права кога на истата има означено три, четири и повеќе колинеарни точки;
▪ го објаснува неравенството на триаголник, со три неколинеарни точки користејќи графички приказ;
разликува отсечка и должина на отсечка;</td></tr>
</table>

РАЗБИРАЊЕ	▪ објаснува во кој случај дадена точка е меѓу две точки; ▪ објаснува како графички и аритметички се одредува збир и разлика на две отсечки; ▪ објаснува постапка на конструирање симетрала на отсечка и агол; ▪ дава примери за изведени поими користејќи ги основните поими; ▪ објаснува кога една права е тангента или секанта на кружница и кога една права и кружница немаат заеднички точки преку растојание од точка до права и истото графички го илустрира; ▪ ја објаснува заемната положба на две кружници користејќи го централното растојание; ▪ опишува соседни, накрсни и напоредни агли; ▪ објаснува аритметичко собирање и одземање на агли; ▪ објаснува за растојание од точка до права; ▪ објаснува како се дели отсечка или агол на 2, 4, 8, 16 итн. делови со примена на симетрала на отсечка или симетрала на агол; објаснува како се пресметува периметар на многуаголник.
ПРИМЕНА	▪ Одредува број на прави определени од конечен број точки во зависност од нивната положба; ▪ решава задачи од практиката каде се користи заемната положба на точка и права, две прави, поимот меѓу и слично; ▪ дели отсечка или агол на 2, 4, 8, 16 итн. со примена на симетрала на отсечка или симетрала на агол; ▪ одредува заемна положба на две кружници преку централното растојание; решава посложени текстуални задачи со примена на периметар на многуаголник.
АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ	▪ Изведува формула за одредување и именување на најголем број на прави определени со конечен број точки; ▪ решава задачи со примена на аритметичкото и графичкото собирање и одземање на отсечки или агли; ▪ решава текстуални задачи со користење на графичко собирање на отсечки, симетрала на отсечка, графичко собирање на агли, симетрала на агол и слично; ▪ прави цртежи со посложени барања од растојание на точка до права и донесува заклучоци; ▪ решава посложени примери со примена на комплементни и суплементни агли; ▪ проценува големина на агол од цртеж или црта агол со дадена големина без агломер, потоа ја проверува својата проценка со мерење на аголот; прави цртежи со посложени барања од заемна положба на права и кружница и заемна положба на две кружници и користи логичко следство за изведување на заклучоци.

<table>
<tr><th colspan="2">Тема 3: ДРОПКИ. ДЕЦИМАЛНИ БРОЕВИ</th></tr>
<tr><th>НИВО</th><th>СТАНДАРДИ</th></tr>
<tr><td>ПОМНЕЊЕ</td><td>Ученикот/ученичката:
▪ чита дропка;
▪ искажува дефиниција за права, неправа дропка (мешан број) и привидна дропка;
▪ идентификува и именува броител, именител и дробна црта на дропка;
▪ препознава и именува видови дропки;
▪ препознава и чита дропка прикажана на бројна права;
▪ искажува правило за споредување на дропки кои имаат исти именители или пак имаат исти броители и дава примери;
▪ искажува дефиниција за еднаквост на дропки;
▪ искажува правила за собирање и одземање на дропки со исти именители и дава примери;
▪ искажува правило за проширување и скратување на дропки и дава примери;
▪ искажува дефиниција за децимална дропка и децимален број;
▪ чита децимална дропка и децимален број;
▪ искажува својства на децимални броеви;
▪ разликува дропка од децимална дропка;
▪ запомнува дека децималниот број е составен од цел дел, децимална запирка и децимален дел;
▪ чита периодични броеви;
▪ препознава и именува чисто периодични децимални броеви и мешани периодични децимални броеви;
▪ запишува децимална дропка во децимален број и обратно;
претставува и чита децимални броеви на бројна права.</td></tr>
<tr><td>РАЗБИРАЊЕ</td><td>▪ Го објаснува значењето на броителот и именителот на дропка;
▪ запишува неправилна дропка во мешан број и обратно;
▪ објаснува кои дропки се еднакви и дава примери за еднакви дропки;
▪ објаснува како се прошируваат дропки;
▪ објаснува како се кратат дропки со даден број и дава примери;
▪ резимира дека по собирањето и одземањето на дропките можно е и кратење;
▪ собира и одзема дропки со еднакви именители;
▪ запишува природен број во привидна дропка;
▪ одредува дробен дел од природен број и тоа го користи за претварање од помали во поголеми единици мерки;
▪ множи и дели децимален број со декадна единица;
▪ дава примери на природни броеви претставени како децимал-ни со одреден број децимални места;
▪ дели децимален со децимален број;
▪ запишува дропка во децимален број;
▪ објаснува поими: конечен децимален број, бесконечен децима-лен број, периодичен децимален број
▪ заокружува децимален број со дадена точност;
▪ решава елементарни равенки со децимални броеви;
▪ ги запишува со децимални броеви комутативното, асоцијатив-ното својство за собирање и множење, како и дистрибутивното својство на множење во однос на собирање и одземање;
ја објаснува промената на вредноста на операцијата во однос на промената на компонентите користејќи децимални броеви.</td></tr>
</table>

ПРИМЕНА	▪ Решава задачи зададени со различни мерни единици; ▪ претставува дропки и децимални броеви на бројна права; ▪ крати дропка постапно или со НЗД за именителот и броителот; ▪ решава бројни изрази со собирање и одземање на дропки со еднаков именител; ▪ покажува со пресметување дека важат комутативното, асоцијативното својство за собирање и множење на децимални броеви, како и дистрибутивното својство на множење во однос на собирањето и одземањето на децималните броеви; ▪ решава посложени текстуални задачи со примена на операциите со дропки и децимални броеви; решава посложени равенки со дропки и децимални броеви.
АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ	▪ Дискутира за дробниот дел од природен број; ▪ ја користи врската помеѓу проширување на дропки и еднаквост на дропки во решавање на задачи; ▪ врши проценка на резултатот од операциите со дропки и децимални броеви; ▪ решава посложени равенки користејќи симболи со кои ги сведува на елементарни равенки; ▪ следствено заклучува дека важат комутативното и асоцијативното својство за собирање на дропки со исти именители и дистрибутивното својство на множењето со природен број во однос на собирањето и одземањето на дропки со исти именители; ▪ изнаоѓа начини за претворање на бесконечен периодичен децимален број во дропка.

<table>
<tr><th colspan="2">Тема 4: МЕРЕЊЕ</th></tr>
<tr><th>НИВО</th><th>СТАНДАРДИ</th></tr>
<tr><td>ПОМНЕЊЕ</td><td>Ученикот/ученичката:
▪ ги именува и запишува основните единици мерки за: должина, маса, течност, време, температура, плоштина и волумен, како и поголемите и помалите мерни единици од основната;
▪ ја запишува формулата за пресметување волумен на коцка и квадар;
▪ искажува дефиниција за: именувани, неименувани броеви, едноимен број и повеќеимен број;
▪ препознава именувани и неименувани броеви;
идентификува едноимени и повеќеимени броеви.</td></tr>
<tr><td>РАЗБИРАЊЕ</td><td>▪ Објаснува постапка на претворање на едноимен број со поголема единица мерка во едноимен број со помала единица мерка;
▪ објаснува постапка на претворање на едноимен број со помала во едноимен број со поголема единица мерка;
▪ објаснува постапка на претворање на едноимен број во повеќеимен број;
▪ објаснува постапка на претворање на повеќеимен број во едноимен број;
▪ разбира дека $1a$ има $100m^2$ и $1l$ одговара на $1dm^3$;
▪ множи и дели именуван број со неименуван број;
пресметува волумен на квадар и коцка по формула.</td></tr>
<tr><td>ПРИМЕНА</td><td>▪ Предлага кои податоци да се соберат за даден проблем;
▪ претставува податоци од табела на разни видови дијаграми;
▪ избира скала соодветна на дадени податоци;
▪ изработува инструменти за собирање на податоци;
▪ средува, класифицира и распоредува податоци за посложени проблеми;
▪ одредува аритметичка средина од податоци.</td></tr>
<tr><td>АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ</td><td>▪ Користи претворање на едноимен во друг едноимен број или во повеќеимен број и обратно и претворање на повеќеимен во едноимен број во решавање на проблеми;
▪ решава проблемски задачи од секојдневниот живот со примена на плоштина и волумен на квадар и коцка.</td></tr>
</table>

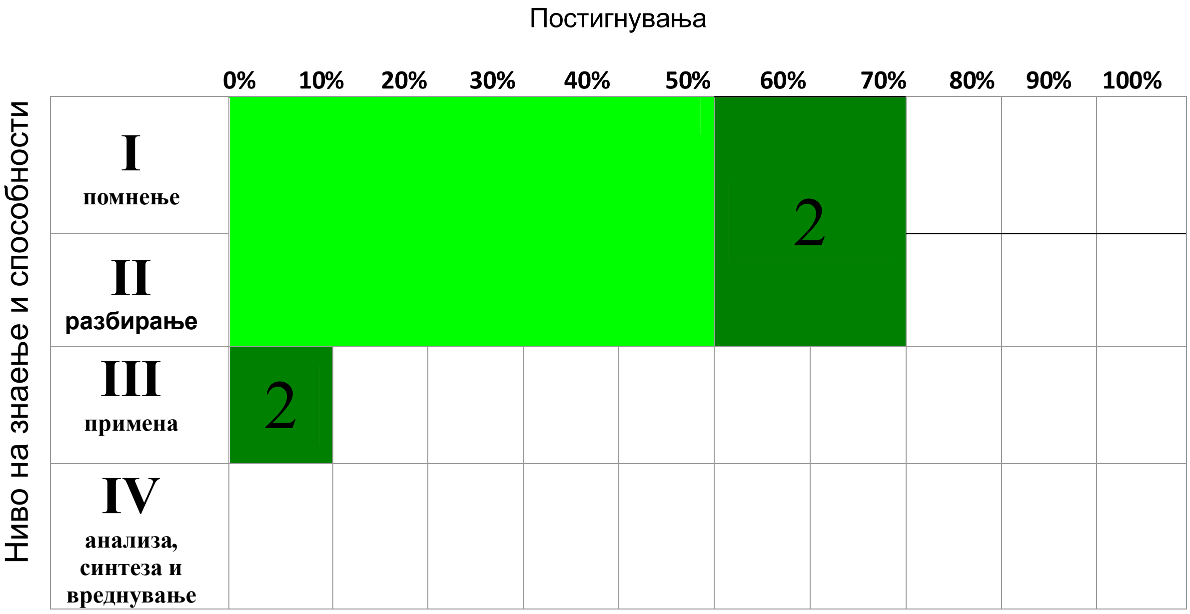
Тема 5: РАБОТА СО ПОДАТОЦИ	
НИВО	**СТАНДАРДИ**
ПОМНЕЊЕ	Ученикот/ученичката: ▪ чита податоци од сликовити прикази, табели, линиски дијаграми, столбест дијаграм и др.; претставува податоци со табела.
РАЗБИРАЊЕ	▪ Собира податоци на елементарни проблеми од паралелката со користење на готови инструменти, табели, шеми и друго за податоци; ▪ објаснува што е примерок и избира примерок на истражува-ње; објаснува дека важен елемент од работата со податоци е изборот на примерокот.
ПРИМЕНА	▪ Предлага кои податоци да се соберат за даден проблем; ▪ претставува податоци од табела на разни видови дијаграми; ▪ избира скала соодветна на дадени податоци; ▪ изработува инструменти за собирање на податоци; ▪ средува, класифицира и распоредува податоци за посложе-ни проблеми; ▪ одредува аритметичка средина од податоци.
АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ	▪ Претставува податоци од еден во друг вид на дијаграм; ▪ прави претпоставки за прибрани податоци; ▪ проценува соодветност на избрани постапки или инструмен-ти за прибирање на податоци; ▪ ги анализира прибраните податоци и извлекува заклучоци; ▪ дава осврт за предностите и недостатоците за разните дијаграми за претставување.

КРИТЕРИУМ ЗА ОЦЕНУВАЊЕ

Критериумите за оценки се утврдени од Бирото за развој на образованието. При определувањето на оценката на ученикот се имаат предвид постигањата на ученикот во однос на помнењето и репродуцирањето на содржините, разбирањето на содржините, примената на стекнатите знаења и вештини во познати и нови ситуации и задачи, како и способноста за критичко мислење (анализа, синтеза и вреднување).

Подолу се прикажани графички и е даден краток опис на критериумите за секоја оценка од 2 до 5.

Критериум за утврдување на оценката доволен (2)



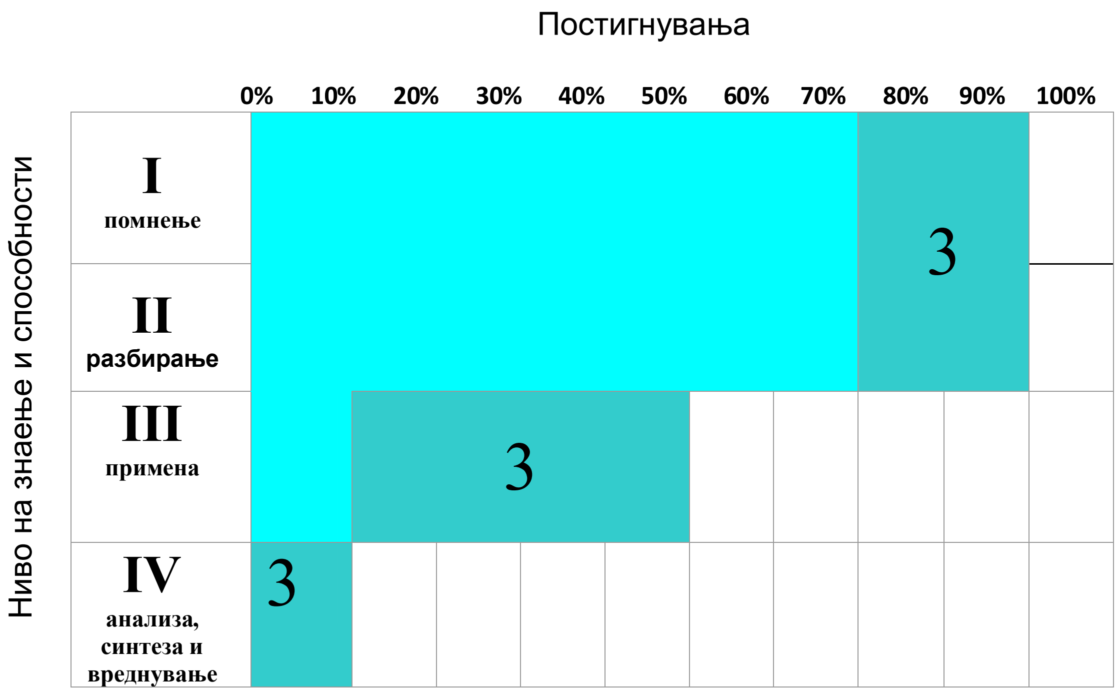
Постигнувања на ученикот кои сѐ уште не се доволни за да се добие оценка доволен (2).

Ученикот добива оценка доволен (2) ако покаже:

- од 50% до 70% од знаењата и вештините опишани во ниво помнење и разбирање;
- до 10% од знаењата и вештините опишани во ниво примена.

Доколку ученикот/ученичката покажува помалку од 50% од знаењата опишани со нивото помнење и нивото разбирање, неговите/нејзините постигања не се доволни за оценка 2.

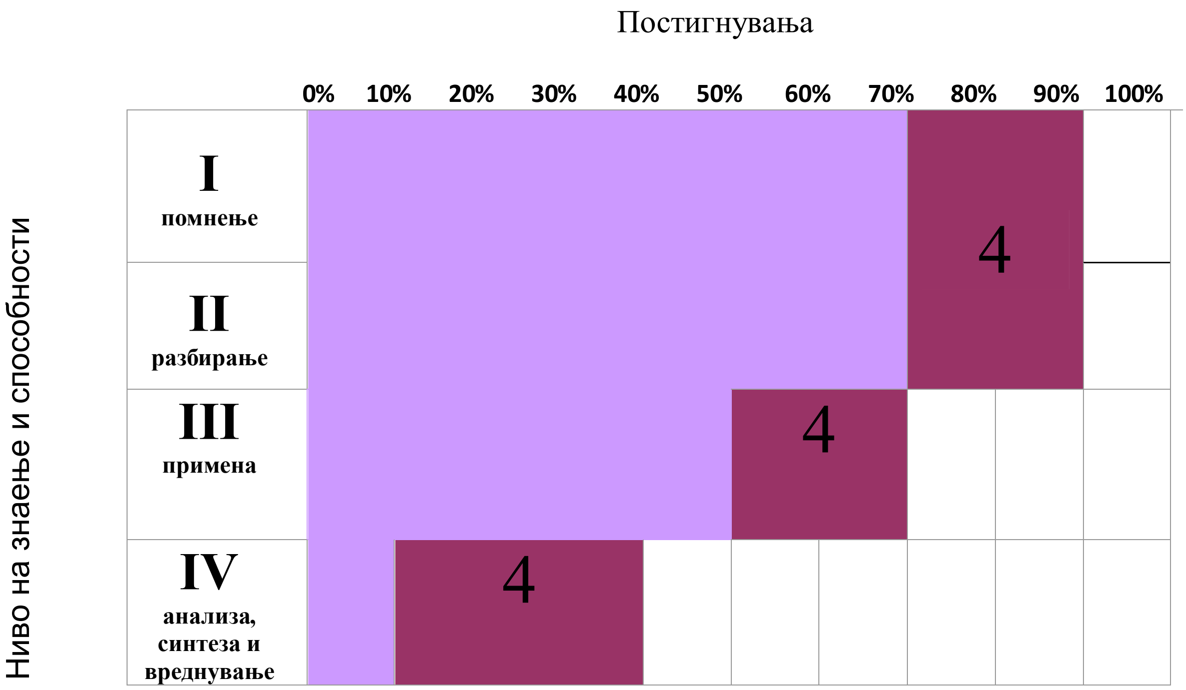
Критериум за утврдување на оценката добар (3)



Ученикот добива оценка добар (3) ако покаже:

- од 71% до 90% од знаењата и вештините опишани во ниво помнење и разбирање
- од 11% до %50% од знаењата и вештините опишани во ниво примена;
- до 10% од знаењата и вештините определени за ниво анализа, синтеза и вреднување.

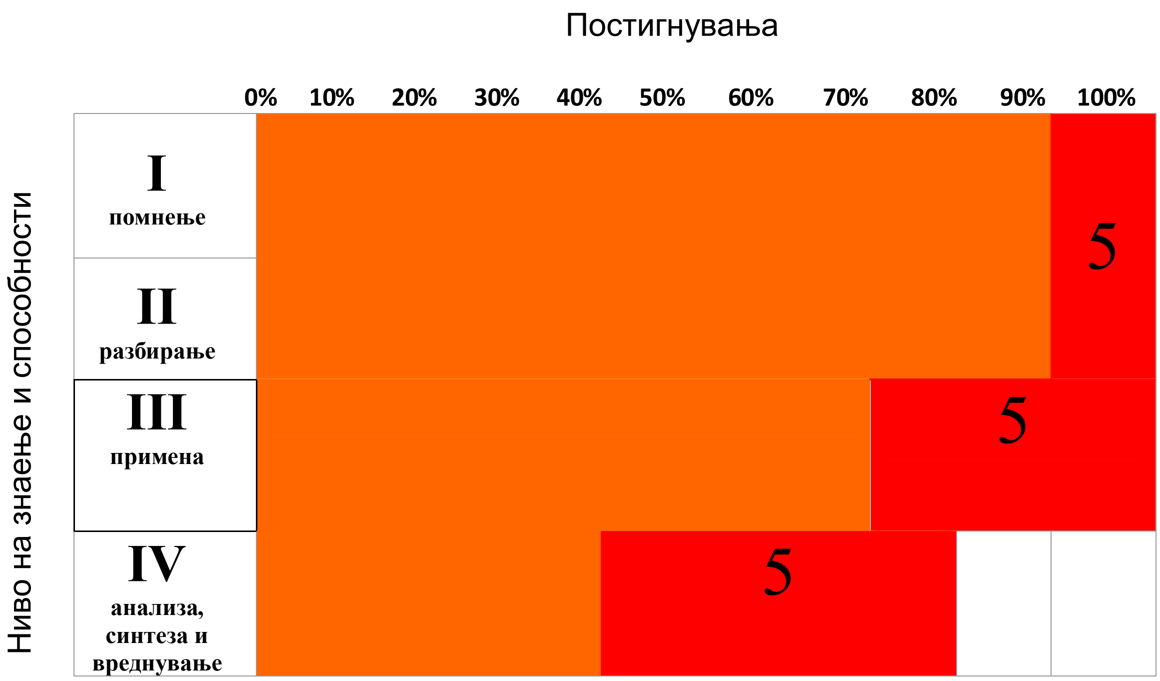
Критериум за утврдување на оценката многу добар (4)



Ученикот добива оценка многу добар (4) ако покаже:

- од 71% до 90% од знаењата и вештините опишани во ниво помнење и разбирање;
- од 51% до 75% од знаењата и вештините опишани во ниво примена;
- од 11% до 40% од знаењата и вештините определени за ниво анализа, синтеза и вреднување.

Критериум за утврдување на оценката одличен (5)



Ученикот добива оценка одличен (5) ако покаже:

- над 90% од знаењата и вештините опишани во ниво помнење и разбирање;
- над 70% од знаењата и вештините опишани во ниво примена;
- над 40% од знаењата и вештините определени за ниво анализа, синтеза и вреднување.

ТЕМА 1: ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Ниво А — Ученикот треба да знае дека…

НИВО: ПОМНЕЊЕ

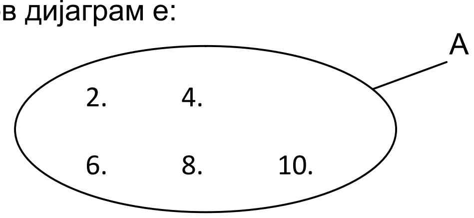
Поимот множество е основен поим во математиката. Се разбира како обединување на различни објекти со иста карактеристика во една целина.

Пример 1:

а) Целината од деновите во седмицата претставува множество.
б) Целината од броевите од првата десетка претставува множество.
в) Целината од предметите кои се изучуваат во шесто одделение претставува множество.

Веновиот дијаграм е графичко прикажување на множество при што множеството се заградува со затворена линија, а секој елемент од него се претставува со точка и се запишува во внатрешноста на затворената линија.

Пример 2: Множеството A од сите парни броеви од првата десетка, претставено со Венов дијаграм е:



Множеството запишано со редење (набројување) на неговите елементи во големи загради { }, при што елементите се одвоени со запирка, велиме дека е запишано на табеларен начин.

Пример 3: Множеството на непарни броеви од втората десетка запишано на табеларен начин е $A=\{11,13,15,17,19\}$.

Истите елементи во множеството се запишуваат само еднаш.

Пример 4: Множеството букви од зборот МАТЕМАТИКА запишано на табеларен начин е {М,А,Т,Е,И,К}.

Множествотот може да биде запишано и наописен начин при што се наведуваат заедничките карактеристики на елементите.

Пример 5: Множеството М= {11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20} запишано на описен начин е М= {x | x е број од втората десетка}.

Припадноста на даден елемент кон едно множество се означува со $\in$ (припаѓа, е елемент на) и $\notin$ (не припаѓа, не е елемент на).

Пример 6: Дадено е множеството К = {*у*,т,*р*,*о*}.
Велиме:„Буквата *о* е елемент на множеството К или буквата *о* припаѓа на К“, а запишуваме: $o \in K$
Велиме:„Буквата *а* не е елемент на множеството К или буквата *а* не припаѓа на К“, а запишуваме: $a \notin K$.

Множеството кое има само конечно многу елементи се вика конечно множество. Множеството кое не е конечно се вика бесконечно множество.

Бројот на елементи на дадено конечно множество А се нарекува големина на А и се означува со δA.

Пример 7: Бројот на елементите на множеството С= {1, 2, 3, ..., 49} е $\delta C = 49$.

Пример 8: Множеството А= {♠, ♣, ♥, ♦} е конечно множество бидејќи $\delta A = 4$, а множеството М= {24, 25, 26, ...} е бесконечно бидејќи δM не може да се одреди.

Множеството што нема ниту еден елемент се вика празно множество и се означува со Ø или { }.

Пример 9: Нека М е множество од имиња на морињa во Република Македонија. Тогаш М=Ø и $\delta M = 0$.

Конечните множества што имаат еднаков број на елементи се викаат истобројни или еквивалентни множества. Ако А и В се еквивалентни множества, запишуваме: А~В.

Пример 10: Множествата М= { М, А, Т, Е, И, К} и N= {1, 2, 3, 4, 5, 6} се еквивалентни множества т.е. М~ N бидејќи $\delta M = 6$ и $\delta N = 6$.

Две множества се еднакви ако се составени од исти елементи.

Пример 11: Нека С е множество од сите броеви поголеми од 4, а помали од 10 и и D= {5, 6, 7, 8, 9}. Множества С и D се еднакви т.е. С=D.

За множесвото А велиме дека е подмножество на множеството В, ако секој елемент на множеството А му припаѓа и на множеството В. Запишуваме А$\subseteq$В.

Пример 12: Множеството А= {а, е, и, о, у} е подмножество на множеството В= {а, б, в, г, ..., ш} т.е. А$\subseteq$В.

Пресек на две множества А и В е множество С формирано од елементите што припаѓаат на множеството А и множеството В. Запишуваме С=А$\cap$В.

Пример 13: Дадени се множествата А ={1, 2, 3, 5, 6} и В={1, 3, 7, 8, 9}.
А$\cap$В ={1, 3}

Унија на две множества А и В е множество D формирано од елементите што припаѓаат на множеството А или на множеството В. Запишуваме D=А$\cup$В.

Пример 14: Дадени се множествата А ={а, б, в, г} и В={а, е, и}.
А$\cup$В ={а, б, в, г, е, и}

Пресекот и унијата на множества имаат комутативно својство, т.е. важи $A \cap B = B \cap A$ и $A \cup B = B \cup A$.

Пресекот и унијата на множества имаат асоцијативно својство, т.е. важи $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ и $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Разликата на две множества А и В е множество К чии елементи се точно оние кои му припаѓаат на множеството А, а не му припаѓаат на множеството В. Запишуваме К=А\В.

Пример 15: Дадени се множествата А ={10, 5, 15, 7, 6} и В={1, 10, 7, 16, 5}.
А\В ={15, 6}

Парот (a,b) во кој точно се знае кој елемент е прв,а кој втор се вика подреден пар. Во подредениот пар , a се вика прва компонента, а b втора компонента.

Пример 16: Подреден пар во кој прва компонента е ▲, а втора компонента е ●, е парот (▲,●).

Декартов производ А×В (се чита А по В) на множествата А и В е множество чии елементи се подредени парови, така што првата компонента на парот е елемент на множеството А, а втората компонента е елемент на множеството В.

Пример17: Дадени се множествата А={1} и В={а,b}.
А×В= $\{(1,a),(1,b)\}$
В×А= $\{(a,1),(b,1)\}$

Броевите: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,...,98,99,100,101,102,...,999,1 000,1 001... се викаат природни броеви. Множеството на природните броеви се означува со **N** и запишано табеларно е **N** = $\{1,2,3,4,5,...\}$.Тоа е пример на бесконечно множество.

Бројот 0 не е природен број, т.е. $0 \notin \mathbf{N}$.
Множеството на сите природни броеви и бројот 0 се означува со $\mathbf{N_0}$; $\mathbf{N_0}$ = $\{0,1,2,3,4,5,...\}$.Тоа се така наречени броеви за броење.

Броевите: 1, 3, 5, 7, 9, ... се непарни броеви, а броевите 2, 4, 6, 8, 10, ... се парни броеви.

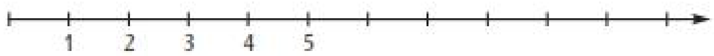
Пример 18:

Дадена е низата броеви 25, 61, 200, 8 695, 112, 772, 100 500.
Непарни броеви се: 25, 61, 8 695.
Парни се броевите: 200, 112, 772, 100 500.

Правата на која се претставуваат природните броеви се вика бројна права.

Пример 19:

На бројната права се претставени природните броеви кои се помали од 6.



Природните броеви ги запишуваме во декаден броен систем со користење на цифрите 0, 1, 2, ...,9.
Во записот на бројот, секоја цифра покажува број на единици или број на десетки или број на стотки итн., соодветно на позицијата на која е запишана.

Пример 20:

Табелата од класи и позиции на бројот 27 305 916 е:

Класа милиони			Класа илјади			Класа единици		
СМ	ДМ	ЕМ	СИ	ДИ	ЕИ	С	Д	Е
	2	7	3	0	5	9	1	6

За собирањето може да запишеме

$a + b = c$ — збир

собирок   собирок

Пример 21:

$$\begin{array}{r} 184\ 532 \\ +\ \ 58\ 153 \\ \hline 242\ 685 \end{array}$$

Комутативното својство на собирањето гласи: Збирот не се менува ако собироците си ги променат местата, т.е. за кои било броеви a и b важи $a+b=b+a$.

Пример 22:

2 345 +1 987 = 1987 + 2 345

Асоцијативното својство на собирањето гласи: Збирот не зависи од групирањето на собироците, т.е. за кои било природни броеви a, b и c важи $(a+b)+c=a+(b+c)$.

Пример 23: (563 000 +1 500) + 23 000 = 563 000 + (1 500 + 23 000)

За одземањето може да запишеме

$a-b=d$ — разлика

намаленик — намалител

Пример 24:

$$\begin{array}{r} 982\,000 \\ -\ \underline{158\,829} \\ 823\,171 \end{array}$$

За збирот $a+b=c$ важи: ако едниот собирок се зголеми за одреден број, а другиот остане ист, тогаш и збирот ќе се зголеми за истиот тој број.

$$(a+n)+b=c+n$$
$$a+(b+n)=c+n.$$

Пример 25:

$$(a+5)+b=c+5$$
$$a+(b+5)=c+5$$

За збирот $a+b=c$ важи: ако едниот собирок се намали за одреден број, а другиот остане ист, тогаш и збирот ќе се намали за истиот тој број.

$$(a-n)+b=c-n$$
$$a+(b-n)=c-n.$$

Пример 26:

$$(a-10)+b=c-10$$
$$a+(b-10)=c-10$$

За збирот $a+b=c$ важи: збирот нема да се промени ако едниот собирок се намали за одреден број, а другиот се зголеми за истиот тој број.

$$(a-n)+(b+n)=c$$
$$(a+n)+(b-n)=c.$$

Пример 27:

$$(a-6)+(b+6)=c$$
$$(a+6)+(b-6)=c.$$

За разликата $a-b=d$ важи: ако намаленикот се зголеми (односно се намали) за одреден број, а намалителот остане ист, тогаш и разликата ќе се зголеми (односно ќе се намали) за истиот тој број.

$$(a+n)-b=d+n$$
$$(a-n)+b=d-n.$$

Пример 28:

$$(a+8)-b=d+8$$
$$(a-8)+b=d-8$$

За разликата $a-b=d$ важи: ако намалителот се зголеми за одреден број, а намаленикот остане ист, тогаш разликата ќе се намали за тој број; ако намалителот се намали за одреден број, а намаленикот остане ист, тогаш разликата ќе се зголеми за тој број.

$$a-(b+n)=d-n$$
$$a-(b-n)=d+n.$$

Пример 29:

$$a-(b+7)=d-7$$
$$a-(b-7)=d+7$$

За разликата $a-b=d$ важи: разликата нема да се промени ако намаленикот и намалителот се зголемат или се намалат за еден ист број.

$$(a-n)-(b-n)=d$$
$$(a+n)-(b+n)=d.$$

Пример 30:

$$(a-10)-(b-10)=d$$
$$(a+10)-(b+10)=d$$

За множењето може да запишеме

$$\underbrace{a}_{\text{множител}}\cdot\underbrace{b}_{\text{множител}}=\underbrace{q}_{\text{производ}}$$

Пример 31:

$$\begin{array}{r} \underline{359\cdot 821} \\ 359 \\ 718 \\ \underline{+\ 2872} \\ 294\ 739 \end{array}$$

Комутативното својство на множењето гласи: Производот не се менува ако множителите си ги променат местата, т.е. за кои било броеви a и b важи $a\cdot b=b\cdot a$.

Пример 32:

$$200\cdot 14=14\cdot 200$$

Асоцијативното својство на множењето гласи: Производот не зависи од групирањето на множителите, т.е. за кои било природни броеви a, b и c важи $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

Пример 33: $(2\,000 \cdot 3) \cdot 15 = 2\,000 \cdot (3 \cdot 15)$

Дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето е искажано со равенствата:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Пример 34: а) $5 \cdot (13 + 47) = 5 \cdot 13 + 5 \cdot 47$

б) $(10 + 20) \cdot 3 = 10 \cdot 3 + 20 \cdot 3$

Дистрибутивното својство на множењето во однос на одземањето е искажано со равенствата:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$
$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

Пример 35: а) $10 \cdot (15 - 12) = 10 \cdot 15 - 10 \cdot 12$

б) $(20 - 10) \cdot 3 = 20 \cdot 3 - 10 \cdot 3$

Ако едниот множител е 1, тогаш производот е еднаков на другиот множител, т.е. $a \cdot 1 = a$.

Пример 36: $385 \cdot 1 = 385$

Ако едниот множител е 0, тогаш производот е еднаков на 0 т.е. $0 \cdot a = 0$.

Пример 37: $0 \cdot 1\,385 = 0$

Производот на еднакви множители кратко запишан се вика степен, т.е. $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{n} = a^n$ Во степенот a^n, a се вика основа на степенот, а n се вика степенов показател.

Пример 38: Производот $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ кратко запишан е 5^4.

При делењето без остаток може да запишеме

$$a : b = q$$

q — количник, a — деленик, b — делител

Пример 39:

```
 79 668 : 18 =4 426
-72
  76
 -72
   46
  -36
   108
  -108
     0
```

Ако делителот е 1, тогаш количникот е еднаков на деленикот, т.е. $a:1=a$.

Пример 40:

$$85:1=85$$

Ако деленикот и делителот се еднакви, тогаш количникот е 1 т.е. $a:a=1,\ a\neq 0$.

Пример 41:

$$125\,300:125\,300=1$$

Ако деленикот е 0, тогаш количникот е 0 т.е. $0:a=0,\ a\neq 0$.

Пример 42:

$$0:75\,323=0$$

Број различен од 0 не може да се дели со 0.

За производот $a\cdot b=c$ важи: ако едниот множител се зголеми одреден број пати, а другиот остане ист, тогаш и производот ќе се зголеми исто толку пати.

$$(a\cdot n)\cdot b=c\cdot n$$
$$a\cdot(b\cdot n)=c\cdot n.$$

Пример 43:

$$(a\cdot 2)\cdot b=c\cdot 2$$
$$a\cdot(b\cdot 2)=c\cdot 2$$

За производот $a\cdot b=c$ важи: ако едниот множител се намали одреден број пати, а другиот остане ист, тогаш и производот ќе се намали исто толку пати.

$$(a:n)\cdot b=c:n$$
$$a\cdot(b:n)=c:n.$$

Пример 44:

$$(a:3)\cdot b=c:3$$
$$a\cdot(b:3)=c:3$$

За производот $a \cdot b = c$ важи: производот нема да се промени ако едниот множител се намали одреден број пати, а другиот се зголеми исто толку пати.

$$(a:n)\cdot(b\cdot n)=c$$
$$(a\cdot n)\cdot(b:n)=c.$$

Пример 45:

$$(a:15)\cdot(b\cdot 15)=c$$
$$(a\cdot 15)\cdot(b:15)=c$$

За количникот $a:b=q$ важи: ако деленикот се зголеми (односно се намали) одреден број пати, а делителот остане ист, тогаш и количникот ќе се зголеми (односно ќе се намали) исто толку пати.

$$(a\cdot n):b=q\cdot n$$
$$(a:n):b=q:n.$$

Пример 46:

$$(a\cdot 5):b=q\cdot 5$$
$$(a:5):b=q:5$$

За количникот $a:b=q$ важи: ако делителот се зголеми(односно се намали) одреден број пати, а деленикот остане ист, тогаш количникот ќе се намали (односно ќе се зголеми) исто толку пати.

$$a:(b\cdot n)=q:n$$
$$a:(b:n)=q\cdot n.$$

Пример 47:

$$a:(b\cdot 7)=q:7$$
$$a:(b:7)=q\cdot 7$$

За количникот $a:b=q$ важи: количникот нема да се промени ако деленикот и делителот се зголемат (односно се намалат) ист број пати.

$$(a\cdot n):(b\cdot n)=q$$
$$(a:n):(b:n)=q.$$

Пример 48:

$$(a\cdot 10):(b\cdot 10)=q$$
$$(a:10):(b:10)=q$$

Кога одредуваме вредност на броен израз прво ги извршуваме операциите множење и делење (по редослед како што се запишани во бројниот израз), а потоа операциите собирање и одземање (по редослед како што се запишани во бројниот израз). Ако во бројниот израз има загради, тогаш прво ги извршуваме операциите во заградите.

Пример 49:

а) $2+2\cdot 2=2+4=6$

б) $20+10:2-8=20+5-8=25-8=17$

в) $4\cdot(30:10\cdot 3-2)=4\cdot(3\cdot 3-2)=4(9-2)=4\cdot 7=28$

Одредувањето на непознатиот број во равенката се вика решавање на равенката.

Непознат собирок, при познат збир и другиот собирок, се одредува така што од збирот се одзема познатиот собирок.

Пример 50:

$$x+10=25$$
$$x=25-10$$
$$x=15$$

Непознат намаленик, при познати разлика и намалител, се одредува така што на разликата ќе се додаде намалителот.

Пример 51:

$$x-12=8$$
$$x=12+8$$
$$x=20$$

Непознат намалител, при познати разлика и намаленик, се одредува така што од намаленикот се одзема разликата.

Пример 52:

$$30-x=10$$
$$x=30-10$$
$$x=20$$

Непознат множител, при познати производ и друг множител, се одредува така што производот ќе се подели со познатиот множител.

Пример 53:

$$x\cdot 8=40$$
$$x=40:8$$
$$x=5$$

Непознат деленик, при познати количник и делител, се одредува така што количникот ќе се помножи со делителот.

Пример 54:

$$x:9=6$$
$$x=6\cdot 9$$
$$x=54$$

Непознат делител, при познати количник и деленик, се одредува така што деленикот ќе се подели со количникот.

Пример 55:

$$48:x=6$$
$$x=48:6$$
$$x=8$$

Природниот број a е делител на природниот број b или b е делив со a, ако остатокот при делењето на b со a е 0. Запишуваме $a|b$, а читаме a е делител на b.

Пример 56: Бидејќи $20:4=5$, велиме дека 4 е делител на 20 и запишуваме $4|20.$

Природниот број b е содржател на природниот број a, ако a е делител на b.

Пример 57: Бројот 72 е содржател на бројот 9 бидејќи $9|72.$

Еден број е делив со 2, ако цифрата на единиците на тој број е 0, 2, 4, 6 или 8.

Пример 58: Броевите 16, 294, 1 568, 650, 9 232 се деливи со 2 бидејќи цифрата на единиците е 6, 4, 8, 0 и 2, соодветно.

Еден број е делив со 5, ако цифрата на единиците на тој број е 0 или 5.

Пример 59: Броевите 850 и 1 565 се деливи со 5 бидејќи цифрата на единиците е 0 и 5, соодветно.

Еден број е делив со 3, ако збирот од цифрите со кои тој е запишан е број делив со 3.

Пример 60: Бројот 2 340 е делив со 3 бидејќи збирот на цифрите со кој е запишан бројот 2 340 е 2+3+4+0=9, а 9 е делив со 3.

Еден број е делив со 9, ако збирот од цифрите со кои тој е запишан е број делив со 9.

Пример 61: Бројот 8 127 е делив со 9 бидејќи збирот на цифрите со кој е запишан бројот 8 127 е 8+1+2+7=18, а 18 е делив со 9.

Еден број е делив со 4, ако неговиот двоцифрен завршеток е делив со 4.

Пример 62: Бројот 25 116 е делив со 4 бидејќи двоцифрениот завршеток на бројот 25 116 е 16, а 16 е делив со 4.

Броевите што имаат само два делители се викаат прости броеви.

Пример 63: Прости броеви од првата и втората десетка се 2, 3, 5, 7, 11, 13,17 и 19.

Броевите што имаат три или повеќе делители се викаат сложени броеви.

Пример 64: Сложени броеви од првата и втората десетка се 4, 6, 8, 9, 10, 12,14, 15, 16, 18 и 20,

Бројот 1 не е ниту сложен ниту прост број.

Секој сложен природен број може да се разложи на прости множители, т.е. може да се запише како производ од прости броеви. Ваквиот запис е единствен до редослед на множителите.

Пример 65: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 3 \cdot 5 \cdot 2 = \ldots$

Најголемиот од сите заеднички делители на броевите a и b се вика најголем заеднички делител на броевите a и b. Се означува НЗД(a,b).

Пример 66: Множеството делители на бројот 12 е:
$D_{12} = \{1,2,3,4,12\}$
Множеството делители на бројот 15 е:
$D_{15} = \{1,3,5,15\}$
Множеството заеднички делители на 12 и 15 е $D_{12,15} = \{1,3\}$.
Затоа НЗД$(12,15) = 3$

Најмалиот природен број кој е содржател на броевите a и b се вика најмал заеднички содржател на броевите a и b. Се означува НЗС(a,b).

Пример 67: Множеството содржатели на бројот 12 е:
$S_{12} = \{12,24,36,48,60,72,84.....\}$
Множеството содржатели на бројот 15 е:
$S_{15} = \{15,30,45,60,75,90,.....\}$
Множеството заеднички содржатели на 12 и 15 е
$S_{12,15} = \{60,120,180,...\}$. Затоа НЗС$(12,15) = 60$

Ако НЗД$(a,b) = 1$, тогаш за броевите a и b a велиме дека се заемно прости броеви.

Пример 68: НЗД$(15,14) = 1$, значи броевите 15 и 14 се заемно прости броеви.

Ниво Б

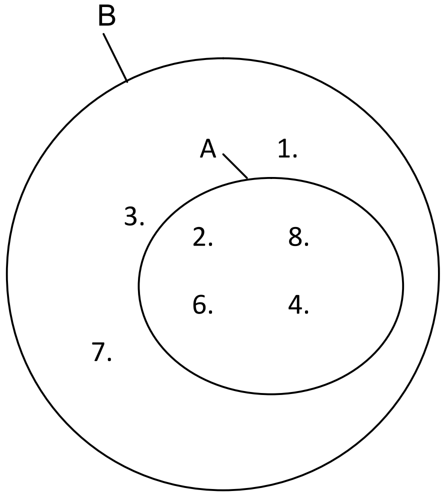
Ученикот покажува дека разбира...

НИВО: РАЗБИРАЊЕ

Ако множесвото А е подмножество на множеството В и во В има елементи кои не му припаѓаат на множеството А, тогаш А е вистинско подмножество на множеството В. Запишуваме $A \subset B$.

Пример 1:

Множеството В е дадено со Венов дијаграм. Множеството А е вистинско подмножество на множеството В, т.е. $A \subset B$



Пресек на две множества А и В е множество С формирано од елементите што припаѓаат на множеството А и на множеството В, односно $C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Пример 2:

Пресекот на множествата $M = \{1,3,5,7,9,..\}$ и $N = \{x \mid x$ е природен број и $3 \le x \le 11\}$ е $M \cap N = \{3,5,7,9,11\}$.

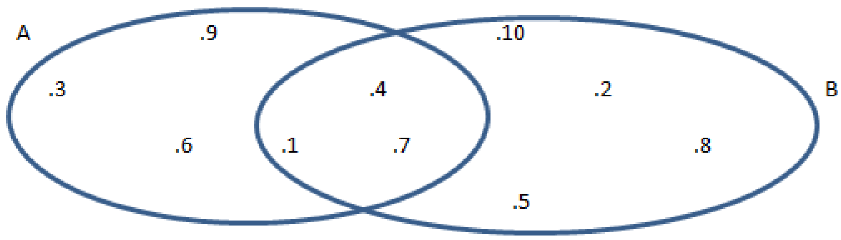
Унија на две множества А и В е множество D формирано од елементите што припаѓаат на множеството А или на множеството В, односно $D = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$

Пример 3:

Унијата на множествата $A = \{0,3,6,9,12\}$ и $B = \{x \mid x$ е непарен број од првата десетка$\}$ е множеството $D = A \cup B = \{0,1,3,5,6,7,9,12\}$.

Разликата на две множества А и В е множество К чии елементи му припаѓаат на множеството А, но не му припаѓаат на множеството В, односно К=А\В={x | $x \in$ А и $x \notin$ В}.

Пример 4:



А\В={3, 6, 9} и В\А={2, 5, 8,10}.

Подредениот пар (a,b) и подредениот пар (b,a) не се еднакви бидејќи имаат различни први и втори компоненти. Додека, пак, множествата $\{a,b\}$ и $\{b,a\}$ се еднакви бидејќи се составени од исти елементи.

Пример 5:

$$(1,2) \neq (2,1)$$
$$\{1,2\} = \{2,1\}$$

Декартов производ А×В (се чита А по В) на множествата А и В е множество чии елементи се подредени парови, така што првата компонента на парот е елемент на множеството А, а втората компонента е елемент на множеството В, односно

А×В={(x,y) | $x \in$ А и $y \in$ В}.

Пример 6:

Дадени се множествата А={5, 3} и В={a,b}.

А×В= $\{(5,a),(5,b),(3,a),(3,b)\}$

В×А= $\{(a,5),(a,3),(b,5),(b,3)\}$

Од пример 6 може да се согледа дека А×В$\neq$ В×А, т.е. Декартовиот производ нема комутативно својство.

А×А е Декартов производ на множеството А ; А×А се вика Декартов квадрат, се означува со А^2, а се чита „А на квадрат“.

Пример 7:

Декартовиот квадрат на множеството М={10,20} е множеството

М×М= М^2= $\{(10,10),(10,20),(20,10),(20,20)\}$.

Броевите 1, 10, 100, 1000 итн. се викаат декадни единици.
Бројот 1 000 000 000 се вика милијарда.
Бројот 1 000 000 000 000 се вика билион.
Бројот 1 000 000 000 000 000 000 се вика трилион.

При заокружување на еден број на десетки, цифрата на позицијата десетки останува иста ако цифрата на позицијата единици е број помал од 5, а се зголемува за 1 ако цифрата на позицијата единици е 5 или број поголем од 5.

Пример 8: Бројот 253 122 заокружен на десетки е 253 120, т.е.

253 122 $\approx$ 253 120.

Бројот 1 691 555 заокружен на десетки е 1 691 560, т.е.

1 691 555 $\approx$ 1 691 560.

Бројот 31 985 787 заокружен на десетки е 31 985 790, т.е.

31 985 787 $\approx$ 31 985 790.

При заокружување на еден број на стотки, цифрата на позицијата стотки останува иста ако цифрата на позицијата десетки е број помал од 5, а се зголемува за 1 ако цифрата на позицијата десетки е 5 или број поголем од 5.

Пример 9: Бројот 253 122 заокружен на стотки е 253 100, т.е.

253 122 $\approx$ 253 100.

Бројот 1 691 555 заокружен на стотки е 1 691 600, т.е.

1 691 555 $\approx$ 1 691 600.

Бројот 31 985 787 заокружен на стотки е 31 985 800, т.е.

31 985 787 $\approx$ 31 985 800.

При заокружување на еден број на илјади, цифрата на позицијата илјади останува иста ако цифрата на позицијата стотки е број помал од 5, а се зголемува за 1 ако цифрата на позицијата стотки е 5 или број поголем од 5.

Пример 10: Бројот 253 122 заокружен на илјади е 253 000, т.е.

253 122 $\approx$ 253 000.

Бројот 1 691 555 заокружен на илјади е 1 692 000, т.е.

1 691 555 $\approx$ 1 692 000.

Бројот 31 985 787 заокружен на илјади е 31 986 000, т.е.

31 985 787 $\approx$ 31 986 000.

Дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето е искажано со равенствата:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$
$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$$

Пример 11:

а) $20\cdot(13+47)=20\cdot13+20\cdot47$

б) $(50+20)\cdot15=50\cdot15+20\cdot15$

Дистрибутивното својство на множењето во однос на одземањето е искажано со равенствата:

$$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$$
$$(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$$

Пример 12:

а) $24\cdot(30-20)=24\cdot30-24\cdot20$

б) $(596-96)\cdot10=596\cdot10-96\cdot10$

Ако a е деленик, b е делител, q е количник, а r е остаток, тогаш:

$$a = q \cdot b + r.$$

Пример 13:

Ако $a = 95$, а $b = 4$, тогаш:

$$\begin{array}{l} 95:4=23 \\ \underline{-8} \\ \quad 15 \\ \underline{-\ 12} \\ \quad\ 3 \end{array}$$

значи $q = 23$, а $r = 3$. Бројот a запишан во форма $a = q \cdot b + r$ е $95 = 4 \cdot 23 + 3$.

За збирот $a + b = c$ важи: ако едниот собирок се зголеми за одреден број, а другиот остане ист, тогаш и збирот ќе се зголеми за истиот тој број.

$$(a+n)+b = c+n$$
$$a+(b+n) = c+n$$

За збирот $a + b = c$ важи: ако едниот собирок се намали за одреден број, а другиот остане ист, тогаш и збирот ќе се намали за истиот тој број.

$$(a-n)+b = c-n$$
$$a+(b-n) = c-n$$

За збирот $a + b = c$ важи: збирот нема да се промени ако едниот собирок се намали за одреден број, а другиот се зголеми за истиот тој број.

$$(a-n)+(b+n) = c$$
$$(a+n)+(b-n) = c.$$

Пример 14:

Збирот на два броја изнесува 1 500.
а) Ако едниот собирок се зголеми за 50, тогаш збирот ќе изнесува 1550.
б) Ако едниот собирок се намали за 50, тогаш збирот ќе изнесува 1 450.
в) Ако едниот собирок се зголеми за 50, а другиот собирок се намали за 50, тогаш збирот останува 1 500.

За разликата $a - b = d$ важи: ако намаленикот се зголеми (односно се намали) за одреден број, а намалителот остане ист, тогаш и разликата ќе се зголеми (односно ќе се намали) за истиот тој број.

$$(a+n)-b = d+n$$
$$(a-n)+b = d-n$$

За разликата $a - b = d$ важи: ако намалителот се зголеми за одреден број, а намаленикот остане ист, тогаш разликата ќе се намали за тој број; ако намалителот се намали за одреден број, а намаленикот остане ист, тогаш разликата ќе се зголеми за тој број.

$$a-(b+n)=d-n$$
$$a-(b-n)=d+n$$

За разликата $a-b=d$ важи: разликата нема да се промени ако намаленикот и намалителот се зголемат или се намалат за еден ист број.

$$(a-n)-(b-n)=d$$
$$(a+n)-(b+n)=d$$

Пример 15:

Разликата на два броја изнесува 850: $a-b=850$.

а) Ако намаленикот се зголеми за 50, а намалителот остане ист, тогаш разликата ќе изнесува 900.

$$(a+50)-b=850+50=900$$

б) Ако намаленикот се намали за 50, а намалителот остане ист, тогаш разликата ќе изнесува 800.

$$(a-50)-b=850-50=800$$

в) Ако намалителот се зголеми за 50, а намаленикот остане ист, тогаш разликата ќе изнесува 800.

$$a-(b+50)=850-50=800$$

г) Ако намалителот се намали за 50, а намаленикот остане ист, тогаш разликата ќе изнесува 900.

$$a-(b-50)=850+50=900$$

д) Ако намаленикот и намалителот се зголеми за 50, тогаш разликата ќе изнесува 850.

$$(a+50)-(b+50)=850$$

ѓ) Ако намаленикот и намалителот се намалат за 50, тогаш разликата ќе изнесува 850.

$$(a-50)-(b-50)=850$$

За производот $a\cdot b=c$ важи: ако едниот множител се зголеми одреден број пати, а другиот остане ист, тогаш и производот ќе се зголеми исто толку пати.

$$(a\cdot n)\cdot b=c\cdot n$$
$$a\cdot(b\cdot n)=c\cdot n$$

За производот $a\cdot b=c$ важи: ако едниот множител се намали одреден број пати, а другиот остане ист, тогаш и производот ќе се намали исто толку пати.

$$(a:n)\cdot b=c:n$$
$$a\cdot(b:n)=c:n$$

За производот $a\cdot b=c$ важи: производот нема да се промени ако едниот множител се намали одреден број пати, а другиот се зголеми исто толку пати.

$$(a:n)\cdot(b\cdot n)=c$$
$$(a\cdot n)\cdot(b:n)=c$$

Пример 16:

Производот на два броја изнесува 500.

а) Ако едниот множител се зголеми 10 пати, тогаш производот ќе изнесува 5 000.

б) Ако едниот множител се намали 10 пати, тогаш производот ќе изнесува 50.

в) Ако едниот множител се зголеми 10 пати, а другиот множител се намали 10 пати, тогаш производот останува 500.

За количникот $a:b=q$ важи: ако деленикот се зголеми (односно се намали) одреден број пати, а делителот остане ист, тогаш и количникот ќе се зголеми (односно ќе се намали) исто толку пати.

$$(a\cdot n):b=q\cdot n$$
$$(a:n):b=q:n$$

За количникот $a:b=q$ важи: ако делителот се зголеми (односно се намали) одреден број пати, а деленикот остане ист, тогаш количникот ќе се намали (односно ќе се зголеми) исто толку пати.

$$a:(b\cdot n)=q:n$$
$$a:(b:n)=q\cdot n$$

За количникот $a:b=q$ важи: количникот нема да се промени ако деленикот и делителот се зголемат (односно се намалат) ист број пати.

$$(a\cdot n):(b\cdot n)=q$$
$$(a:n):(b:n)=q$$

Пример 17: Количникот на два броја изнесува 120: $a:b=120$.

а) Ако деленикот се зголеми 3 пати, а делителот остане ист, тогаш количникот ќе изнесува 360.

$$(a\cdot 3):b=120\cdot 3=360$$

б) Ако деленикот се намали 3 пати, а делителот остане ист, тогаш количникот ќе изнесува 40.

$$(a:3):b=120:3=40$$

в) Ако делителот се зголеми 3 пати, а деленикот остане ист, тогаш количникот ќе изнесува 40.

$$a:(b\cdot 3)=120:3=40$$

г) Ако делителот се намали 3 пати, а деленикот остане ист, тогаш количникот ќе изнесува 360.

$$a:(b:3)=120\cdot 3=360$$

д) Ако деленикот и делителот се зголеми 3 пати, тогаш количникот ќе изнесува 120.

$$(a\cdot 3):(b\cdot 3)=120$$

ѓ) Ако деленикот и делителот се намалат 3 пати, тогаш количникот ќе изнесува 120.

$$(a:3):(b:3)=120$$

Кога одредуваме вредност на броен израз прво ги извршуваме операциите множење и делење (по редослед како што се запишани во бројниот израз), а потоа операциите собирање и одземање (по редослед како што се запишани во бројниот израз). Ако во бројниот израз има загради, тогаш прво ги извршуваме операциите во заградите.

Пример 18:

а) $900+5\cdot 213-844:2=900+1065-422=1965-422=1543$

б) $564\cdot(256:4-63)=564\cdot(64-63)=564\cdot 1=564$

Пример 19:

1)
$x+128=965$
$x=965-128$
$x=837$

2)
$2\,368+x=12\,695$
$x=12\,695-2\,368$
$x=10\,327$

3)
$x-8\,412=987$
$x=8\,412+987$
$x=9\,399$

4)
$100\,000-x=21\,000$
$x=100\,000-21\,000$
$x=79\,000$

5)
$x\cdot 15=11625$
$x=11625:15$
$x=775$

6)
$6\cdot x=65100$
$x=61500:6$
$x=10\,250$

7)
$x:9=211$
$x=211\cdot 9$
$x=1899$

8)
$12965:x=5$
$x=12965:5$
$x=2\,593$

Пример 20: Воочи ја постапката за разложување на даден број на прости множители.

240|2
120|2
60|2
30|2
15|3
5|5
1|

$240=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5=2^4\cdot 3\cdot 5$

Пример 21: Воочи ја скратената постапка за одредување на НЗД.

НЗД$(63,84)$

63,84|3
21,28|7
3,4|

НЗД$(63,84)=3\cdot 7=21$

Пример 22: Воочи ја скратената постапка за одредување на НЗС.

НЗС$(14,18)$

14,18|2
7,9|3
7,3|3
7,1|7
1|

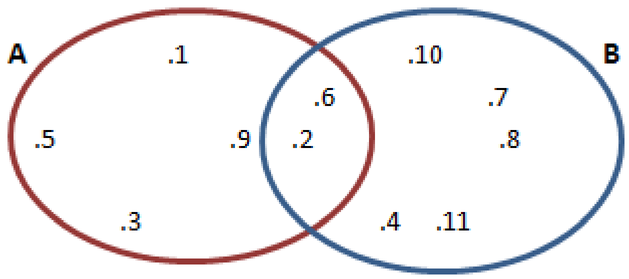
НЗС$(14,18)=2\cdot 3\cdot 3\cdot 7=2\cdot 3^2\cdot 7=126$

ЗАДАЧИ ОД НИВО **А** И НИВО **Б**

Со користење на задачите подолу наставникот може да направи проверка на знаењата на ученикот кои се на ниво познавање и разбирање. Задачите може да ги користат учениците за самооценување, а и родителите може да го проверат нивото на стекнатите знаења.

1.Запиши ги табеларно множествата и одреди го бројот на секое од нив:
а) A = { x | x ∊ N и x < 4 }
б) M= { x | x ∊ N и x < 1 }
в) K = { x | x ∊ N и x < 446 и x > 440 }
г) T= { x | x ∊ N и x > 13 }

2. На сликата се претставени множествата A и B.



Запиши ги табеларно множествата:

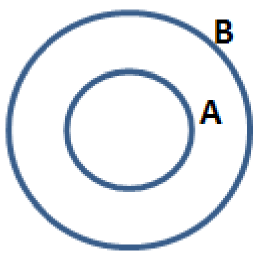
а) A   б) B   в) A∩B   г) A∪B   д) A\B   ѓ) B \ A

3. Дадени се множествата M={2, 5, 7, 10, 3} и P={4, 8, 3, 7, 1}. Запиши ги табеларно множествата M∪P, M∩P, M\P и P\M.

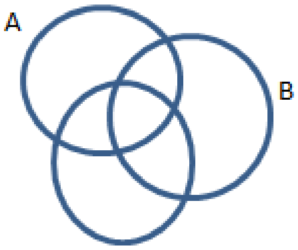
4. За кое било множество A одреди:

а) A∩A   б)A∩∅   в) A∪A   г)A∪∅

5. На цртежот обој го множеството A∩B.



6. На цртежот обој го множеството $A \cap B \cap C$.



7. Дадени се множествата M={10, 5} и T={1, 7, 16}. Одреди ги множествата $M \times T$ и M^2 .

8. Определи кои од дадените записи се точни:

а) $0 \notin \mathbf{N}$ б) $\mathbf{N} \cap \mathbf{N_0} = \varnothing$ в) $\mathbf{N} \cap \mathbf{N_0} = \mathbf{N}$ г) $0 \in \mathbf{N_0}$

9. Запиши ги следбеникот и претходникот на бројот 123 000, а потоа пресметај го нивниот збир.

10. Нанеси ги на бројна права сите парни броеви од седмата десетка.

11. Запиши го со зборови бројот 12 345 678 901.

12. Запиши го бројот што содржи 3 десетки илјади, 9 единици илјади, 6 стотки и 1 десетка.

13. Кој шестцифрен број има 5 единици, а е помал од бројот 100 012?

14. Даден е бројот 456 023. За секоја од цифрите одреди во која класа се наоѓа, која е нејзината позиција и која е нејзината позициона вредност.

15. Броевите 23 175 и 456 251 заокружи ги на:

а) десетки б) стотки в) илјади.

16. Користејќи го дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето и одземањето, дополни:

а) $a \cdot (b + c) =$_______________ б)$a \cdot b - a \cdot c =$_____________

17. Разликата на два броја изнесува 815. Како ќе се промени разликата и колку ќе изнесува ако намаленикот се зголеми за 60?

18. Даден е збирот 3 215+896=4 111. Определи за која вредност на x е точно равенството

$$3\ 215+(896+x)=4\ 111+28.$$

19. Во еден збир, бројот 186 се појавува 35 пати. Како ќе го пресметаш тој збир?

20. Пресметај ја вредноста на бројниот израз:

а) $4 \cdot 1\,290 + 4200 : 7 – 2\,378$ б) $560 : 7 : 2 \cdot 18 : 6 \cdot 91$
в) $100\,00 -7\,238 : 2 + 13 \cdot 992$ г) $5^3+12^2-2^6$

21. Реши ги равенките:

а) $x + 5\,264 = 154\,321$ б) $125\,364 - x = 5\,698$
в) $1\,568 : x = 392$ г) $x \cdot 84 = 2\,940$.

22. Кој број е делител на секој природен број?

23. Одреди ги сите делители на бројот 48.

24. Кои од броевите 9, 7, 12, 72, 100, 108, 4, 6, 5, 1, 36 и 360 се делители, а кои содржатели на бројот 36?

25. Одреди:

а) НЗД (24, 16) б) НЗД (72, 56)
в) НЗД (99, 11) г) НЗД (100, 7)

26. Одреди:

а) НЗС (8, 72) б) НЗС (180, 150)
в) НЗС (77, 231) г) НЗС (270, 225)

27. Разложи ги на прости множители броевите:

а) 135 б) 1218

28. Кои остатоци може да се добијат при делење на различни броеви со бројот 8?

29. Кои од броевите 308, 7000, 6453, 8865, 87, 640, 777 и 164 се деливи со бројот:

а) 2 б) 3 в) 4 г) 5

30. Определи кои од броевите 17, 50, 1001, 29, 1, 51, 49, 81, 37 се:

а) прости броеви б) сложени броеви

31. Запиши ги сите двоцифрени прости броеви чија цифра на единиците е 1.

32. Запиши ги сите сложени броеви x за кои важи $126 \leq x < 140$.

НИВО В

Ученикот треба да го примени своето знаење и разбирање

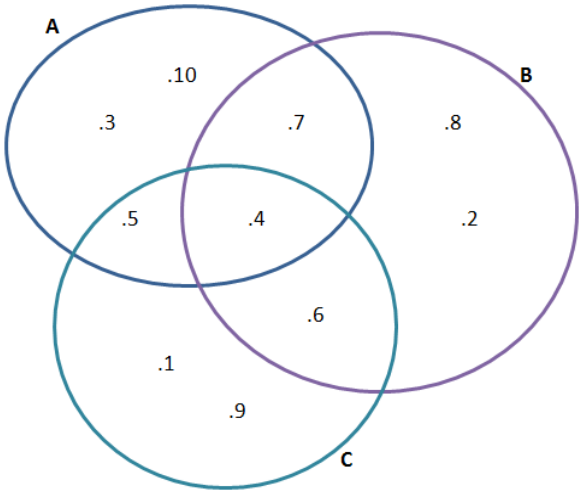
НИВО: ПРИМЕНА

За секое непразно множество A точно е дека $\varnothing \subset A$ и дека $A \subseteq A$.

Пример 1: Сите подмножества на множеството $A = \{1,2,3\}$ се:
$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$.

Често пати претставувањето на множествата со Венов дијаграм е поволно за решавање на задачи во кои треба да се извршат повеќе операции со множества.

Пример 2:



Според Веновиот дијаграм: $A \setminus (B \cap C) = \{3,5,7,10\}$
$(A \cap B) \cup (C \cap A) = \{4,5,7\}$

Пример 3: Во една паралелка 4 девојчиња тренираат тенис, 10 девојчиња тренираат ракомет, 2 девојчиња тренираат и ракомет и тенис, а 3 девојчиња не се заинтересирани за спорт. Колку девојчиња има во паралелката?
Ако елементи на множеството A се девојчињата што играат тенис, тогаш $\delta A = 4$.
Ако елементи на множеството B се девојчињата што играат ракомет, тогаш $\delta B = 10$.
Од дадените услови во задачата
$\delta(A \cap B) = 2$.
Да забележиме дека $\delta(A \cup B) = \delta(A) + \delta(B) - \delta(A \cap B)$, што значи 4+10-2+3 (девојчињата што не се заинтересирани за спорт) = 15.
Во паралелката има 15 девојчиња.

Пресекот и унијата на две множества имаат комутативно и асоцијативно својство, но разликата на множествата нема ниту комутативно ниту асоцијативно својство.

Пример 4: Со пример ќе покажеме дека разликата на множествата нема ниту комутативно ниту асоцијативно својство.

Дадени се множествата $A=\{3,a,5\}$, $B=\{4,p,5,7\}$, $C=\{a,p,7\}$.

$A\setminus B=\{3,a\}$, $B\setminus A=\{4,p,7\}$, $B\setminus C=\{4,5\}$, $A\setminus(B\setminus C)=\{3,a\}$, $(A\setminus B)\setminus C=\{3\}$

Заклучуваме дека $A\setminus B\neq B\setminus A$ и $A\setminus(B\setminus C)\neq(A\setminus B)\setminus C$.

Ако е даден Декартовиот производ на две множества, може да ги одредиме елементите на тие множества.

Пример 5: Ако M×N ={(1,2), (1,4), (3,2), (3,4), (5,2), (5,4)}, имајќи предвид дека првата компонента во подредениот пар е од првото множество, а втората од второто множество, M ={1, 3, 5}, а N ={2, 4}.

Пример 6: Вредноста на изразот [15 · (20 - 200 : 20)] : [(510 - 210) : 2] ја определуваме на следниот начин:

[15 · (20 - <u>200 : 20</u>)] : [(<u>510 - 210</u>) : 2]= [15 · (<u>20 - 10</u>)] : [<u>300 : 2</u>]=
[15 · 10] : 150=150 : 150=1

Со користење на комутативното и асоцијативното својство на собирањето и множењето, како и диструбутивното својство на множењето во однос на собирањето и одземањето, вредноста на некои бројни изрази може да се пресметува поедноставно.

Пример 7: Вредноста на дадените бројни изрази ќе ја пресметаме на подноставен начин:

а) 4 500 + 2 700 + 5 500 + 8 300=(4 500+5 500)+(2 700+8 300)=10 000+11 00 = 21 000
б) 44 · 2 · 25 · 50 · 4=(2 · 50) · (25 · 4) · 44 = 100·100·44=440 000
в) 7 · 984 + 7 · 16 = 7 · (984 + 16) = 7 · 1000 = 7000
г) 258 · 64 - 58 · 64 = (258 - 58) ·64 = 200· 64 = 12800

При решавање на посложена равенка може да користиме некој симбол со чија помош добиваме елементарна равенка.

Пример 8: Да ја решиме равенката $2\cdot x+3\,600=21320.$
Наместо $2\cdot x$ ставаме симбол $\square$, па добиваме:

$\square+3\,600=21320$ која претставува елементарна равенка.

$\square=21320-3600$

$\square=17\,720$

$2\cdot x=17\,720$

$x=17\,720:2$

$x=8\,860$

Пример 9:

Од еден овоштарник биле собрани 45 гајби јаболка од по 22 килограми, 29 гајби круши од по 18 килограми и 37 гајби сливи од по 16 килограми. Колку вкупно килограми овошје биле собрани од овоштарникот?

$$45 \cdot 22 + 29 \cdot 18 + 37 \cdot 16 = 990 + 522 + 592 = 2104$$

Заклучуваме дека од овоштарникот биле собрани вкупно 2 104 килограми овошје.
Обиди се задачата да ја решиш со користење на табела.

Пример 10:

Постојат ли сложени броеви кои се заемно прости?
Да, на пример 25 и 33.
И двата броја се сложени бидејќи

$D_{25} = \{1,5,25\}, \quad D_{33} = \{1,3,11,33\}$

Понатаму $D_{25,33} = \{1\}$ Нивниот НЗД е 1. Според тоа тие се заемно прости броеви.

Пример 11:

а) Во бројот 16 27* ќе ги одредиме цифрите што можат да ја заменат * така што добиениот број да биде делив со 3 и 5.
За бројот да биде делив со 3, $* \in \{2,5,8\}$.
За бројот да биде делив со 5, $* \in \{0,5\}$.

$\{2,5,8\} \cap \{0,5\} = \{5\}$

Заклучуваме дека ако цифрата * се замени со 5, добиениот број ќе биде делив и со 3 и со 5.

б) Во бројот 7 4*2 ќе ги одредиме цифрите што можат да ја заменат * така што добиениот број да биде делив со 4 и 9.
За бројот да биде делив со 4, $* \in \{1,3,5,7,9\}$.
За бројот да биде делив со 9, $* \in \{5\}$.

$\{1,3,5,7,9\} \cap \{5\} = \{5\}$

Заклучуваме дека ако цифрата * се замени со 5, добиениот број ќе биде делив и со 4 и со 9.

Пример 12:

Колку најмногу еднакви букети може да се направат од 30 бели, 42 црвени и 18 жолти рози, така што во секој букет да има ист број рози од иста боја и сите да бидат употребени? По колку рози од секоја боја ќе има во еден букет?

Вкупниот број на букети ќе го откриеме ако одредиме НЗД(30, 42, 18).

30, 42, 18 | 2
15, 21, 9 | 3
5, 7, 3 | 6

Од 30 бели, 42 црвени и 18 жолти рози можат да се направат 6 еднакви букети и во секој од нив ќе има по 5 бели, 7 црвени и 3 жолти рози.
Обиди се задачата да ја решиш со користење на цртеж.

Пример 13:

Три различни светлосни сигнали се вклучени во ист момент. Ако првиот светлосен сигнал се гаси на 10 секунди, вториот на 3 секунди, а третиот на 5 секунди, на колку секунди ќе се изгаснат сите три светлосни сигнали?

За да определиме на колку секунди сите три светлосни сигнали ќе се изгаснат, ќе одредиме НЗС(10, 3,5).

10, 3, 5 |2
5, 3, 5 |3
5, 1, 5 |5
1, 1, 1 |30

На 30 секунди сите три светлосни сигнали ќе се изгаснат.

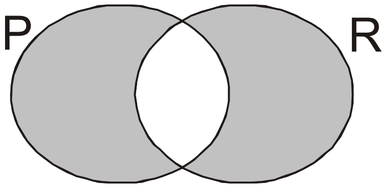
Ниво Г

Ученикот треба да користи логичко следство

НИВО: АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ

- При операции со множества може да постапуваме на различни начини.

Пример 1:



Со помош на операциите со множества обоениот дел на сликата може да се запише на следните неколку начини: $(P \cup R) \setminus (P \cap R)$ или $(P \setminus R) \cup (R \setminus P)$ или $P \cup (R \setminus P) \setminus (R \cap P)$ или $(P \setminus R) \cup R \setminus (R \cap P)$.

- Често пати може да се бара определување на множествата ако се дадени вредностите од извршените операции.

Пример 2: Ако A∪B={ x|x∊N и x≤8}, A∩B={1, 2, 7, 8} и B\A={3, 6}, тогаш елементите на множествата A и B може да се определат на следниот начин:

Најпрво ќе го запишеме табеларно множеството A∪B={ 1,2,3,4,5,6,7,8}. Бидејќи A∩B={1, 2, 7, 8} и B\A={3, 6}, следува дека B={1, 2, 3, 6, 7, 8}:тоа се елементите што ги има во пресекот и елементите што ги има во B, а ги нема во A. Имајќи предвид дека A∪B={ 1,2,3,4,5,6,7,8}, следува дека A={ 1, 2, 4, 5, 7, 8}.

Пример 3: Дали постои прост број чиј збир на цифрите е 15?
Ако збирот на цифрите со кој е запишан бројот е 15, тогаш тој број е сигурно делив со 3 од каде следува дека бројот на неговите делители ќе биде поголем од 2 што значи тој број сигурно не е прост. Заклучуваме: не постои!

- Нека $x \mid y$. Фактот дека y може да се запише како производ од x и некој друг број $(y = k \cdot x)$ се користи во докази.

Пример 4: Ако $a \mid b$ и $a \mid c$, тогаш и $a \mid (b+c)$. Ќе го докажеме ова тврдење. Од $a \mid b$ следува дека $b = a \cdot n$, а од $a \mid c$ следува дека $c = a \cdot m$, каде што $n, m \in N$. Според тоа, збирот има $b+c$ запис $b + c = a \cdot n + a \cdot m = a \cdot (n+m)$ со што покажавме дека и тој е делив со a .
Пример: 5|15 и 5|30, дава 5|(15+30), т.е. 5|45.

Множеството броеви кои при делење со некој број даваат ист остаток е бесконечно.

Пример 5: Ќе запишеме броен израз за сите броеви (x) кои при делење со 7 даваат остаток 3.
$x = 7 \cdot n + 3, \quad n \in N.$
Примери:
$10 = 7 \cdot 1 + 3$
$17 = 7 \cdot 2 + 3$
$24 = 7 \cdot 3 + 3$
.
.
.

Делењето со 0 ќе го разгледуваме со следните примери:

$6:3 = 2$ бидејќи $2 \cdot 3 = 6$

Дали може да се пресмета колку е делење со 0? На пример, колку е 5:0 ?
Нека $5:0 = 0$. Тогаш $0 \cdot 0 = 5$.Но $0 \cdot 0 \neq 5$ па поради тоа $5:0 \neq 0$;
Нека $5:0 = 5$. Тогаш $5 \cdot 0 = 5$.Но $5 \cdot 0 \neq 5$ па поради тоа $5:0 \neq 5$.
Нека $5:0 = m, m \in N$.Тогаш $m \cdot 0 = 5.$ Но $m \cdot 0 \neq 5$ па поради тоа $5:0 \neq m.$

Заклучок: Делењето со нула на број различен од 0 не е можно.

Дали може да се пресмета 0 : 0 ?

Нека $0:0 = 0$. Тогаш $0 \cdot 0 = 0$; $0 \cdot 0 = 0$ е точно, но дали од ова следува дека $0:0 = 0$ е точно? Одговорот е: Не!
Имено, тогаш и $0:0 = 5$ бидејќи $5 \cdot 0 = 0$; $5 \cdot 0 = 0$ е точно.
Слично, $0:0 = m, m \in N,$ бидејќи $m \cdot 0 = 0$. Значи: 0 : 0 не може да се пресмета.

Заклучок: Делењето на нула со нула е возможно, но има бесконечно многу резултати.

При записот $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{n}$ степеновиот показател ни покажува колку пати основата се множи сама со себе. Тоа може да го користиме во задачи каде ќе одредуваме на која цифра завршуваат некои степени.

Пример 6: Бројот 6^{2013} завршува на цифрата 6 бидејќи:

$6^1 = 6$

$6^2 = 36$

$6^3 = 216$

.

.

.

6^{2013} завршува на цифрата 6.

Пример 7: Бројот 6^{2013} при делење со 10 има остаток 6 бидејќи:

$6^1 = 6,$ па при делење со 10 има остаток 6

$6^2 = 36,$ па при делење со 10 има остаток 6

$6^3 = 216,$ па при делење со 10 има остаток 6

.

.

6^{2013} завршува на цифрата $6,$ па при делење со 10 има остаток 6.

Пример 8: Бројот 2^{2012} завршува на цифрата 6 бидејќи:

$2^1 = 2,$ завршува на цифрата 2

$2^2 = 4,$ завршува на цифрата 4

$2^3 = 8,$ завршува на цифрата 8

$2^4 = 16,$ завршува на цифрата 6

$2^5 = 32,$ завршува на цифрата 2

$2^6 = 64,$ завршува на цифрата 4

$2^7 = 128,$ завршува на цифрата 8

$2^8 = 256,$ завршува на цифрата 6

.

.

$2^{2009},$ завршува на цифрата 2

$2^{2010},$ завршува на цифрата 4

$2^{2011},$ завршува на цифрата 8

$2^{2012},$ завршува на цифрата 6

Заклучок: Бројот 2^{2012} завршува на цифрата 6.

Пример 9: Да го одредиме остатокот од делењето на бројот 18^{2013} со 17:

$18^1 : 17,$ остаток 1

$18^2 : 17,$ остаток 1

$18^3 : 17,$ остаток 1

Заклучок: При делење на 18^{2013} со бројот 17 се добива остаток 1.

ЗАДАЧИ ОД НИВО В И НИВО Г

Со користење на задачите подолу, наставникот може да направи проверка на знаењата на ученикот кои се на ниво на примена, анализа, синтеза и вреднување. Задачите може да ги користат учениците за самооценување, а и родителите може да го проверат нивото на стекнати знаења.

1. Запиши множество С кое ќе биде еквивалентно со множеството $A=\{x|x\in N$ и $20< x\leq 26\}$.

2. Дали две еднакви множества се и еквивалентни? Дали две еквивалентни множества секогашсе и еднакви? Образложи ги своите одговори.

3. Одреди ги сите подмножества на множеството В={а, б, в}.

4. Дадени се множествата А={3, 5, а}, В={4, р, 5, 7} и С={а, р, 5}. Одреди ги елементите на множеството $(A\cap C)\backslash B$.

5. Дадени се множествата $A=\{x|x\in N$ и $x<10\}$, $B=\{x|x\in N$ и $3< x\leq 10\}$ и $C=\{x|x\in N$ и $x<12$ и $x>2\}$. Одреди го множеството $A\backslash(B\cup C)$.

6. Множествата А и В прикажи ги со Венов дијаграм ако: $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A\cap B=\{x|x\in N$ и $3\leq x<6\}$ и $A\backslash B=\{1, 6\}$.

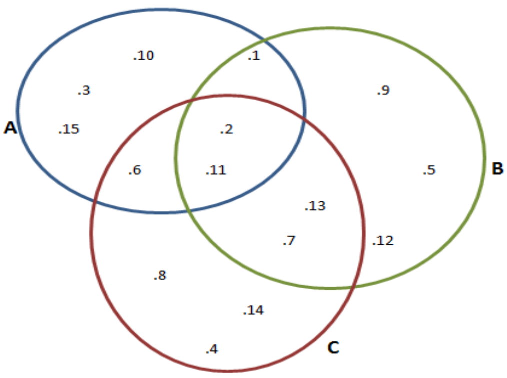
7. Множествата А и В прикажи ги со Венов дијаграм ако: $A\cup B=\{2, 4, 5, 7, 8\}$, $B\backslash A=\{5, 7\}$ и $A\backslash B=\{2, 4\}$.

8. Запиши ги табеларно множествата А и В ако: $A\cup B=\{5, 6, 7, 8\}$, $5\in A$, $5\in B$, $6\in A\cap B$, $7\in A$, $7\notin B$ и $8\notin A$.

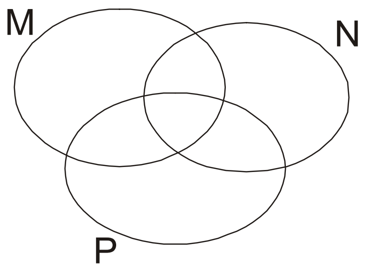
9. Одреди ги елементите на множествата А и В ако: $A\cap B=\{1, 2\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и $бA=2$.

10. Нека $K\backslash S=\{a, b\}$, $S\backslash K=\{c, d\}$ и $K\cup S=\{a, b, c, d, e, f, g\}$. Запиши го табеларно множеството $K\cap S$.

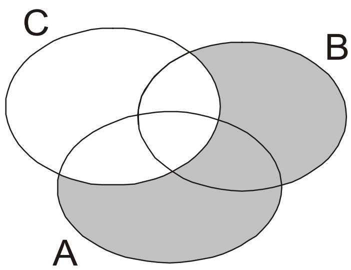
11. Врз основа на Веновиот дијаграм на сликата, запиши ги табеларно множествата:
    а) $(A\cap B)\cup C$ б) $A\backslash(B\cup C)$
    в) $B\cap(C\backslash A)$ г) $(A\backslash B)\cap C$



12. Обој го на сликата множеството $(M \cup N) \cap P$.



13. Со помош на операциите со множества запиши го обоениот дел на сликата:



14. Запиши ги табеларно множествата M и N ако нивниот Декартов производ е M×N ={(1,2), (1,4), (3,2), (3,4), (5,2), (5,4)}.

15. Дадени се множествата A={ x|x∈N и x|4} и B={ x|x е прост број помал од 5}. Претстави ги табеларно множествата A×B и A^2 и одреди *б*(A×B) и *б*(A^2).

16. Ако M×N ={(1,а), (1,б), (2,а), (2,б), (3,а), (3,б)}, запиши ги табеларно множествата M\N, M∩N и M∪N и одреди го нивниот број.

17. Сите 26 ученици од едно одделение јадат ужина на големиот одмор. 10 ученици јадат сендвич за ужина, а 19 јадат овошје. Колку ученици јадат и сендвич и овошје за ужина? Образложи го одговорот.

18. Група деца во слаткарница нарачувале сладолед и сок, за секого по нешто. Ако 12 деца нарачале сладолед, а 8 деца нарачале сок, а тројца и сладолед и сок, колку деца биле во слаткарницата? Образложи го одговорот.

19. Пополни ја табелата:

Намаленик	126 000	849 239	
Намалител	1 239		51 677
Разлика		119 234	9 345

20. Пресметај:
   а) 80 - [15 - (20 - 8)] · 9
   б) 64 : [24 : (27 : 9)]
   в) [(32 : 8) · (40 - 31)] · 200
   г) 90 - [14 - (61 - 5) : (48 : 6)] · 9
   д) (720 - 220) · [(12 - 7) · (62 - 54)]
   ѓ) [(160 - 40) : 2] · [9 · (3000 : 30)]

21. Пресметај на наједноставен начин:

а) $27 \cdot 34 + 27 \cdot 66$ б) $125 \cdot 7 - 7 \cdot 14$
в) $88 \cdot 8 + 13 \cdot 8$ г) $6 \cdot 99 - 77 \cdot 6$
д) $59 \cdot 992 + 8 \cdot 59$ ѓ) $39 \cdot 573 - 373 \cdot 39$

22. Реши ги равенките:

а) $(x+365):3=851$ б) $1265-4\cdot x=405$ в) $(x-896)\cdot 5=123\,500$

23. Кој број ќе се добие ако збирот на броевите 12 365 и 65 421 го намалиме два пати?

24. Од кој број треба да се одземе бројот 356 408, за да се добие бројот 245 592?

25. Со кој број треба да се помножи бројот 235 за да се добие производ 12 690?

26. Еден велосипедист возел од местото А до местото Б. Откако поминал 3 265 метри, му преостанале уште 968 метри помалку отколку што поминал. Колкаво е растојанието од местото А до местото Б? (реши на 3 начини).

27. Едно земјоделско стопанство произвело 256 300 килограми пченка. Произвело пченица за 23 750 килограми помалку од пченка, а ориз два пати помалку од пченка и пченица заедно. Колку вкупно килограми житни производи произвело стопанството?

28. На еден училиштен квиз за секој точен одговор се добива по 150 бода, за неточен се одземаат 50 бода, а за неодговорено прашање ниту се добиваат ниту се губат бодови. Екипата од VI-а точно одговорила на 6 прашања, неточно на 3, а на 5 прашања не одговорила. Екипата од VI-б одговорила точно на 7 прашања, неточно на 5, а на 2 прашања не одговорила. Која екипа освоила повеќе бодови и за колку? Образложи го својот одговор.

29. Кирил има 24 години, а неговата мајка има 53 години. Колку години има сестра му на Кирил сега, ако по 8 години Кирил и неговата сестра заедно ќе имат толку години колку што ќе има мајка им?

30. Ако шест чоколади чинат 366 денари, тогаш колку чинат четири чоколади?

31. Кој број поделен со 31 дава количник 19 и остаток 7?

32. Во една театарска сала, седиштата се распоредени во 38 реда и тоа во секој ред по 28 седишта. На синоќешната претстава дошле 820 луѓе.
а) Колку празни места останале во салата?
б) Колку пари биле заработени ако една влезница чинела 150 денари?

33. Запиши го најмалиот петоцифрен природен број делив со 3 во кој на позицијата единици илјади стои цифрата 7.

34. Во броевите 74*, 8 4*2 и 10 95* замени ја ѕвездичката со цифра така што добиениот број да биде делив со:
а) 2 и 9 б) 3 и 4.

35. Запиши два трицифрени броја кои се:

а) содржатели на бројот 5 б) деливи со 3, а не деливи со 9.

36. Одреди го најголемиот четирицифрен број што е делив со 4 и 5.

37. Дали постои прост број чиј збир на цифрите е 18? Образложи го својот одговор.

38. Запиши ги сите прости броеви кои се делители на бројот 42.

39. Кои броеви се заеднички делители на сите парни природни броеви?

40. Определи дали множеството од сите содржатели на бројот 23 е:
а) конечно или б) бесконечно.

41. Дали се заемно прости броевите 77 и 30.

42. Запиши општ израз за броевите кои при делење со 5 даваат остаток 2.

43. Бројот 2 520 запиши го како производ на четири природни броја.

44. Провери го со пример тврдењето: ако $2|a$ и $2|b$, тогаш $2|(3\cdot a+5\cdot b)$.

45. Одреди: а) НЗД (14, 18, 26) б) НЗС (100, 50, 20)

46. Во една продавница млеко се доставува секој втор ден, јогурт секој трет ден, а сирење на секои петнаесет дена. Ако денес во продавницата се доставени сите три производи, по колку дена повторно сите три производи ќе бидат донесени во ист ден?

47. Колку најмногу еднакви пакетчиња може да се направат од 36 сока, 42 чоколади и 210 бонбони, така што во секое пакетче да има по еднаков број парчиња од ист производ и сите производи да бидат употребени? По колку бонбони ќе има во секое пакетче?

48. На која цифра завршува бројот 25^{2013}?

49. На која цифра завршува бројот 3^{2012}?

50. Колкав е остатокот при делењето на $20^{20}+39^{39}$ со 19?

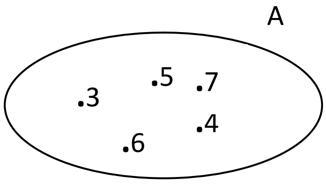
51. Покажи дека бројот $31^{31}-1$ е делив со 30.

ЗАДАЧИ ШТО СЕ РЕШАВААТ НА ПОВЕЌЕ НАЧИНИ

Задача 1. **Претстави го на повеќе начини множеството природни броеви поголеми од 2, а помали од 8.**

I начин: Табеларно $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

II начин: Со Венов дијаграм



III начин: Описно

Варијанта 1: $\{x|3 \leq x \leq 7, x \in \mathbb{N}\}$

Варијанта 2: $\{x|2 < x \leq 7, x \in \mathbb{N}\}$

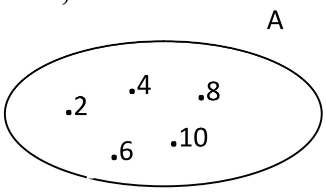
Варијанта 3: $\{x|3 \leq x < 8, x \in \mathbb{N}\}$

Варијанта 4: $\{x|2 < x < 8, x \in \mathbb{N}\}$

Задача 2. **Претстави го на повеќе начини множеството од првите 5 парни природни броеви.**

I начин:Табеларно $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

II начин: Со Венов дијаграм



III начин: Описно

Варијанта 1: $\{x|2$ *е делител на* $x, x < 11, x \in \mathbb{N}\}$

Варијанта 2: $\{x|x$ *е природен број помал од* 11 *делив со* $2\}$

Варијанта 3: $\{x|x$ *е природен парен број помал или еднаков со* $11\}$

Варијанта 4: $\{x|x = 2k, k < 6, k \in \mathbb{N}\}$

Варијанта 5: $\{x|x$ *е делив со* $2, x \leq 10, x \in \mathbb{N}\}$

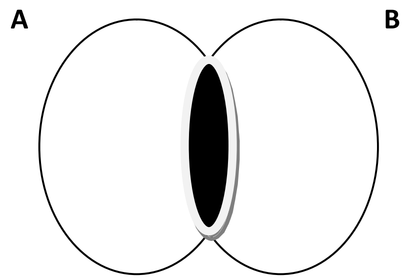
Варијанта 6: $\{x|2\ \textit{се содржи во}\ x, x < 11, x \in \mathbb{N}\}$

Варијанта 7: $\{x|x\ \textit{е содржател на}\ 2, x \leq 10, x \in \mathbb{N}\}$

Варијанта 8: $\{x|x\ \textit{при делењето со}\ 2\ \textit{дава остаток}\ 0, x \leq 10, x \in \mathbb{N}\}$

Варијанта 9: $\{x|x < 11, \textit{НЗД од броевите е}\ 2, x \in \mathbb{N}\}$

Задача 3. **Светлиот дел од множествата A и B претстави го на повеќе начини.**



I начин: $\{x\ |\textit{или}\ x\ \in A$ или $x \in\ B\}$

II начин: {Со набројување на елементите ако се дадени}

III начин:

Варијанта 1: $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Варијанта 2: $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Варијанта 3: $(A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B))$

Варијанта 4: $((A \cup B) \cup (A \cap B)) \setminus (A \cap B)$

Задача 4. **Маја и Зоран имале 18 парички од по 2 и од по 5 денари. Маја ги избројала паричките од по 2 денари а Зоран ги избројал паричките од по 5 денари и констатирале дека имале вкупно 60 денари. Колку парички од по 2 денари избројала Маја, а колку парички од по 5 денари избројал Зоран?**

I начин:

Варијанта 1: Нека се сите парички од по 2 денари, а тоа значи 18 x 2 = 36 денари. Земаме две парички од по 2 денари и на нивно место ставаме две парички од по 5 денари. Така 16 x 2 = 32 и 2 x 5 = 10. Продолжуваме со постапката и уште по три земања на парички од по 2 денари и дополнување од по две парички од по 5 денари, добиваме 10 x 2 = 20 и 8 x 5 = 40. Значи Маја избројала 10 парички, а Зоран избројал 8 парички.

Варијанта 2: Нека сега сите парички се од по 5 денари, а тоа значи 18 x 5 = 90. Заменуваме две парички од по 5 денари со две парички од по 2 денари.

Така 16 x 5 = 80 и 2 x 2 = 4. Заменуваме уште две парички од по 5 денари со две парички од по 2 денари. Сега 14 x 5 = 70 и 4 x 2 = 8. Продолжуваме со постапката и добиваме 8 x 5 = 40 и 10 x 2 = 20. Значи Маја избројала десет парички од по 2 денари, а Зоран осум парички од по 5 денари.

II начин:

Ако бројот на парички од 2 денари го означиме со Д, а бројот на паричките од 5 денари со П, тогаш:

Д + П = 18 и Д x 2 + П x 5 = 60, т.е. Д + Д + П + П + П + П + П = 60.

Значи 18 + 18 + П + П + П = 60, односно П + П + П = 24 или П = 8 а се добива дека Д = 10. Значи Маја избројала 10 парички, а Зоран избројал 8 парички.

III начин:

Бидејќи има 60 денари, бројот на парички од по 5 денари е парен број, т.е. 2, 4, 6, 8, 10,... Во тој случај бројот на паричките од 2 денари мора да даваат збир 10, 20, 30, 40, ... т.е. нивниот број мора да биде 5, 10, 15, 20, ... Очигледно збир 18 даваат 8 и 10, т.е. Маја избројала 10 парички, а Зоран избројал 8 парички.

IV начин:

Бидејќи 5 + 2 = 7 денари, тогаш од 60 : 7 = 8 и остаток 4 добиваме:

8 x 5 = 40

8 x 2 = 16

2 x 2 = 4 што значи дека биле 18 парички со вредност од 60 денари, т.е. Маја избројала 10 парички, а Зоран избројал 8 парички.

V начин:

Од условот на задачата може да ја формираме следната табела:

5 денари	1	2	3	4	5	6	7	8
2 денари	17	16	15	14	13	12	11	10
Вкупно парички	18	18	18	18	18	18	18	18
Вкупно денари	39	42	45	48	51	54	57	60

Значи Маја избројала 10 парички, а Зоран избројал 8 парички.

Задача 5. **Павле купил неколку моливи по 12 денари и неколку тетратки по 6 денари. Продавачот му наплатил 124 денари. Како Павле знаел веднаш дека продавачот погрешил?**

Решенија:

I начин: Павле користел деливост со 3.

Ако m е бројот на моливи, а n е бројот на тетратки, тогаш $12m+6n=3(4m+2n)$.

Значи, $3|4m+2n$, но 3 не е делител на 124.

II начин: Со проверка на равенството од условот на задачата.

Павле запишал: $12m+6n=124$, т.е $6m+3n=62$

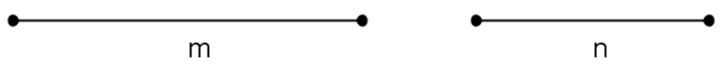
За $n=1$ $\quad 6m\neq 59$

За $n=2$ $\quad 6m\neq 56$

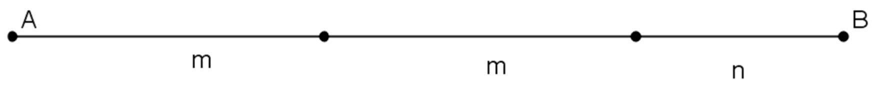
За $n=3$ $\quad 6m\neq 51$

Лесно се согледува дека $6m+3n=62$ нема решение.

III начин: Графички со отсечки



$6m+3n=3(2m+n)$



$2m+n\in \mathbb{N}$, но $\frac{62}{3}\notin \mathbb{N}$

Значи, $3\overline{AB}\neq 62$.

СПЕЦИФИКАЦИСКА МРЕЖА НА ТЕСТОТ

(Во спецификацискатa мрежа е даден бројот на задачите по содржини и по нивоа, како и нивната процентуална застапеност)

	Содржини	Број на часови	А Познавање	Б Разбирање	В Примена, Анализа, Синтеза, Вреднување	Проценти	Задачи
I	Множества и операции	8	2	2	2	20%	6
II	Природни броеви	4	1	1	1	10%	3
III	Операции во $\mathbb{N}$	8	2	2	2	20%	6
IV	Бројни изрази и равенки	6	1	2	1	15%	4
V	Деливост	14	3	5	3	35%	11
	Процент		**30%**	**40%**	**30%**	**100%**	
	Задачи		**9**	**12**	**9**		**30**

ТЕМАТСКИ ТЕСТ

1 Кое од следните четири множества е конечно?

А. Множеството парни броеви Б. Множеството непарни броеви
В. Пресекот на множеството парни и множеството непарни броеви
Г. Унијата на множеството парни или множеството непарни броеви

2 Со изразот $A \subset X$ е запишано:

А. A припаѓа на X В. A е еднакво на X
Б. A е вистинско подмножество на X Г. X е дел од A

3 Ако $A = \{2,4,6,8\}$ и $B = \{3,6,9\}$, тогаш:

А. $A \cap B = \{6\}$ Б. $A \cap B = \varnothing$ В. $A \cap B = \{2,4,8\}$ Г. $A \cap B = \{3,9\}$

4 Ако $A = \{1,2,3\}$ и $B = \{a,b\}$, тогаш множеството $A \times B$ има:

А. 3 елементи Б. 4 елементи В. 5 елементи Г. 6 елементи

5 За броевите a и b секогаш важи:

А. $(a,b)=(b,a)$ Б. $\{a,b\}=(b,a)$ В. $(a,b)\neq(b,a)$ Г. $\{a,b\}\neq\{b,a\}$

6 Со записот $A \cap B = B \cap A$ е искажано:

А. комутативното својство на унијата В. асоцијативното својство на пресекот
Б. комутативното својство на пресекот Г. асоцијативното својство на унијата

7 Кој од следните четири искази е вистинит?

А. Секој природен број има следбеник. В. Постои најголем природен број.
Б. Секој природен број има претходник. Г. Има конечно многу природни броеви.

8 Бројот 52472 заокружен на илјади е:

А. 52400 Б. 52500 В. 5247(Г. 52000

9 Броевите 1,10,100,1000 итн. се викаат декадни:

А. десетки Б. стотки В. единици Г. илјадарки

10 Разликата од најголемиот трицифрен и најмалиот двоцифрен број е:

А. 998 Б. 990 В. 909 Г. 989

11 Вредноста на изразот $3+3:3-2+2:2$ е:

А. 2 Б. 3 В. 1 Г. 0

12 Вредноста на изразот $2:0$ е:

А. 2 Б. 0 В. нема смисла Г. кој било број

13 При делењето на 1111111 со 11 остатокот е:

А. 0 Б. 1 В. 10 Г. 11

14 Јоле имал 6 години, а бил 3 пати постар од сестра му Јана и три години помлад од брат му Милан. Мајка им имала два пати повеќе години од збирот на годините на Јоле, Јана и Милан. Колку години имал дедо им Васил, ако се знае дека татко им е врсник со мајка им, а годините на дедо им се еднакви со збирот на годините на Јоле, неговата сестра Јана, братот Милан и нивните мајка и татко?

А. 68 Б. 77 В. 83 Г. 85

15 Во записот 5^3 бројот 3 се вика:

А. степенов показател Б. основа В. степен Г. вредност на степенот

16 Кој од изразите е броен израз?

А. $2+3:3-+5$ Б. $2-2:(2-1)$ В. $2+3:x=8$ Г. $(3+2)\cdot 5=3\cdot 5+2\cdot 5$

17 Во равенката $8:(3-x)=4$ непознатата x е:

А. намаленик Б. деленик В. намалител Г. делител

18 Решение на равенката $2:x=8$ е:

А. 4 Б. 2 В. 0 Г. друг одговор

19 Ако $x,y\in\mathbb{N}$ тогаш исказот: „Бројот x е за три поголем од бројот y" се запишува симболички со:

А. $x-3=y$ Б. $y=x+3$ В. $x>y+3$ Г. $y>x+3$

20 Бројот 3 е делител на:

А. 13 Б. 23 В. 33 Г. 43

21 Бројот 4 е делител на:

А. 454 Б. 434 В. 214 Г. 224

22 Множеството делители на бројот 12 има:

А. 6 елементи Б. 4 елементи В. 3 елементи Г. 2 елементи

23 Бројот $4575*$ ќе биде делив со 12 ако на местото на $*$ се запише цифрата:

А. 0 Б. 6 В. 4 Г. 2

24 Ако НЗД$(a,b)=1$,тогаш НЗС(a,b) е:

А. a Б. b В. $a \cdot b$ Г. 1

25 НЗД$(12,30,42)$ е бројот:

А. 1 Б. 2 В. 3 Г. 6

26 Множеството од заеднички содржатели на броевите a и b има:

А. бесконечно многу елементи. В. два елемента.
Б. конечно многу елементи. Г. еден елемент.

27 НЗС$(7,11,13)$ е бројот:

А. 1003 Б. 1001 В. 101 Г. 143

28 Пресекот на множеството од прости броеви и множеството од сложени броеви е:

А. $\{1\}$ Б. $\mathbb{N}$ В. $\varnothing$ Г. $\mathbb{N}_0$

29 Ена делела еден број со 19 и добила количник 23 и остаток 2. Истиот тој број намален за 2 Кочо го делел со 23 и добил количник:

А. 17 Б. 21 В. 23 Г. 19

30 Ако еден број го делиме со 10 се добива остаток 1, ако го делиме со 15 остатокот е 1, а ако го делиме со 20 ќе се добие остаток 1. Кој е најмалиот трицифрен број со ова својство?

А. 181 Б. 121 В. 101 Г. 151

Клуч

	Решение		Решение
1.	В	16.	Б
2.	Б	17.	В
3.	А	18.	Г
4.	Г	19.	А
5.	В	20.	В
6.	Б	21.	Г
7.	А	22.	А
8.	Г	23.	Б
9.	В	24.	В
10.	Г	25.	Г
11.	Б	26.	А
12.	В	27.	Б
13.	Б	28.	В
14.	Г	29.	Г
15.	А	30.	Б

Скала за вреднување на резултатите од тестот
(секоја задача се вреднува со по 1 поен)

ОСВОЕНИ ПОЕНИ	ОЦЕНКА
0-7	Недоволен (1)
8-11	Доволен (2)
12-19	Добар (3)
20-23	Многу добар (4)
24-30	Одличен (5)

ТЕМА 2: ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ ВО РАМНИНА

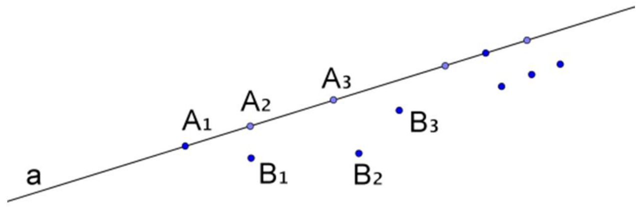
Ниво А

Ученикот треба да знае дека…

НИВО: ПОМНЕЊЕ

(прво основно својство)
На една права припаѓаат бесконечно многу точки, но има и бесконечно многу точки што не припаѓаат на таа права.

Пример 1:

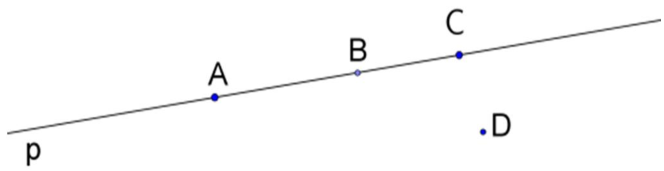


(второ основно својство)
Низ две дадени точки минува точно една права.

Пример 2: Низ точките A и B минува правата $p = AB$.

Точките што припаѓаат на иста права се викаат колинеарни точки.

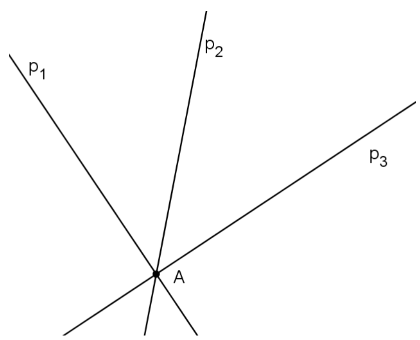
Пример 3:



Точките A, B, C се колинеарни, точките A, B, C, D не се колинеарни.

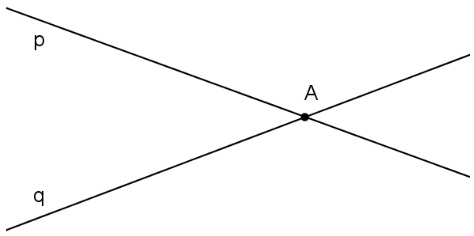
Низ една дадена точка минуваат бесконечно многу прави.

Пример 4:



Две прави се сечат ако имаат една заедничка точка.

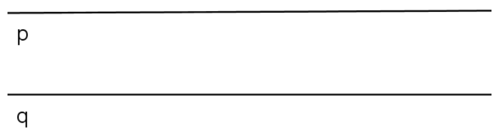
Пример 5:



$$p \cap q = \{A\}$$

Две прави од рамнината кои немаат заедничка точка се викаат паралелни прави.

Пример 6:

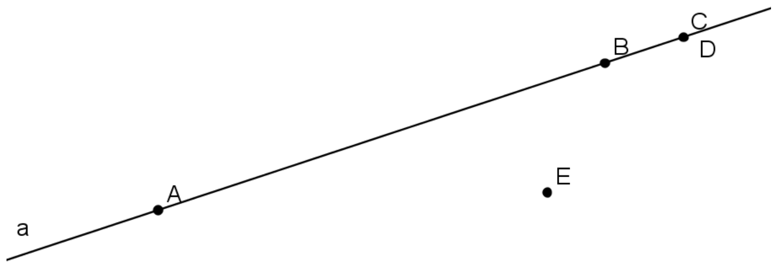


$$p \parallel q \qquad p \cap q = \varnothing$$

Растојанието меѓу две точки A и B е број $\overline{AB}$ со својствата:

1) $\overline{AB} \geq 0$
2) $\overline{AB} = \overline{BA}$
3) $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$ за која било точка C.

Пример 7: Нека е дадена права p со точките A, B, C, D и E како на цртежот:



$\overline{AB} = 3 \qquad \overline{CD} = 0$

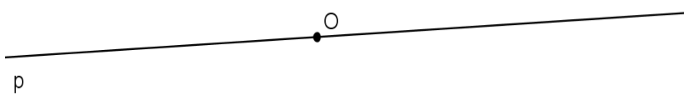
$\overline{BA} = 3 \qquad \overline{DC} = 0$

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$; A, B, C се колинеарни

$\overline{AE} < \overline{AB} + \overline{BE}$

Точката којашто правата ја дели на два дела се вика гранична точка.

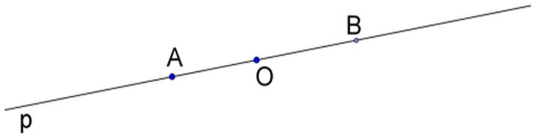
Пример 8:



O е гранична точка.

Секој од деловите од правата заедно со граничната точка се вика полуправа.

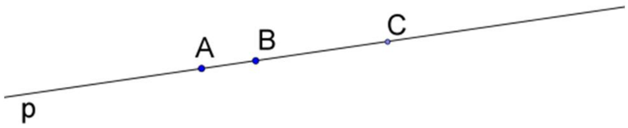
Пример 9:



Полуправи се OA и OB.

Граничната точка се вика почетна точка на полуправата.

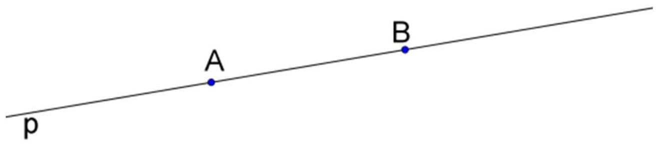
Пример 10:



B е почетна точка на полуправата BA и B е почетна точка на полуправата BC.

Множеството точки од една права што ги содржи точките A и B (со ознака AB или BA) и сите точки меѓу нив се вика отсечка.

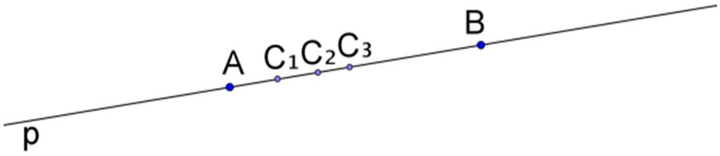
Пример 11:



Отсечката е AB или BA.

Отсечката содржи две крајни точки и бесконечно многу точки меѓу нив кои се викаат внатрешни.

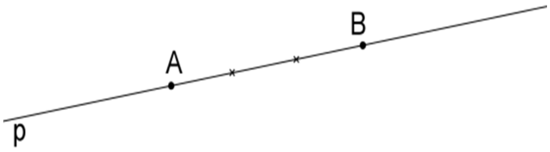
Пример 12:



A и B се крајни точки,а C_1,C_2,C_3,... се внатрешни точки.

Должината на отсечката AB со ознака $\overline{AB}$ е растојанието меѓу крајните точки A и B.

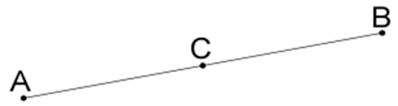
Пример 13:



$\overline{AB} = 3cm$; $\overline{BA} = 3cm$.

Точка од отсечката што е подеднакво оддалечена од крајните точки на отсечката се вика средна точка или средина на отсечката.

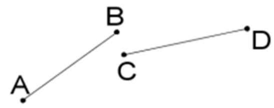
Пример 14:



C е средна точка на отсечката бидејќи $\overline{AC} = \overline{CB}$.

За две отсечки што имаат еднакви должини велиме дека се еднакви.

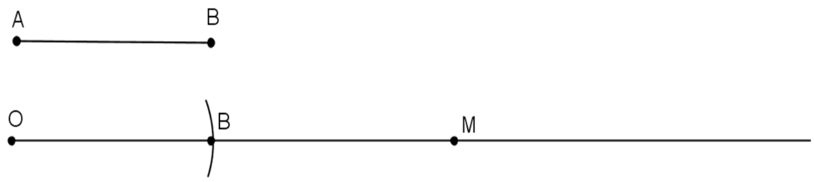
Пример 15:



$\overline{AB} = \overline{CD}$.

Отсечка графички се пренесува со шестар и линијар и изготвувањето на тој цртеж се вика конструкција.

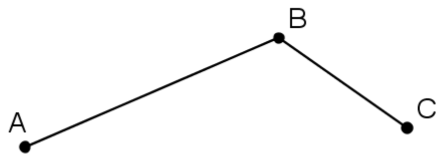
Пример 16:



Отсечката AB е пренесена на полуправата OM така што A се совпаѓа со O и $\overline{AB} = \overline{OB}$.

Две отсечки на кои им се совпаѓаат по една од двете крајни точки се викаат соседни отсечки.

Пример 17:

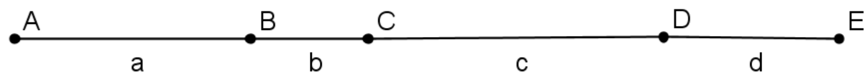


Отсечките AB и BC се соседни,бидејќи во точката B се совпаѓа по една крајна точка од отсечките AB и BC.

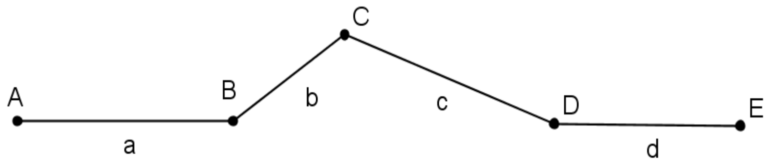
Отсечките може да се надоврзуваат една на друга на различни начини

Пример 18: Отсечките a, b, c и d се надоврзани на различни начини:

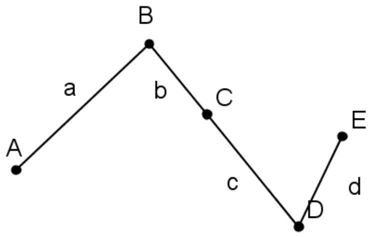
1)



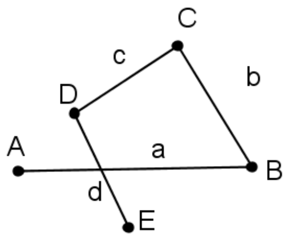
2)



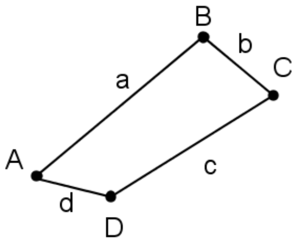
3)



4)



5)

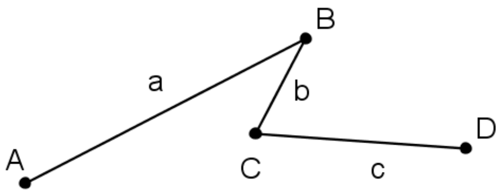


Геометриската фигура што се добива со надоврзување на отсечки така што кои било две соседни отсечки не лежат на иста права се вика искршена линија.

Пример 19: Во претходниот пример искршени линии се геометриските фигури под 2), 4), 5),додека 1) и 3) се геометриски фигури кои не се искршени линии.

Една искршена линија се состои од страни и темиња.

Пример 20:



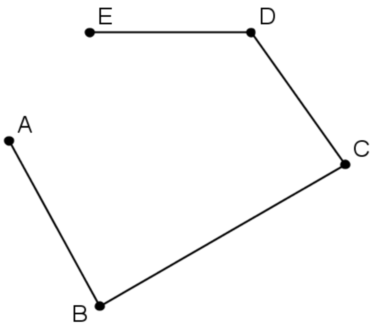
Страни се: a, b, c, а темиња се A, B, C и D.

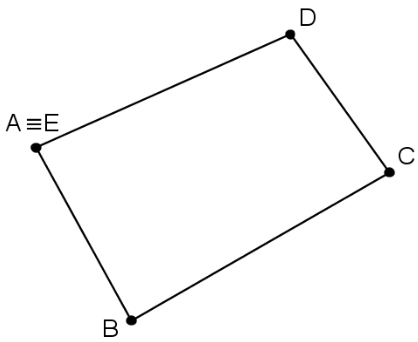
Точките што се наоѓаат на почетокот и на крајот на искршената линија се викаат крајни точки на искршената линија.

Пример 21: Во претходниот пример точките A и D се крајни точки на искршената линија.

Искршената линија на која крајните точки се совпаѓаат се вика затворена искршена линија.

Пример 22:

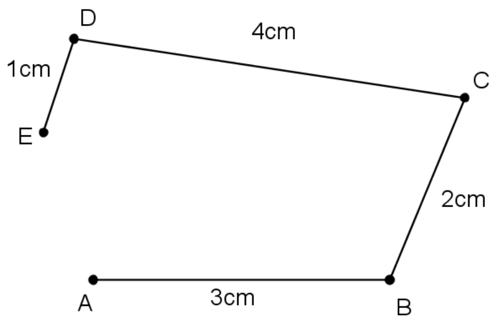




$ABCDE$ е отворена искршена линија $ABCDA$ е затворена искршена линија

Збирот од должините на страните на една искршена линија се вика периметар и се означува со L.

Пример 23:



$$L = 3 + 2 + 4 + 1$$
$$L = 10cm$$

Поимите што се среќаваат при изучувањето на математиката се викаат математички поими.

Пример 24: Поимите: број, отсечка, правоаголник, искршена линија итн. се викаат математички поими.

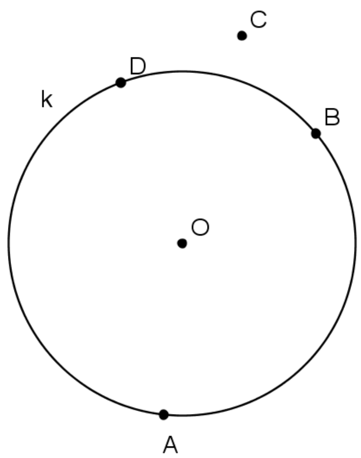
Првични (почетни) или основни поими во геометријата се точка, права, рамнина и растојание.

Поимите што не се основни се викаат изведени.

Множеството точки во рамнината коишто се на еднакво растојание од една дадена (избрана) точка се вика кружница и најчесто се означува со k. Избраната точка се вика центар на кружницата и најчесто се означува со O.

Секоја отсечка што го сврзува центарот со која било точка од кружницата се вика радиус на кружницата и најчесто се означува со r.

Пример 25:



O-центар

A и D се точки од кружницата

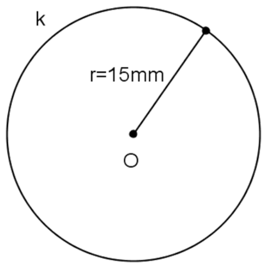
OA и OD се радиуси на кружницата

$\overline{OA} = \overline{OD} = r$

B и C не се точки од кружницата

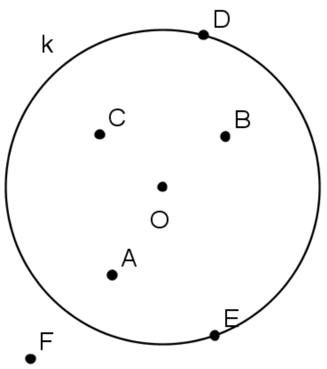
Кружница се црта со шестар ако се дадени радиусот и центарот.

Пример 26: Кружницата k со радиус $r = 15\ mm$ и центар во O е претставена со:



Кружницата ја дели рамнината на внатрешна и надворешна област.

Пример 27:



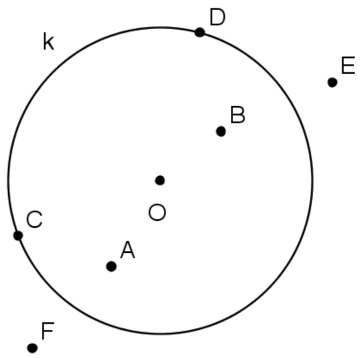
Точките A, B, C и O лежат во внатрешната област.

Точките D, E лежат на кружницата.

Точките F, G лежат во надворешната област.

Геометриската фигура составена од една кружница и нејзината внатрешна област се вика круг.

Пример 28:



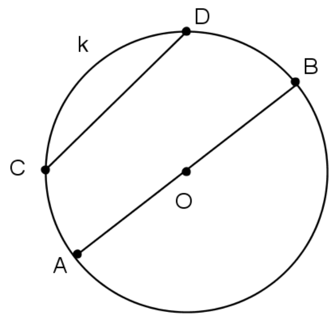
Точките A, B, O, C и D припаѓаат на кругот.

Точките E и F не припаѓаат на кругот.

Отсечка чиишто крајни точки припаѓаат на кружницата се вика тетива.

Тетивата што минува низ центарот се вика дијаметар и најчесто се означува со d. За дијаметарот и радиусот во кружницата секогаш важи $d = 2r$.

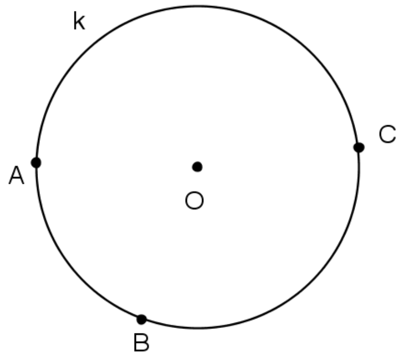
Пример 29:



CD е тетива, AD е дијаметар.

Дел (подмножество) од кружницата k заграден со две точки е вика кружен лак.

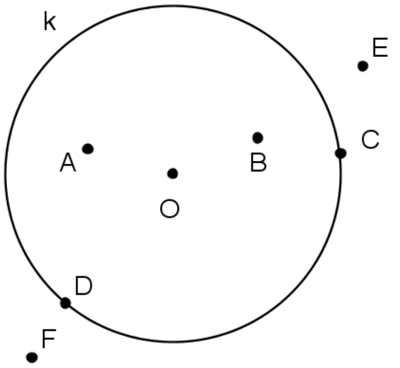
Пример 30:



Помалиот дел од кружницата k меѓу A и B е кружен лак кој се означува со $\overset{\frown}{AB}$, а поголемиот дел од кружницата k меѓу A и B е кружен лак кој се означува со $\overset{\frown}{ACB}$, при што C е некоја произволна точка. И за $\overset{\frown}{AB}$ и за $\overset{\frown}{ACB}$ точките A и B се краеви на лакот.

Една точка може да припаѓа:
а) на кружницата k б) во внатрешната област в) во надворешната област

Пример 31:



A, B, O припаѓаат на внатрешната област
C, D припаѓаат на кружницата
E, F припаѓаат на надворешната област

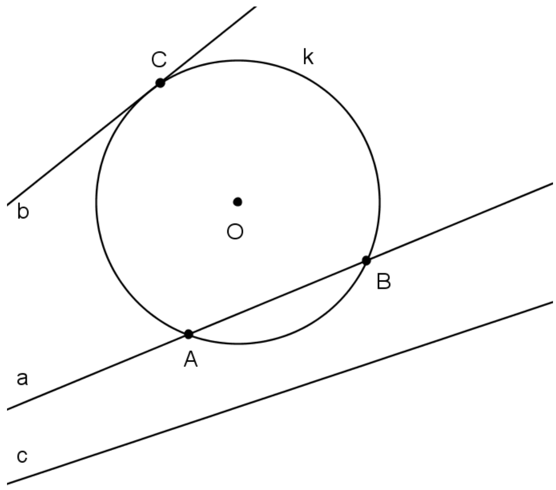
Правата p и кружницата k можат да ја имаат следната заемна положба:

а) да се сечат, односно да имаат две заеднички точки. Правата p се вика секанта или пресечка.

б) да се допираат, односно да имаат една заедничка точка. Правата p се вика тангента.

в) да не се сечат, односно да немаат ниту една заедничка точка, т.е. $p \cap k = \varnothing$.

Пример 32:



Правата a е секанта, правата b е тангента и $c \cap k = \varnothing$.

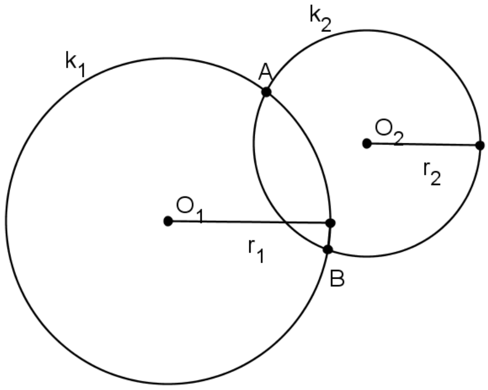
Две кружници $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ можат да ја имаат следната заемна положба:

а) да се сечат, односно да имаат две заеднички точки.

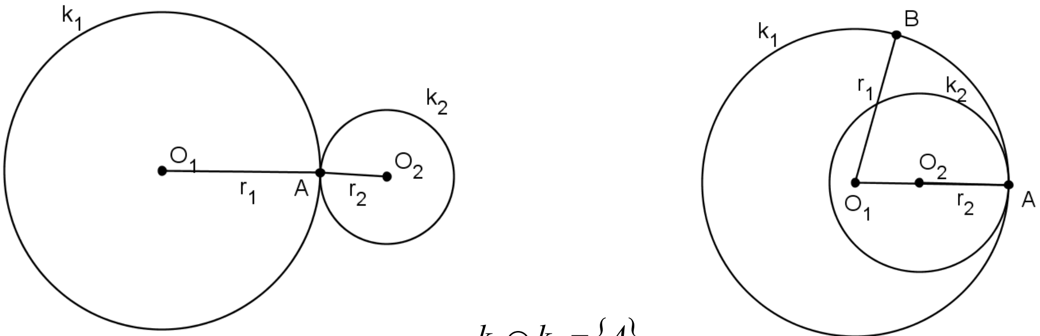
б) да се допираат, односно да имаат една заедничка точка.

в) да не се сечат или допираат, односно да немаат ниту една заедничка точка, т.е. $k_1 \cap k_2 = \varnothing$.

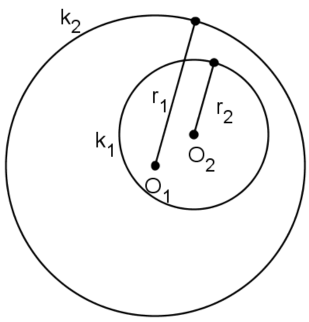
Пример 33:



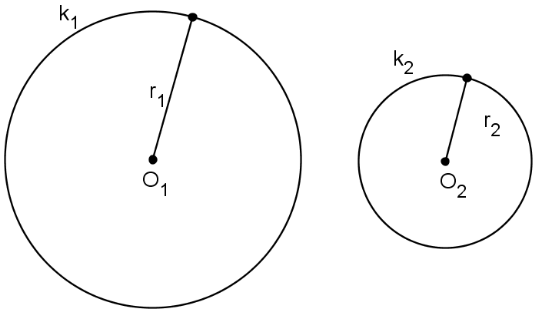
$$k_1 \cap k_2 = \{A, B\}$$



$$k_1 \cap k_2 = \{A\}$$

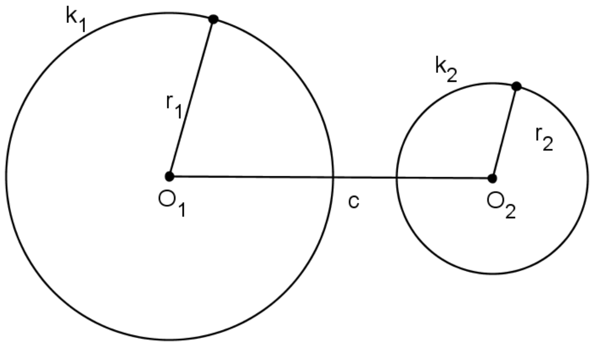


$$k_1 \cap k_2 = \varnothing$$



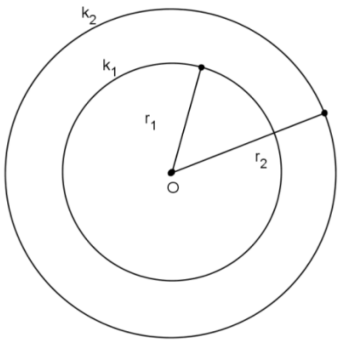
Растојанието $\overline{O_1O_2}$ меѓу центрите O_1 и O_2 на кружниците k_1 и k_2 се вика централно растојание и најчесто се означува со $c = \overline{O_1O_2}$.

Пример 34:



Две кружници со ист центар, а различни радиуси се викаат концентрични кружници.

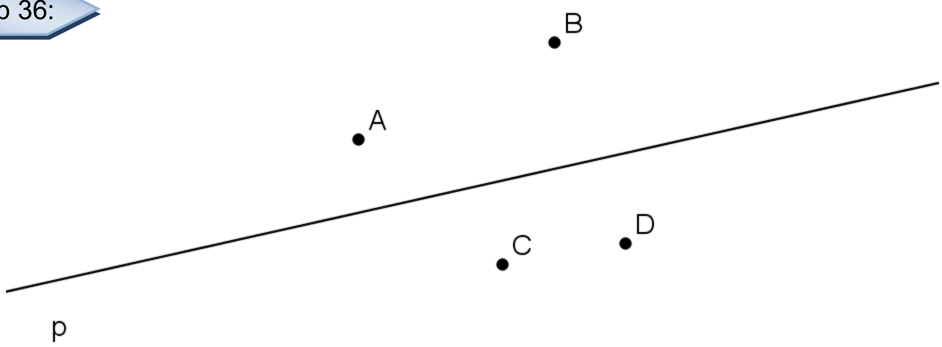
Пример 35:



$$k_1(O,r_1)\cap k_2(O,r_2)=\varnothing.$$

Со правата p рамнината се дели на два дела наречени полурамнини. Едната полурамнина е составена од правата и сите точки од едната страна на правата, а другата полурамнина е составена од правата и сите точки од другата страна на правата.

Пример 36:



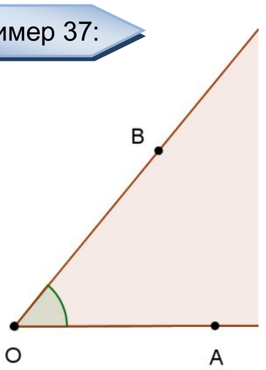
A и B се од иста страна, а B и D се од различна страна на правата p.

Првата полурамнина се состои од правата p, точките A и B и сите други точки од страната на A и B.

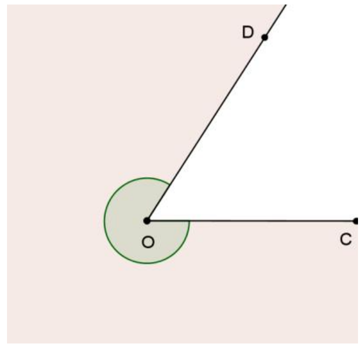
Втората полурамнина се состои од правата p, точките C и D и сите други точки од страната на C и D.

Две полуправи со заеднички почеток ја разделуваат рамнината на два дела, т.е. на две области, внатрешна и надворешна.

Пример 37:



внатрешна област

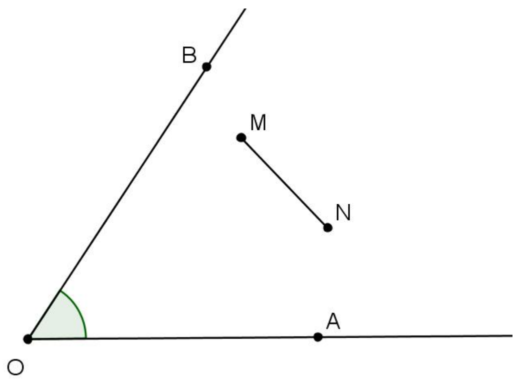


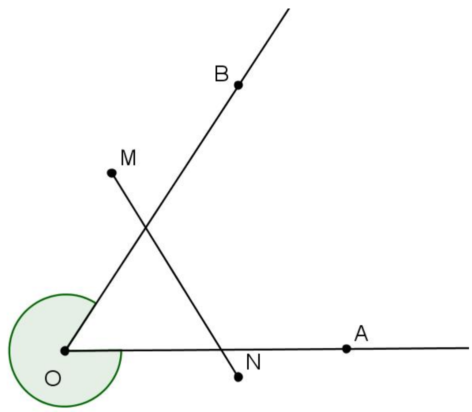
надворешна област

Две полуправи со заеднички почеток ја делат рамнината на два дела. Секој од тие два се вика агол. Полуправите се викаат краци на аголот, а заедничкиот почеток се вика теме.

За еден агол велиме дека е конвексен ако за кои било две точки M и N од неговата област сите точки од отсечката MN ѝ припаѓаат на таа област.
Аголот што не е конвексен се вика неконвексен агол.

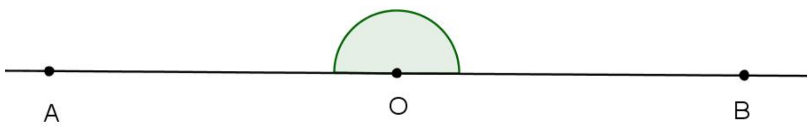
Пример 38:





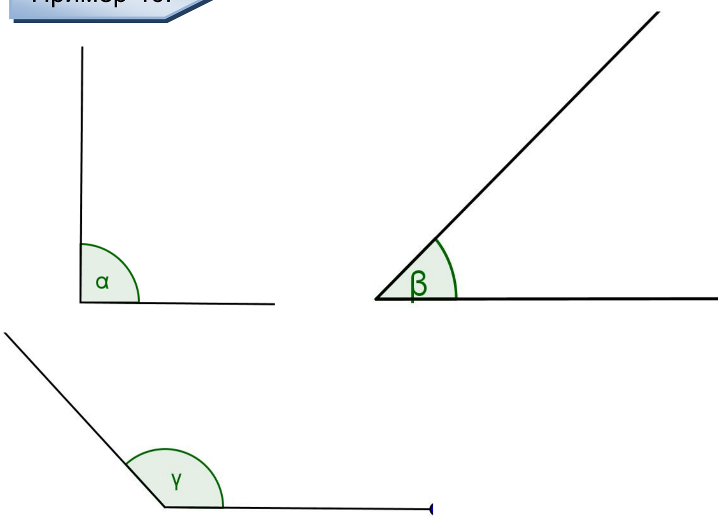
Аголот чиишто краци образуваат права се вика рамен агол.

Пример 39:



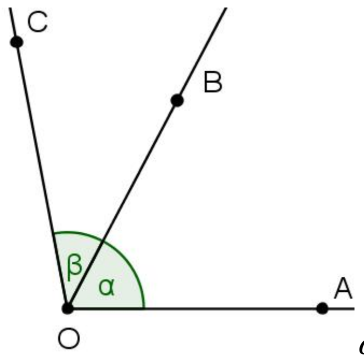
Агол којшто е половина од рамниот агол се вика прав агол.
Аголот што е помал од правиот се вика остар агол.
Аголот што е поголем од правиот, но помал од рамниот се вика тап агол.

Пример 40:



Два агли со заедничко теме и еден заеднички крак кои немаат заеднички внатрешни точки се викаат соседни агли.

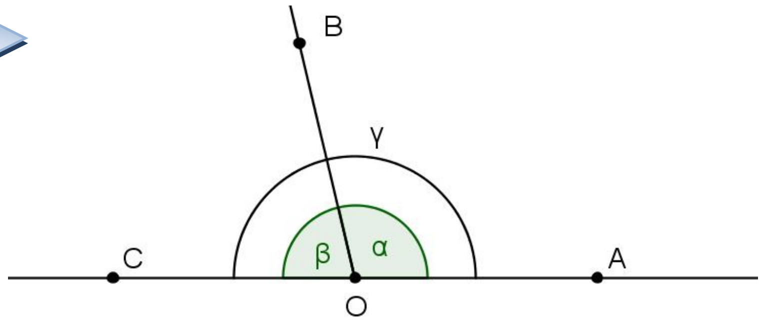
Пример 41:



α и β се соседни агли.

Два соседни агли што образуваат рамен агол се викаат напоредни агли.

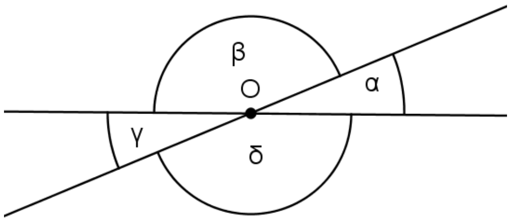
Пример 42:



α и β се напоредни агли, а γ е рамен агол.

Два агли што имаат заедничко теме, а краците на едниот се продолженија на краците од другиот агол низ темето се викаат накрсни агли.

Пример 43:

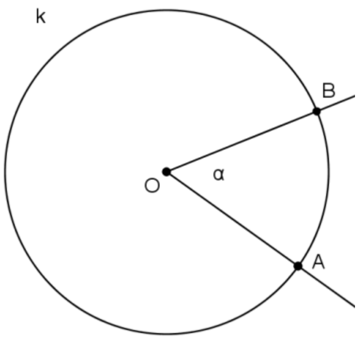


Паровите α и γ ; δ и β се накрсни агли.

- Накрсните агли се еднакви меѓу себе.

- Агол чие теме се наоѓа во центарот на кружницата се вика централен агол.

Пример 44:



$\alpha = \measuredangle AOB$

- Секој централен агол во дадена кружница определува точно еден кружен лак што лежи во тој агол и има краеви на краците.

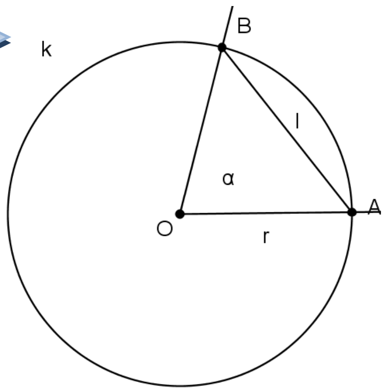
Пример 45: Во претходниот пример аголот α го определува лакот $\widehat{AB}$.

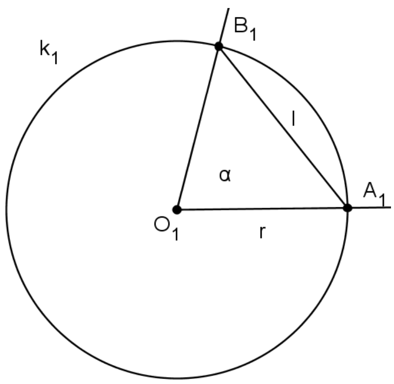
- На складни централни агли во иста кружница или во различни кружници со еднакви радиуси им одговараат складни кружни лаци.

- Можеш да конструираш агол еднаков на даден агол така што дадениот агол се зема како да е централен, т.е. се црта кружница со радиус r и со центар во темето на аголот.

Потоа се црта складна кружница заедно со централниот агол.

Пример 46:

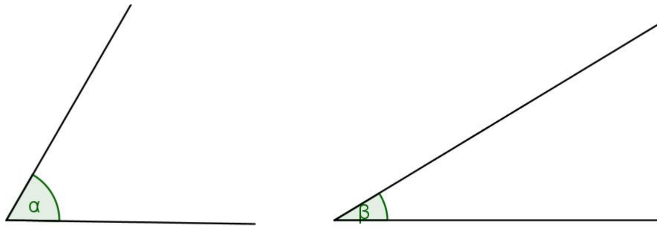


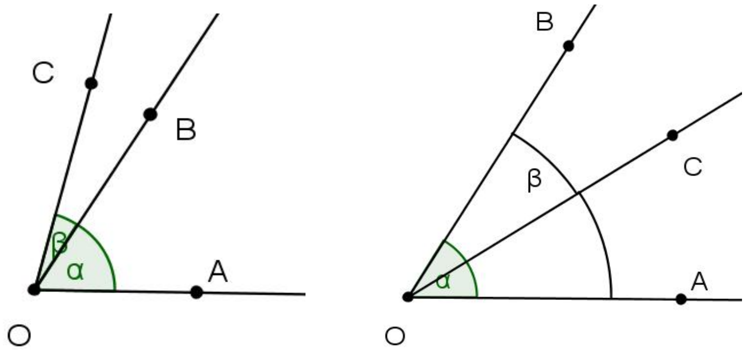


$k(O,r)$ е складна со $k_1(O_1, r_1)$, $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$ $\measuredangle AOB = \measuredangle A_1O_1B_1 = \alpha$

- Конструкцијата на еден агол еднаков на даден агол може да ја користиме во графичко собирање и одземање на агли.

Пример 47: Дадени се аглите α и β:





$\measuredangle AOC = \alpha + \beta$ $\qquad$ $\measuredangle AOC = \alpha - \beta$

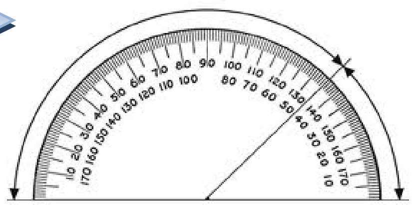
Аголот којшто е 180-ти дел од рамниот агол се зема за основна единица за мерење агли и се вика аголен степен или само степен. Се означува со 1°.

Пример 48:

1° -еден степен
2° -два степени
3° -три степени
90° -деведесет степени
105° -сто и пет степени ,итн.

Направата за мерење агли се вика агломер.

Пример 49:



$\measuredangle AOC = 45^\circ$

Помали единици од степенот за мерење се аголна минута или минута (се означува со $1'$) и аголна секунда или секунда (се означува со $1''$).

$1^\circ = 60'$; $1' = 60''$ $1^\circ = 3600''$

Правиот агол има 90°, рамниот 180° и полниот агол има 360°.

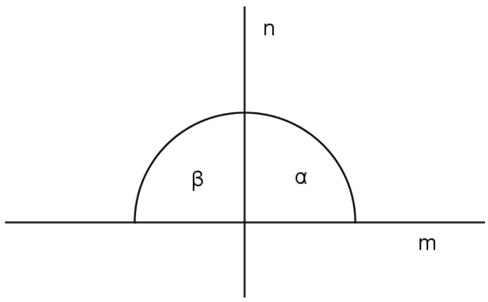
Два агли се собираат (одземаат) така што се запишуваат еден под друг степени под степени, минути под минути и секунди под секунди и се собираат (одземаат) како природни броеви. Притоа се користи дека $1^{\circ} = 60^{'}$; $1^{'} = 60^{''}$

Пример 50: $\alpha = 45^{\circ}\ 42^{'}\ 18^{''}$ $\beta = 23^{\circ}\ 17^{'}\ 7^{''}$

$$\begin{array}{r} 45^{\circ}\ 42^{'}\ 18^{''} \\ +\ 23^{\circ}\ 17^{'}\ 7^{''} \\ \hline 68^{\circ}\ 59^{'}\ 25^{''} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 45^{\circ}\ 42^{'}\ 18^{''} \\ -\ 23^{\circ}\ 17^{'}\ 7^{''} \\ \hline 22^{\circ}\ 25^{'}\ 11^{''} \end{array}$$

За две прави што се сечат и образуваат прави агли велиме дека се нормални прави.

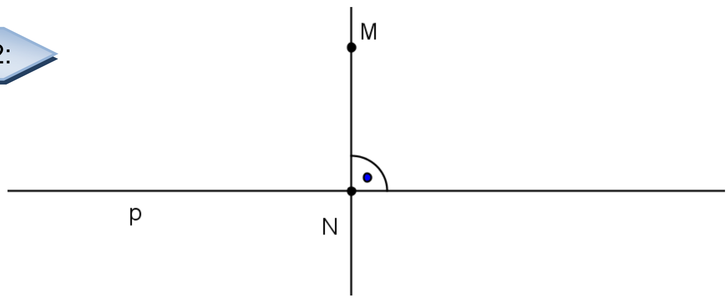
Пример 51:



α и β се прави агли, а правите m и n се нормални. Симболично се запишува $m \perp n$. Правата m е нормала на правата n и обратно.

Растојанието од точката М до правата p го мериме по нормалата повлечена низ точката М кон правата p.

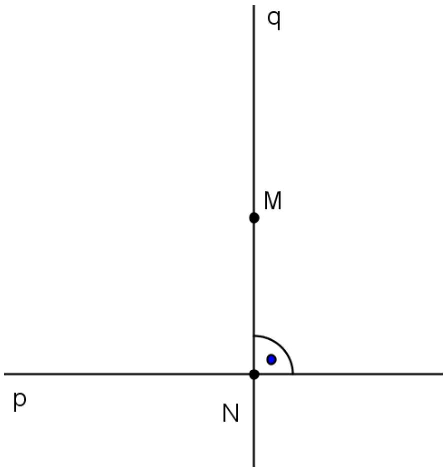
Пример 52:



MN е растојанието од точката М до правата p

Растојанието од точката М до правата p може да се одреди со триаголен линијар така што се повлекува нормала q од точката М на правата p, а потоа се мери должината на отсечката MN , каде N$= p \cap q$.

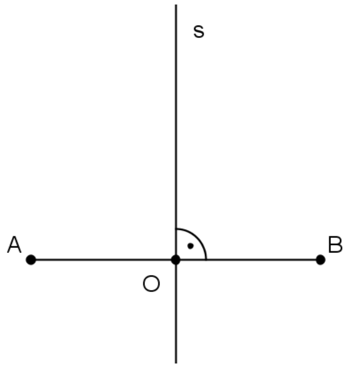
Пример 53:



Растојанието од точката М до правата p е $\overline{MN}=2\,cm$.

Правата s којашто ја преполовува отсечката AB и е нормална на неа се вика симетрала на отсечката AB.

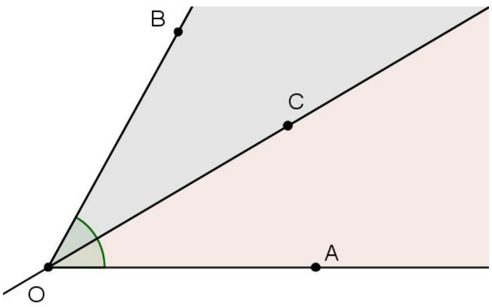
Пример 54:



O е средина на AB и $s \perp AB$.

Полуправата којашто го дели аголот на два еднакви дела се вика симетрала на аголот.

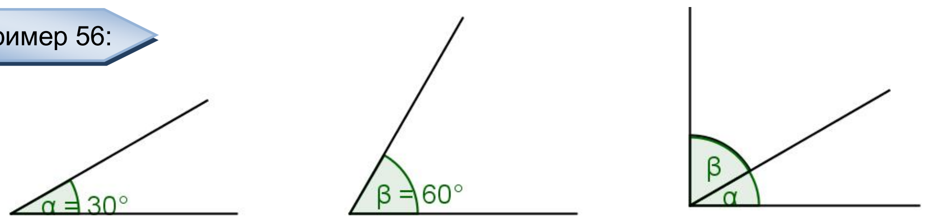
Пример 55:



Полуправата OC е симетрала на аголот AOB и $\measuredangle AOC = \measuredangle BOC$.

За два агли чиј збир е 90° се вели дека се комплементни агли.

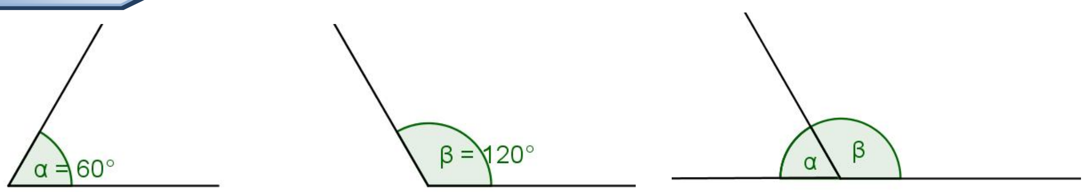
Пример 56:



α и β се комплементни агли

За два агли чиј збир е 180° се вели дека се суплементни агли.

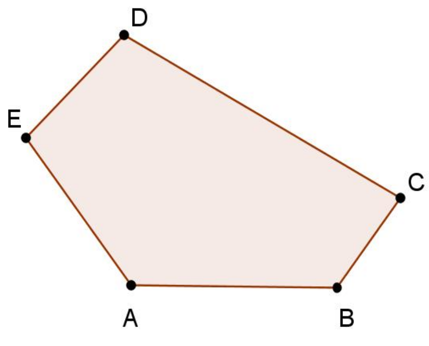
Пример 57:



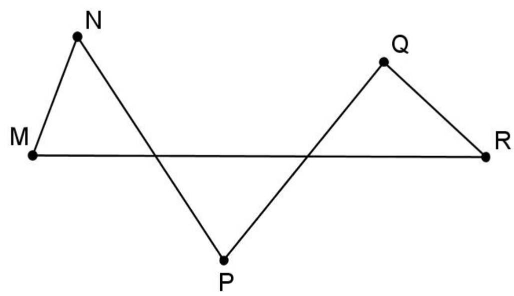
α и β се суплементни агли

Затворена искршена линија во која нема несоседни страни што се сечат се вика полигонална линија.

Пример 58:



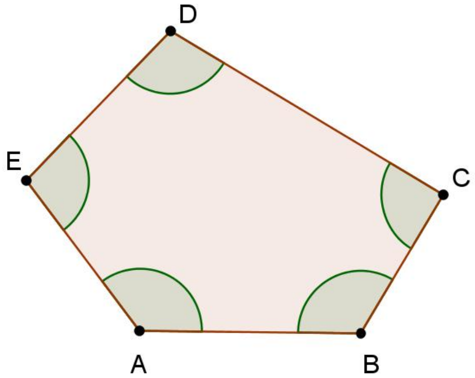
$ABCDE$ е полигонална линија



$MNPQR$ не е полигонална линија

Полигоналната линија и нејзината внатрешна област образуваат геометриска фигура којашто се вика многуаголник.

Пример 59:



$ABCDE$ е многуаголник.

Точките A, B, C, D и E се темиња.

Точките A и B се еден пар соседни темиња, точките A и C се еден пар несоседни темиња.

Отсечките AB, BC, CD, DE и EA се страни на многуаголникот.

Отсечките AB и BC се еден пар соседни страни на многуаголникот.

Отсечките AB и CD се еден пар несоседни страни на многуаголникот.

Аглите $\measuredangle A, \measuredangle B, \measuredangle C, \measuredangle D$ и $\measuredangle E$ се агли на многуаголникот.

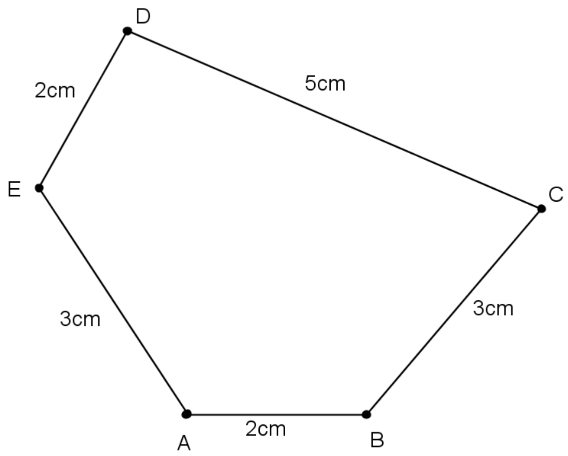
Аглите $\measuredangle A$ и $\measuredangle B$ се еден пар соседни агли.

Аглите $\measuredangle A$ и $\measuredangle$ се еден пар несоседни агли.

Многуаголник со три темиња, три страни и три агли се вика триаголник.
Многуаголник со четири темиња, четири страни и четири агли се вика четириаголник.
Многуаголник со пет темиња, пет страни и пет агли се вика петаголник итн.

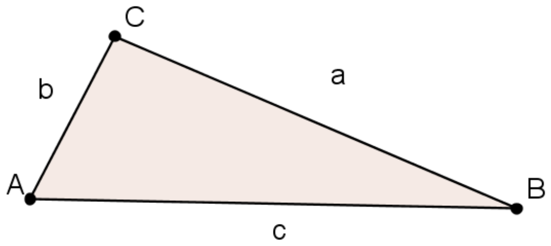
Периметарот на полигоналната линија што го формира многуаголникот се вика периметар на многуаголникот и се означува со L.

Пример 60:



$$L = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA}$$
$$L = 2\,cm + 3\,cm + 5\,cm + 2\,cm + 3\,cm$$
$$L = 15\,cm.$$

Пример 61:



$$a = 5\ cm, b = 4\ cm, c = 7\ cm$$
$$L = a + b + c$$
$$L = 5\ cm + 4\ cm + 7\ cm$$
$$L = 16\ cm$$

Ниво Б

Ученикот покажува дека разбира…

НИВО: РАЗБИРАЊЕ

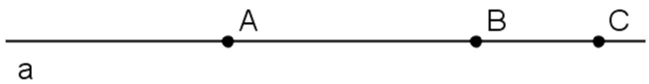
За една точка може да се каже дека или припаѓа на дадена права или не припаѓа на таа права.

Пример 1:

$A \in a; B \notin a$

Ако точките A, B и C се колинеарни и припаѓаат на правата p т.е. $A, B, C \in p$, тогаш правата p може да се означи на 6 начини.

Пример 2:



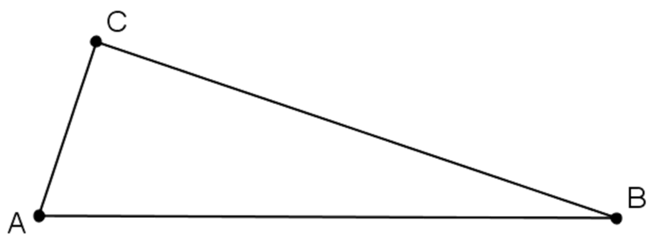
Правата p може да се означи со: AB, AC, BC, BA, CA, CB

Две прави во една рамнина може да имаат:
а) една заедничка точка (тогаш тие се сечат);
б) ниту една заедничка точка (тогаш тие се паралелни);
в) бесконечно многу заеднички точки (тогаш тие се совпаѓаат).

Пример 3: Секоја права е паралелна сама на себе.

Пример 4: Правите AB и AC се сечат, т.е. $AB \cap AC = \{A\}$.

За кои било три неколинеарни точки A, B и C важи:



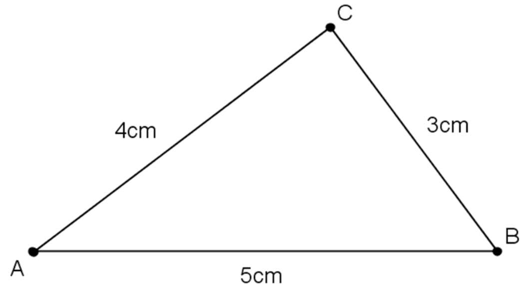
$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}$

$\overline{BC} < \overline{BA} + \overline{AC}$

$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$

Пример 5:

За страните на ΔABC важи:

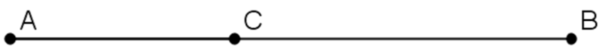


$4<5+3$
$3<5+4$
$5<4+3$

За кои било три колинеарни точки A, B и C, така што $\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}$, точката C е меѓу точките A и B.

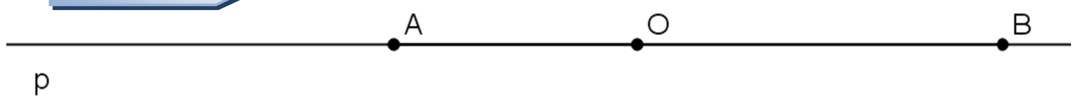
Пример 6:

Ако $\overline{AC}=2\ cm, \overline{CB}=3\ cm$ и $\overline{AB}=5\ cm$ тогаш точката C е меѓу точките A и B.



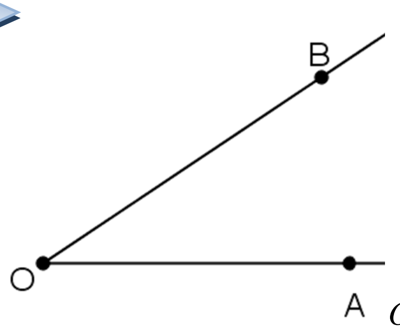
Составни полуправи се викаат полуправите што формираат права. Нивните почетни точки се совпаѓаат со граничната точка.

Пример 7:



OA и OB се составни полуправи

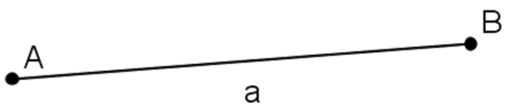
Пример 8:



OA и OB не се составни полуправи.

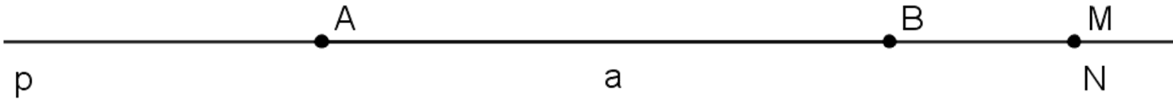
Отсечката може да се означи и со мала буква (најчесто $a, b, c, d,...$) којашто е ознака и за нејзината должина.

Пример 9:



$AB=a$; $BA=a$ и $\overline{AB}=a$; $\overline{BA}=a$

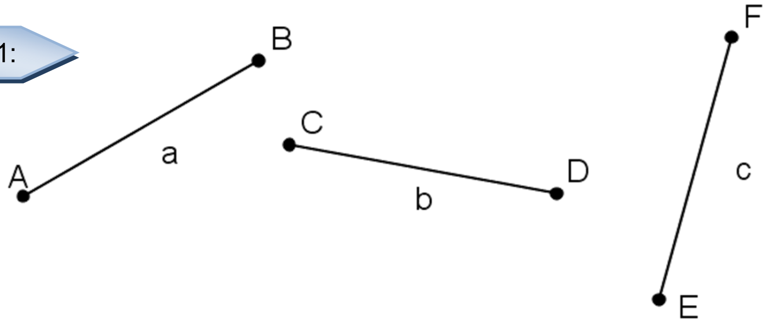
Пример 10:



Должината на отсечката AB е $\overline{AB}=a$, должината на отсечката MN е $\overline{MN}=0$.

Две и повеќе отсечки се еднакви или складни ако истите можат со движење да се совпаднат. Тогаш и само тогаш тие имаат еднакви должини.

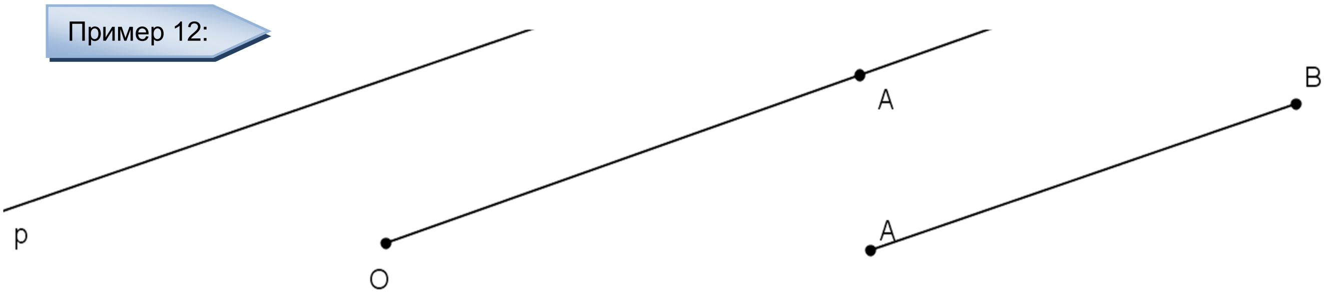
Пример 11:



Отсечките AB, CD и EF може да се совпаднат бидејќи $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{EF}$.

Множеството точки (права, полуправа, отсечка,...) се вика геометриска фигура.

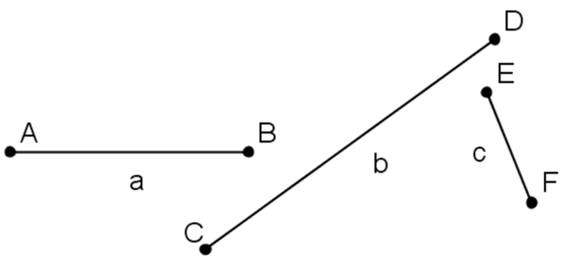
Пример 12:

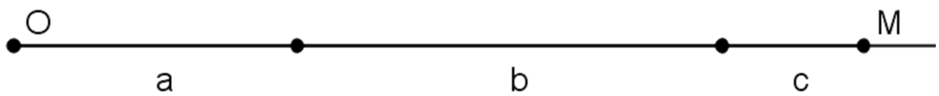


Правата p, полуравата OA и отсечката AB се примери за геометриски фигури.

Графичкото пренесување на отсечки на една полуправа така што од крајот на првата отсечка се нанесува должината на втората отсечка, потоа на крајот од втората се нанесува третата итн., се вика надоврзување на отсечки.

Пример 13:



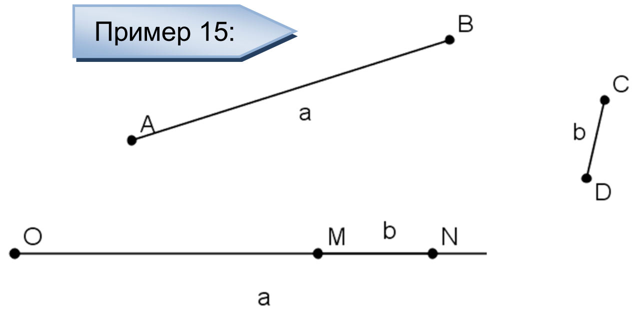


Должината на отсечката добиена со надоврзување на две или повеќе отсечки се вика графички збир.

Пример 14: Должината на отсечката OM од претходниот пример е збир на отсечките a, b и c и пишуваме: $\overline{OM} = a + b + c.$

Разлика на отсечките a и b , $a > b$ е должината на отсечката добиена со надоврзување на отсечката b на крајот на отсечката a кон точката O.

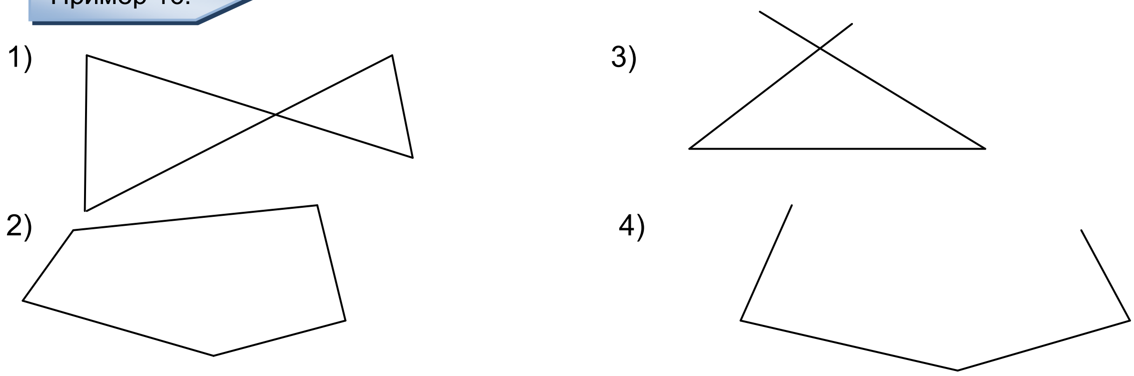
Пример 15:



$$\overline{OM} = a - b$$

Искршената линија којашто нема несоседни страни кои се сечат се вика проста искршена линија.

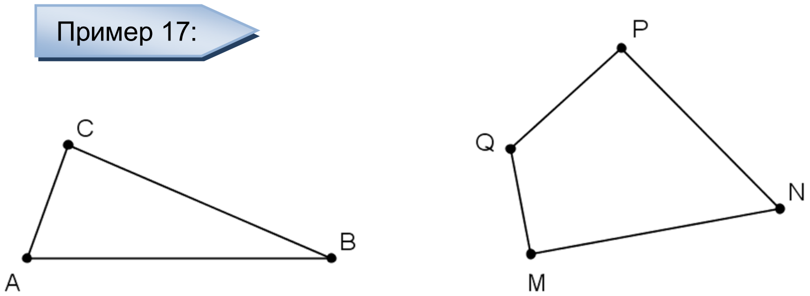
Пример 16:



Прости искршени линии се 2) и 4).

Секоја проста затворена искршена линија се вика полигонална линија.

Пример 17:



Страните на ΔABC и на четириаголникот $MNPQ$ формираат полигонални линии, т.е. проста затворена искршена линија.

Основните поими не се дефинираат со други поими, туку само се објаснуваат.

Пример 18: Поимот права се објаснува како непрекинато множество од колинеарни точки кое не е ограничено од двете страни.

Поимите коишто се дефинираат преку основните поими се викаат изведени поими.

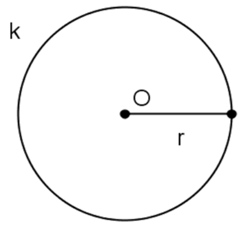
Пример 19: Поимот отсечка, искршена линија, периметар итн. се изведени поими.

Пример 20: Дефиниција за отсечка:
Множеството точки од една права што ги содржи точките А и В (со ознака АВ или ВА) и сите точки меѓу нив се вика отсечка.

Една кружница е наполно определена ако се дадени нејзиниот центар и радиус.

Кружницата k со центар O и радиус r се означува со $k(O,r)$.

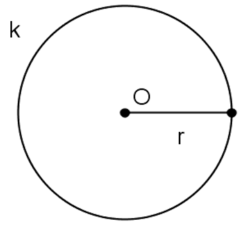
Пример 21:



$k(O,2\,cm)$ е кружница со центар O и радиус $2\,cm$

Центарот и радиусот на кружницата $k(O,r)$ се викаат центар и радиус и на кругот $K(O,r)$.

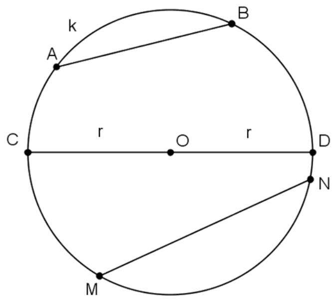
Пример 22:



O - центар на кружницата $k(O,r)$
r - радиус на кружницата $k(O,r)$
O - центар на кругот $K(O,r)$
r - центар на кругот $K(O,r)$
$O \in K(O,r)$; $O \notin k(O,r)$

Секоја најдолга тетива во кружницата се вика дијаметар.

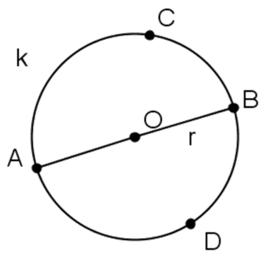
Пример 23:



Најдолга тетива е CD и $\overline{CD}=2r$.

На секоја тетива на кружницата одговараат два кружни лаци чии краеви се краеви на тетивата. Ако тетивата е дијаметар тогаш кружните лаци се еднакви и секој од нив се вика полукружница.

Пример 24:

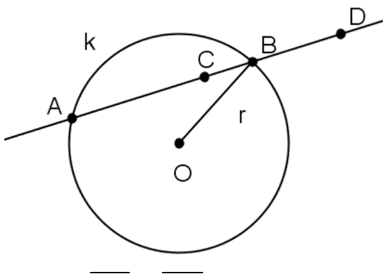


Кружнните лаци $\widehat{ACB}$ и $\widehat{ADB}$ се еднакви и се полукружници,бидејќи AB е дијаметар.

Ако правата е секанта на кружницата тогаш постојат точки од правата што се на растојание до центарот на кружницата:

-поголемо од радиусот (бесконечно многу точки);
-помало од радиусот (бесконечно многу точки);
-еднакво на радиусот (само две точки).

Пример 25:

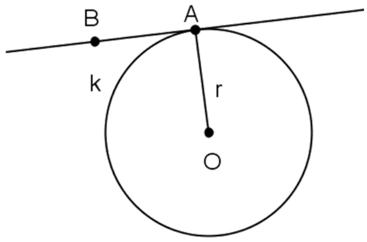


$$\overline{OA}=\overline{OB}=r$$
$$\overline{OC}<r$$
$$\overline{OD}>r$$

Ако правата е тангента на кружницата тогаш постојат точки од правата што се на растојание до центарот на кружницата:

- поголемо од радиусот (бесконечно многу точки);
- еднакво на радиусот (единствена точка).

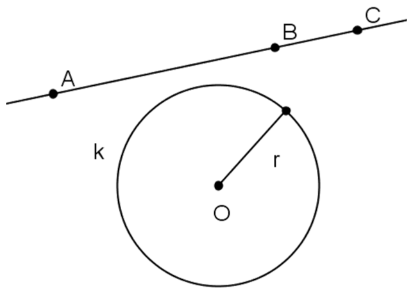
Пример 26:



$\overline{OA} = r$, $\overline{OB} > r$

Ако правата не ја сече кружницата тогаш постојат бесконечно многу точки од правата што се на растојание до центарот на кружницата поголемо од радиусот.

Пример 27:



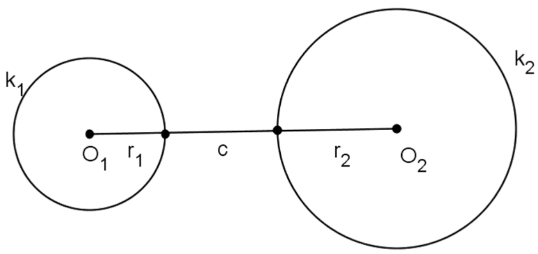
$\overline{OA} > r$, $\overline{OB} > r$, $\overline{OC} > r$

Две кружници немаат ниту една заедничка точка ако:

а) $\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$ б) $\overline{O_1O_2} < r_1 - r_2$ в) $\overline{O_1O_2} = 0$ и $r_1 \neq r_2$

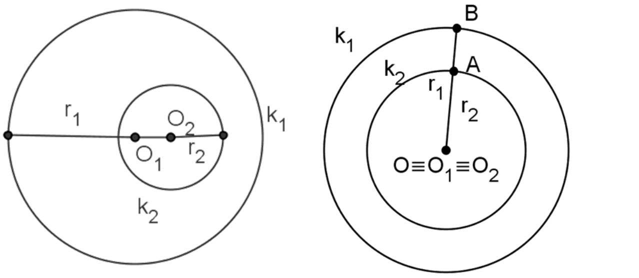
Пример 28:

а)



$\overline{O_1O_2} = c$

б) в)



$\overline{O_2A} = r_2$, $\overline{O_1B} = r_1$

$\overline{O_1O_2} = c$

$\overline{OA} = r_2$, $\overline{OB} = r_1$

$\overline{O_1O_2} = c = 0$

т.е. $O_1 \equiv O_2$

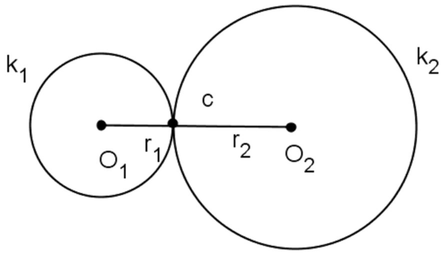
Две кружници имаат само една заедничка точка, т.е. се допираат ако:

а) $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$

б) $\overline{O_1O_2} = r_1 - r_2$, $(r_1 > r_2)$

Пример 29:

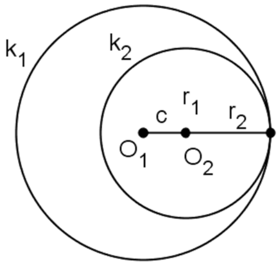
а)



$\overline{O_1O_2} = c$

се допираат однадвор

б)

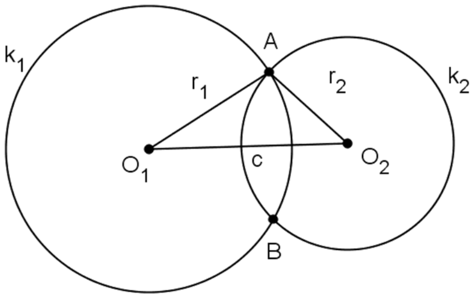


$\overline{O_1O_2} = c$

се допираат однатре

Две кружници имаат две заеднички точки, т.е. се сечат ако $\overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$

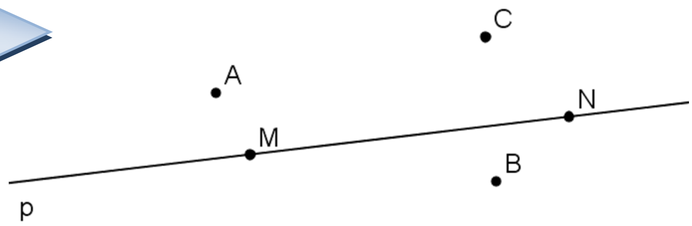
Пример 30:



$\overline{O_1O_2} = c$

Множеството од сите точки во рамнината што припаѓаат на иста страна од дадена права p заедно со точките од таа права се вика полурамнина.
Правата p се вика раб или гранична права на полурамнината.

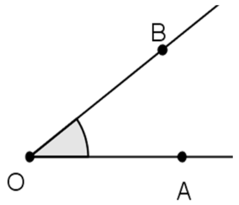
Пример 31:



Точките M и N припаѓаат на работ на полурамнината.
Точките A, B, C и уште бесконечно многу други точки од истата страна на правата, како и точките од правата p се множество точки кои ја формираат полурамнината.

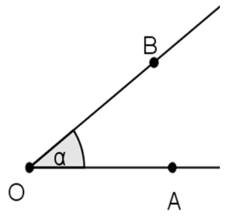
Полуправите OX и OY образуваат два агли коишто може да ги означиме:
а) со голема латинска буква со која е означено темето на аголот и симболот "∢" кој се запишува пред неа;
б) со мала буква од грчката азбука што се пишува во областа на аголот, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$;
в) со три големи букви и симболот за агол при што темето на аголот е средната буква
г)со бројка запишана во областа на аголот.

а)



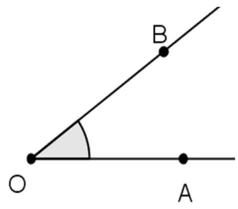
$∢O$

б)



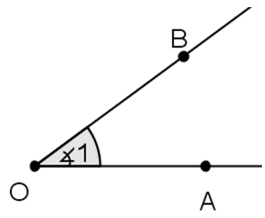
α

в)



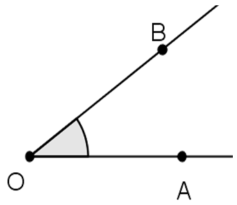
$∢AOB$

г)

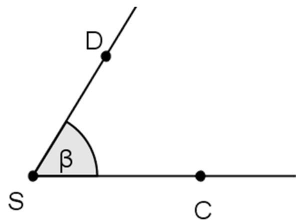


$∢1$

Нека се дадени два агли:

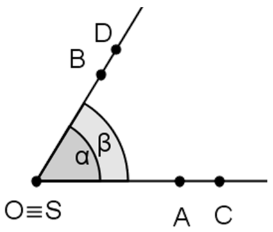


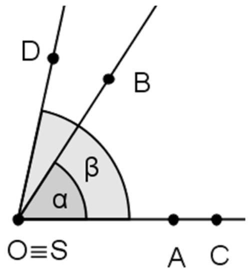
$\alpha = ∢AOB$

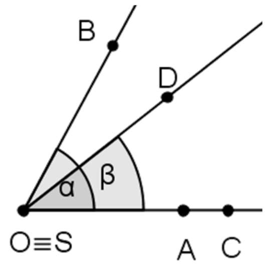


$\beta = ∢CSD$

По совпаѓање на краците OA и SC и нанесување на аглите во иста насока може да ги споредиме нивните големини.







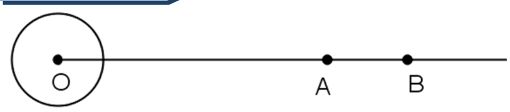
$\alpha = \beta$ бидејќи краците OB и SD се совпаѓаат

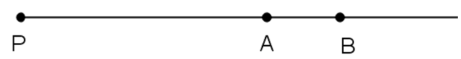
$\alpha < \beta$ бидејќи кракот OD се наоѓа во надворешната област на α

$\alpha > \beta$ бидејќи кракот OD се наоѓа во внатрешната област на α

При совпаѓање на две полуправи се добиваат два агли. Едниот агол се вика полн и е составен од полуправите и останатиот дел од рамнината. Другиот агол се вика нулти агол и е составен од полуправите, неговата област е празно множество.

Пример 32:





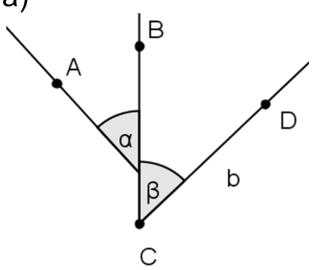
$\sphericalangle AOB$ е полн агол

$\sphericalangle NPM$ е нулти агол

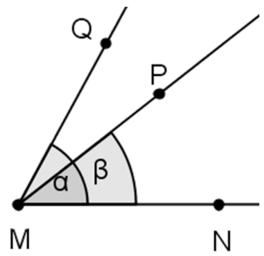
Ќе дадеме примери за несоседни агли:
а) аглите не се соседни бидејќи имаат заеднички крак, но немаат заедничко теме
б) аглите не се соседни бидејќи имаат заедничко теме и крак, но имаат и заеднички внатрешни точки.

Пример 33:

а)

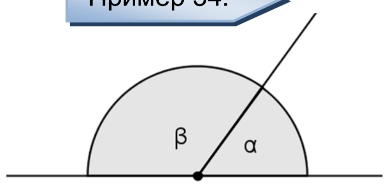


б)

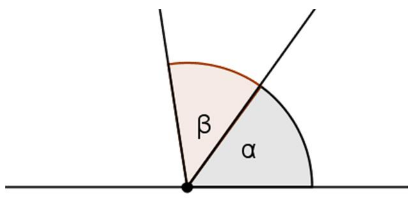


Напоредните агли се соседни, но соседните агли не секогаш напоредни.

Пример 34:

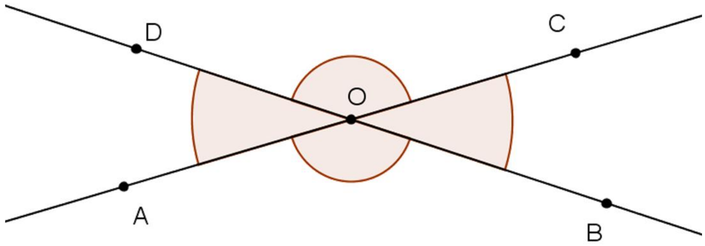


α и β се напоредни, но и соседни



α и β се соседни, но не се напоредни

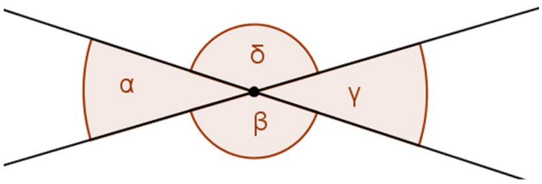
На хартија нацртај накрсни агли како на цртежот:



Со ножици исечи ги аглите и согледај дека накрсните агли се совпаѓаат, т.е. се складни, т.е. се еднакви.

Ако еден агол е остар, тогаш неговиот накрсен агол е исто остар (бидејќи се еднакви), а неговиот напореден агол е тап, бидејќи заедно формираат рамен агол.

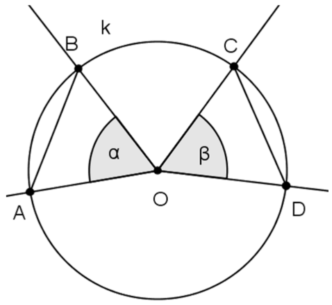
Пример 35:



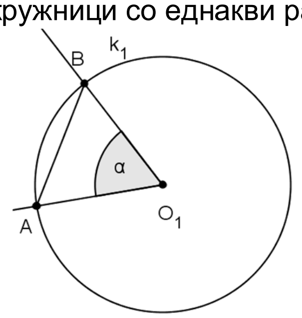
α е остар агол, а исто така и γ е остар, додека β е тап исто како и δ.

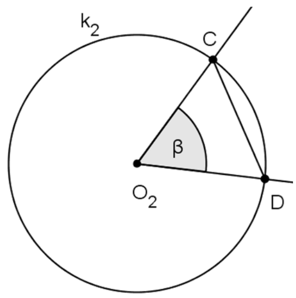
Има четири пара напоредни агли: α и β ; β и γ ; γ и δ ; δ и α и два пара накрсни агли
α и γ ; β и δ .

Нека е дадена кружница со два еднакви централни агли α и β како на цртежот:



и две кружници со еднакви радиуси:





Тогаш на аголот α соодветен лак е $\widehat{AB}$,а соодветна тетива е AB и на аголот β соодветен лак е $\widehat{CD}$,а соодветна тетива е CD.Со движење на аголот α ќе дојде до совпаѓање со аголот β (бидејќи тие се еднакви).Тогаш се совпаѓаат соодветните лаци и тетиви.

При собирањето може да се добијат збирови повеќе од $60''$ или од $60'$.
Во овој случај ги користиме врските $60'' = 1'$ и $60' = 1^\circ$и на овој начин добиваме броеви помали од 60 за минутите и секундите.

Пример 36: Нека $\alpha = 27^\circ 37' 57''$, $\beta = 13^\circ 40' 28''$.Да се најде $\alpha + \beta$.

$$\begin{array}{r} 27^\circ 37' 57'' \\ +\ 13^\circ 40' 28'' \\ \hline 40^\circ 77' \cancel{85}'' \\ 40^\circ \cancel{78}' 25'' \\ \mathbf{41^\circ 18' 25''} \end{array}$$

$$85'' = 60'' + 25'' = 1' + 25''$$
$$78' = 60' + 18' = 1^\circ + 18'$$

Значи, $\alpha + \beta = 41^\circ 18' 25''$.

При одземањето на агли може да се случи да дојде до одземање на поголем од помал број. Во овој случај земаме 1° или $1'$ и го претвораме во помала мерка и добиваме одземање кое може да го извршиме.

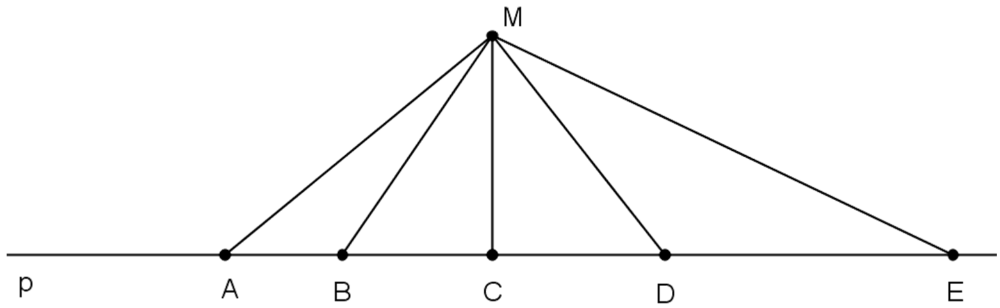
Пример 37:

Нека $\alpha = 56^\circ\ 7'12''$, $\beta = 20^\circ 38'55''$.Да се најде $\alpha - \beta$.

$$\begin{array}{r} 66' \\ 55^\circ\ \cancel{6}'72'' \\ \cancel{56}^\circ\ \cancel{7}'\cancel{12}'' \\ -\ 20^\circ 38'55'' \\ \hline \mathbf{35^\circ 28'17''} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 72'' = 1' + 12' = 60'' + 12'' \\ 66' = 1^\circ + 6' = 60' + 6' \end{array}$$

Значи, $\alpha - \beta = 35^\circ 28'17''$.

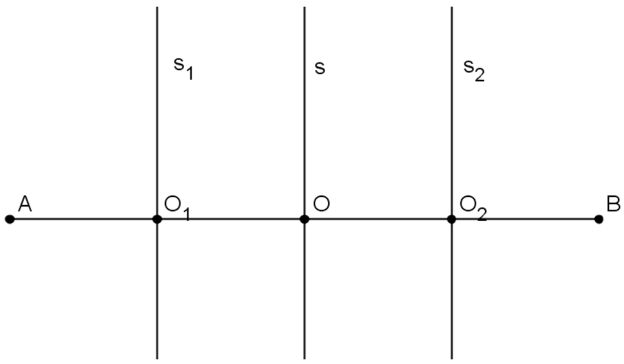
Нека се дадени правата p и точката $M \notin p$.



Од сите отсечки повлечени од точката M до правата p само една е најкуса, а тоа е отсечката MC. Значи, под растојание од точка до права го подразбираме најкусото растојание.
Нормала од точката M до правата p е правата MC.

Симетралата на отсечка овозможува поделба на отсечката на 2, 4, 8, 16, 32,... итн. еднакви делови.

Пример 38:

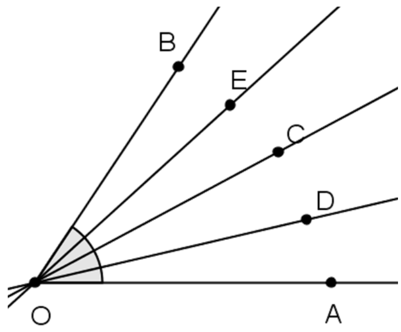


- Со s отсечката AB е поделена на две еднакви отсечки $\overline{OA} = \overline{OB}$.
- Со s_1 и s_2 отсечките OA и OB се поделени на еднакви отсечки $\overline{O_1A} = \overline{O_1O}$ и $\overline{O_2O} = \overline{O_{21}B}$

Со тоа, отсечката AB е поделена на 4 еднакви делови.

Симетралата на агол овозможува поделба на аголот на 2 ,4, 8, 16, 32,... итн. еднакви делови.

Пример 39:

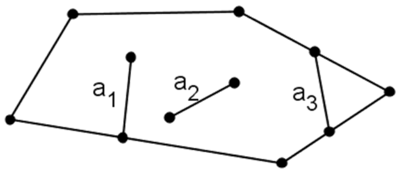


- OC е симетрала на аголот $\measuredangle AOB$ и $\measuredangle AOC = \measuredangle BOC$
- OD и OE е соодветно симетрала на аглите $\measuredangle AOC$ и $\measuredangle BOC$ и важи $\measuredangle AOD = \measuredangle COD$ и $\measuredangle COE = \measuredangle BOE$

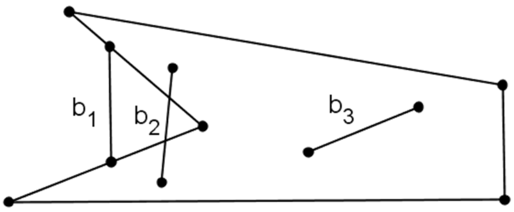
Со тоа,аголот $\measuredangle AOB$ е поделен на 4 еднакви делови.

Нека се дадени два многуаголника како на цртежот:

а)



б)



Многуаголникот под а) е конвексен, бидејќи сите точки на отсечките чиишто крајни точки лежат на многуаголникот се точки од тој многуаголник.
Многуаголникот под б) е неконвексен, бидејќи некои точки од отсечките чиишто крајни точки лежат на многуаголникот не му припаѓаат на многуаголникот.

Отсега па натаму под многуаголник ќе подразбираме конвексен многуаголник.

Нека е даден разностран триаголник и нека се дадени периметарот и две страни. Тогаш може да се одреди непознатата страна на триаголникот.

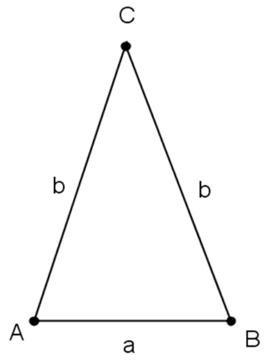
Ако се дадени a, b и $L,$ тогаш непознатата страна c ќе се одреди на следниот начин:

$$c = L - (a + b)$$

Пример 40: Нека $a = 5\ cm, b = 12\ cm, L = 30\ cm$.

За c добиваме: $c = 30 - (5 + 12) = 30 - 17 = 13\ cm$.

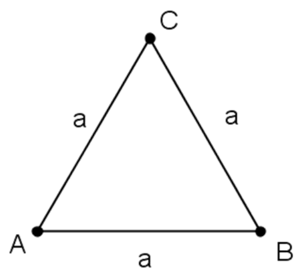
Нека е даден рамнокрак ΔABC со основа $\overline{AB} = a$ и краци $\overline{BC} = \overline{AC} = b$ како на цртежот:



Тогаш, $L = a + 2b$, $a = L - 2b$, $b = (L - a) : 2$

Пример 41: Нека $a = 5\ cm$, $L = 19\ cm$.За b добиваме:
$b = (L - a) : 2 = (19 - 5) : 2 = 7cm$

Нека е даден рамностран ΔABC со страни $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = a$ како на цртежот:



Тогаш, $L = 3a$, $a = L : 3$

Пример 42: Нека $L = 18\ cm$. За a добиваме: $a = L : 3 = 18 : 3 = 6\ cm$.

ЗАДАЧИ ОД НИВО **А** И НИВО **Б**

Со користење на задачите подолу, наставникот може да направи проверка на знаењата на ученикот кои се на ниво на познавање и на ниво на разбирање. Задачите може да ги користат учениците за самооценување, а и родителите може да го проверат нивото на стекнатите знаења.

1. Нацртај права и означи ја со a, потоа означи точки A, B, C и D така што $A, B \in a$ $C, D \notin a$.
2. На правата p означи две точки A и B кои се совпаѓаат.

3. Нека $p = AB$ и $q = MN$. Ако $A \equiv M$ и $B \equiv N$ дали тогаш $p \equiv q$ и дали точките A, B и M се колинеарни?

4. Колку прави минуваат низ дадена точка M ?

5. Одреди го заемниот однос на права и точка.

6. Означи три точки A, B и C така што тие да бидат колинеарни и три точки M, N и P така што тие да се неколинеарни.

7. Нацртај две прави кои:

а) се сечат, т.е. $a \cap b = \{M\}$ б) се паралелни, т.е. $m \parallel n$ в) се совпаѓаат, т.е. $p \equiv q$

8. Нацртај права a и потоа нацртај права $b \parallel a$. Означи точка $M \in a$ така што $M \in c$ и $a \cap c = \{M\}$. Во каков однос се правите b и c?

9. Што подразвираш под растојание меѓу две точки?

10. Ако A и B се кои било две точки, тогаш дали $\overline{AB} = \overline{BA}$?

11. За кои било три точки A, B и C важи:

а) $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ б) $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ в) $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$ г) $\overline{AC} \geq \overline{AB} + \overline{BC}$

12. Дадени се две различни точки A и B на меѓусебно растојание од $5\ cm$. Означи ја отсечката што ја формираат точките A и B на два начини:

а) со две големи букви; б) со една мала буква.

Означи ја должината на отсечката:

а) со две големи букви; б) со една мала буква.

13. Нацртај отсечка AB и означи ја средната точка со M.

14. Дадена е отсечката AB. Нацртај отсечка MN складна со AB. Притоа запиши што важи.

15. Нацртај две отсечки $a=4cm$ и $b=3cm$,а потоа конструирај ги отсечките $a+b$ и $a-b$.

16. Нацртај искршена линија со страни AB, BC и CD и измери ги нивните должини.Потоа одреди го периметарот на искршената линија.

17 .Нацртај кружница $k(O,r)$ со радиус $r=3cm$,а потоа означи радиус OM ,тетива AB и дијаметар AC.

18. Нацртај круг $K(O,r)$ со радиус $r=2cm$ и означи точки $A,B\in K$ и $C,D\notin K$.

19. Нацртај кружница $k(O,r)$ со радиус $r=2\ cm$ и претстави ја:
   а) заемната положба на точка и кружница;
   б) заемната положба на права и кружница.

20. Кружниците $k_1(O_1,3\ cm)$ и $k_2(O_2,2\ cm)$ нацртај ги:
   а) да се сечат;
   б) да се допираат однадвор;
   в) да се допираат однатре;
   г) да се концентрични
   д) $k_1\cap k_2=\varnothing$.

21. Нацртај конвексен агол, означи го и именувај го со:
   а) три големи букви;
   б) една голема буква;
   в) мала грчка буква;
   г) број.

22. Нацртај, означи и именувај:

а) прав агол;	г) остар агол;
б) рамен агол;	д) тап агол;
в) полн агол;	ѓ) нулти агол.

   Спореди ги аглите.

23. Нацртај две пресечни прави p и q и аглите што се добиваат со пресекот означи ги со α,β,γ и δ . Напиши ги паровите:
   а) соседни агли;
   б) напоредни агли;
   в) накрсни агли.

24. Нацртај кружница $k(O,2\ cm)$ и потоа:
   а) нацртај остар агол $\measuredangle AOB$;
   б) нацртај складен агол $\measuredangle MON$ на $\measuredangle AOB$.
   Какви се лаците $\widehat{AB}$ и $\widehat{MN}$, а какви тетивите AB и MN?

25. Нацртај два различни остри агли $\alpha>\beta$, а потоа конструирај го нивниот збир $\alpha+\beta$ и нивната разлика $\alpha-\beta$.

26. Нацртај еден остар и еден тап агол,а потоа измери ги со агломер. Нацртај и агли од 40° и 130°.

27. Одреди ги збирот и разликата на аглите $\alpha = 73^\circ\ 27^{'}\ 38^{''}$, $\beta = 19^\circ\ 42^{'}\ 35^{''}$.

28. Нацртај права p и означи точка $M \notin p$. Измери го и запиши го растојанието во mm од точката M до правата p.

29. Конструирај ја симетралата на отсечката AB со должина $\overline{AB} = 5\ cm$. Што претставува симетрала на отсечка?

30. Конструирај ја симетралата на остриот агол $\measuredangle AOB$. Што претставува симетрала на агол?

31. Пресметај го комплементниот агол β на аголот $\alpha = 38^\circ$.

32. Пресметај го суплементниот агол β на аголот $\alpha = 78^\circ$.

33. Нацртај многуаголник со пет темиња и означи ги:
а) темињата со големи букви;
б) страните со мали букви;
в) аглите со мали грчки букви.

34. Пресметај го периметарот на триаголникот со страни $a = 10\ cm, b = 6\ cm$ и $c = 8\ cm$.

Ниво В

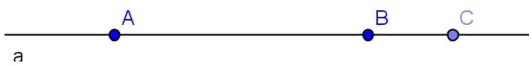
Ученикот треба да го примени своето знаење и разбирање

НИВО: ПРИМЕНА

Со примена на првото и второто основно својство може да го најдеме бројот на прави определени со неколку точки.

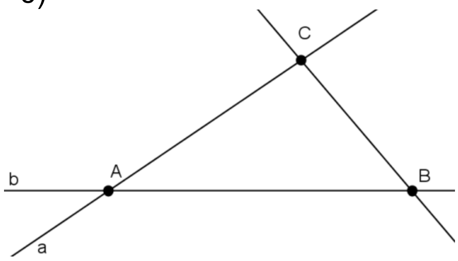
Пример 1: Три точки определуваат:
а) една права б) три прави

а)



точките се колинеарни

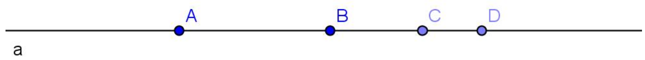
б)



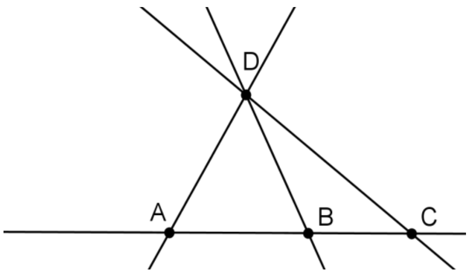
точките се неколинеарни

Пример 2: Четири точки определуваат:
а) една права;
б) четири прави;
в) шест прави.

а)



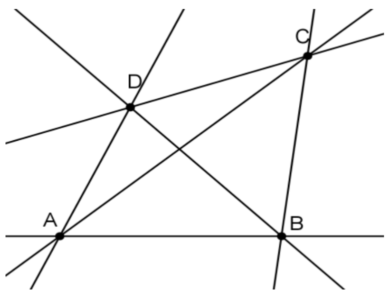
б)



точките се колинеарни

три точки се колинеарни

в)



кои било три точки се неколинеарни

Во врска со заемната положба на две прави ги разгледуваме следните задачи:

Пример 3: Нека се дадени правите m, n и p такви што $m \parallel n$ и $n \parallel p$. Каква е положбата на правите m и p?

Решение: Правите m и p се паралелни т.е. $m \parallel p$.

Пример 4: Ако правата a ја сече правата c и правата b ја сече правата c, дали мора правата b да ја сече правата a?

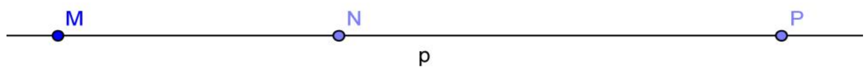
Решение: Не мора.Може $b \parallel a$.

Нека A, B и C се три точки за кои важи $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$, тогаш точките се колинеарни и точката B е меѓу точките A и C.

Пример 5: Ако $\overline{AB}=30\ mm$, $\overline{BC}=12\ mm$ и $\overline{AC}=42\ mm$ точките A, B и C припаѓаат на иста права и B е меѓу точките A и C.

Пример 6: Дадена е правата p и точките M, N и P така што точката N е меѓу точките M и P и за $2\,cm$ поблиску до M..Одреди го растојанието $\overline{MN}$ и $\overline{NP}$, ако $\overline{MP}=16\,cm$.

Решение:



$(16-2):2=7$

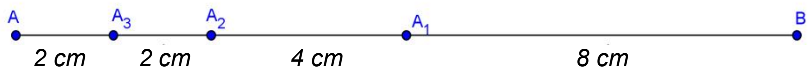
Значи, $\overline{MN}=7\ cm$; $\overline{NP}=9\ cm$.

Пример 7: На правата p означени се три точки A, B и C. Колку отсечки определуваат тие три точки? Именувај ги тие отсечки.

Решение: Точките A, B и C определуваат три отсечки AB, AC и BC. Секоја од тие отсечки има две именувања: AB и BA , BC и CB , AC и CA .

Пример 8: Точката A_1 е средина на отсечката AB со должина $16\,cm$, точката A_2 е средина на отсечката AA_1 и точката A_3 е средина на отсечката AA_2.

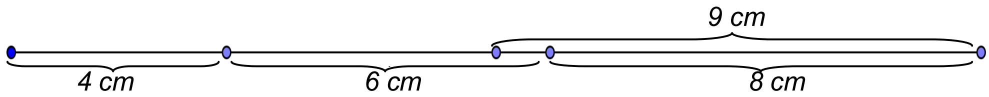
Одреди ја должината на отсечките AA_3 и A_1A_3.



Според цртежот $\overline{AA_3}=2\ cm$; $\overline{A_1A_3}=6\ cm$.

Нека се дадени збировите на секои две од три отсечки: $a+b, a+c$ и $b+c$. Тогаш збирот $a+b+c$ може да се одреди графички.

Пример 9: $a+b=4\ cm, a+b=6\ cm$ и $b+c=8\ cm$ и $a+b+c=(4+6+8):2=9\ cm.$



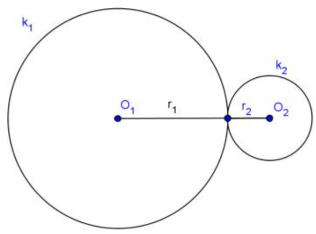
Пример 10: Пресметај го периметарот на искршената линија со страни $a=10\ cm, b=9\ cm$ и $c=30\ mm.$

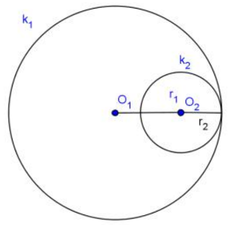
Решение: $L=a+b+c=10+8+3=21\,cm$ или $L=a+b+c=100+80+30=210\,mm.$

Заемната положба на две кружници $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$ може да ја искажеме преку централното растојание и радиусите:

1) Кружниците се допираат :

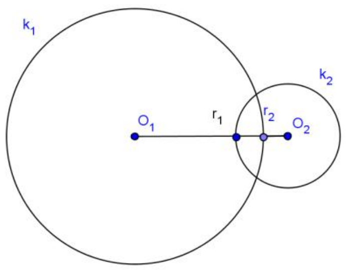
а) однадвор $\overline{O_1O_2}=r_1+r_2$ или б) однатре $\overline{O_1O_2}=r_1-r_2$

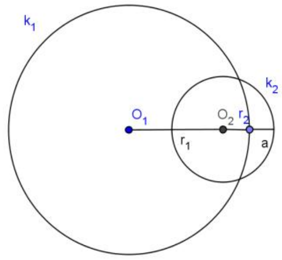




2) Кружниците се сечат :

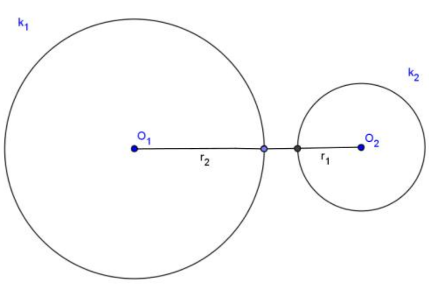
$\overline{O_1O_2}<r_1+r_2$ и $\overline{O_1O_2}>|r_1-r_2|$

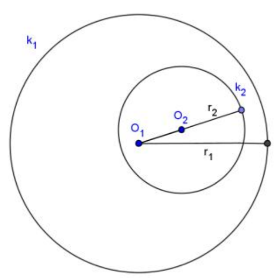




3) Пресекот на кружниците е празно множество:

а) $\overline{O_1O_2}>r_1+r_2$ или б) $\overline{O_1O_2}<|r_1-r_2|$



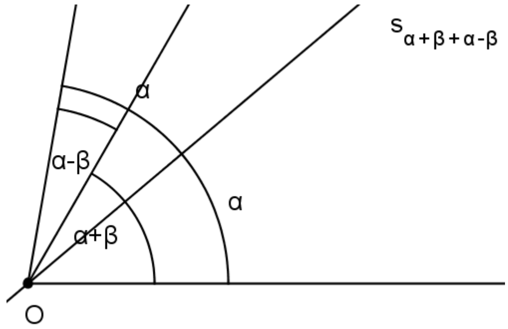


Графичкото собирање и одземање на агли, конструкцијата на симетралата на агол, симетралата на отсечка слично како и кај графичкото собирање и одземање на отсечки може да се користи кај група задачи дадени со збирот и разликата на два броја.

Нека $\begin{cases} \alpha+\beta=a^\circ \\ \alpha-\beta=b^\circ \end{cases}$ каде што α и β се непознати, а a и b познати величини.

На збирот $\alpha+\beta$ се надоврзува разликата $\alpha-\beta$, па се добива аголот 2α. Со конструкција на симетрала на аголот 2α се добива аголот α.

На збирот $\alpha+\beta$ се надоврзува $-(\alpha-\beta)$, па се добива аголот 2β. Со конструкција на симетрала на аголот 2β се добива аголот β.



Пример 11: Збирот од годините на Јован и на Имер е 18 години, а разликата на нивните години е 2 години. Колку години има Јован, а колку години има Имер?

Воочи го решението:

Нека 1г=1°

$\begin{cases} \alpha+\beta=18^\circ \\ \alpha-\beta=2^\circ \end{cases} \Rightarrow \alpha=(18^\circ+2^\circ):2=10^\circ$ и $\beta=(18^\circ-2^\circ):2=8^\circ$

Јован има 10 години, а Имер 8 години.

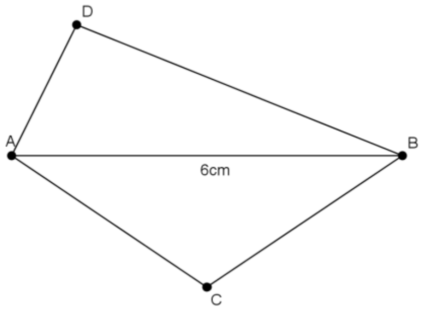
Пример 12: Нека α е остар агол и нека β_1 е негов комплементен агол, а β_2 е негов сумплементен агол и нека $\alpha+\beta_1+\beta_2=240^\circ$. Одреди ги аглите.

Решение: Од $\alpha+\beta_1=90^\circ$ имаме $90^\circ+\beta_2=240^\circ$ т.е. $\beta_2=150^\circ$

Од $\alpha+\beta_2=180^\circ$ имаме $90^\circ+\beta_2=240^\circ$ т.е. $\beta_1=60^\circ$. Значи $\alpha=30^\circ$.

Пример 13: Нека периметрите на ΔABC и ΔABD се $20\,cm$ и $30\,cm$ со заедничка страна $\overline{AB}=6\,cm$. Одреди го периметарот на четириаголникот $ABCD$.

Решение:



$L_{\Delta ABCD}=L_{\Delta ABC}+L_{\Delta ABD}-2\overline{AB}=30+20-12=38\,cm$

Ниво Г

Ученикот треба да користи логичко следство

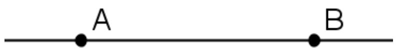
НИВО: АНАЛИЗА ,СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ

Нека A и B се две различни точки. Според второто основно својство постои точно една права AB што минува низ тие точки. Значи, точките A и B се колинеарни, т.е. кои било две точки се секогаш колинеарни.

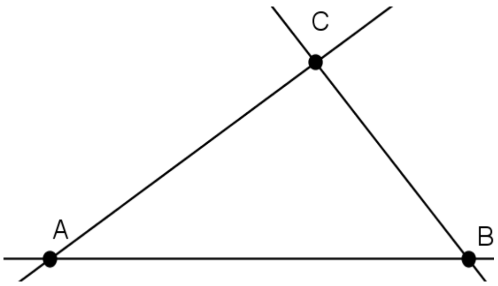
Нека A е произволна точка и нека $B_1, B_2, B_3,...$ се бесконечно многу други точки кои лежат на права која минува низ A. Според второто основно својство постојат правите $AB_1, AB_2, AB_3,...$ кои ги има бесконечно многу. Значи низ точката A поминуваат бесконечно многу прави.

Нека се дадени n точки од кои било кои три од нив се неколинеарни. Според второто основно својство секои две точки од нив определуваат права која се означува (именува) на два начини.

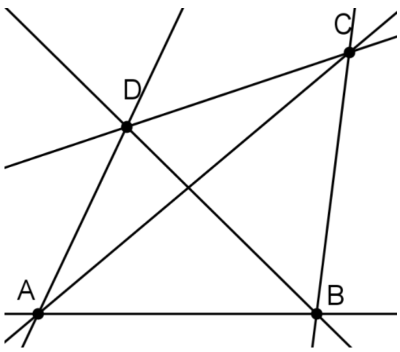
- Две точки определуваат една права која се именува со AB или BA.



- Три точки определуваат најмногу три прави со 6 именувања AB, AC, BC, BA, CA, CB.



- Четири точки определуваат најмногу шест прави со 12 именувања.



Формираме формула:

За 2 точки има $\frac{2\cdot(2-1)}{2}=1$, т.е. 1 права и $2\cdot(2-1)$ именувања.

За 3 точки има $\frac{3\cdot(3-1)}{2}=3$, т.е. 3 прави и $3\cdot(3-1)$ именувања.

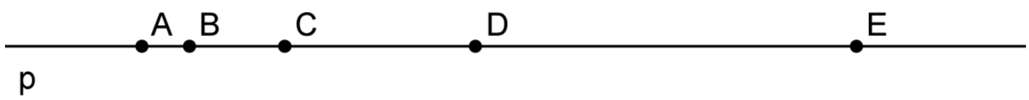
За 4 точки има $\frac{4\cdot(4-1)}{2}=6$, т.е. 6 прави и $4\cdot(4-1)$ именувања.

За n точки има $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ прави и $n\cdot(n-1)$ именувања.

Пример 1: Нека се дадени n различни точки. Тие формираат најмалку една права ако се колинеарни, а најмногу $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ прави ако кои било три се неколинеарни, но во секој случај имаат $n\cdot(n-1)$ именувања.

Пример 2: Покажи дека ако $a\parallel b$ тогаш $b\parallel a$.
Навистина, нека $a\parallel b$. Тогаш $a\cap b=\varnothing$ и добиваме $b\cap a=\varnothing$, т.е. $b\parallel a$.

Пример 3: На правата p означени се точките A,B,C,D и E како на цртежот:



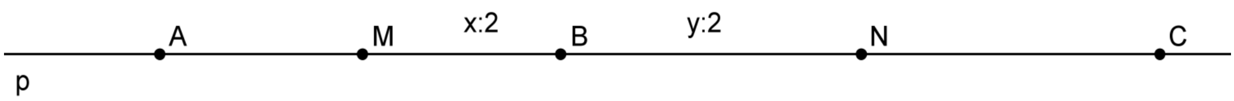
така што растојанијата $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\ \overline{DE}$ меѓу точките се последователни парни броеви.

Одреди го растојанието $\overline{CD}$ ако $\overline{AE}=36\,cm.$

Решение: $\overline{AB}=(36-(2+4+6)):4=6$, па значи $\overline{CD}=\overline{AB}+2+2=10\,cm.$

Нека должината на отсечките AB и BC се $\overline{AB}=x$ и $\overline{BC}=y$ и истите се нанесени на една права. Тогаш, покажи дека растојанието меѓу средините на отсечките изнесува $(x+y):2$.

Навистина, според скицата имаме:



од каде $\overline{MN}=x:2+y:2$.

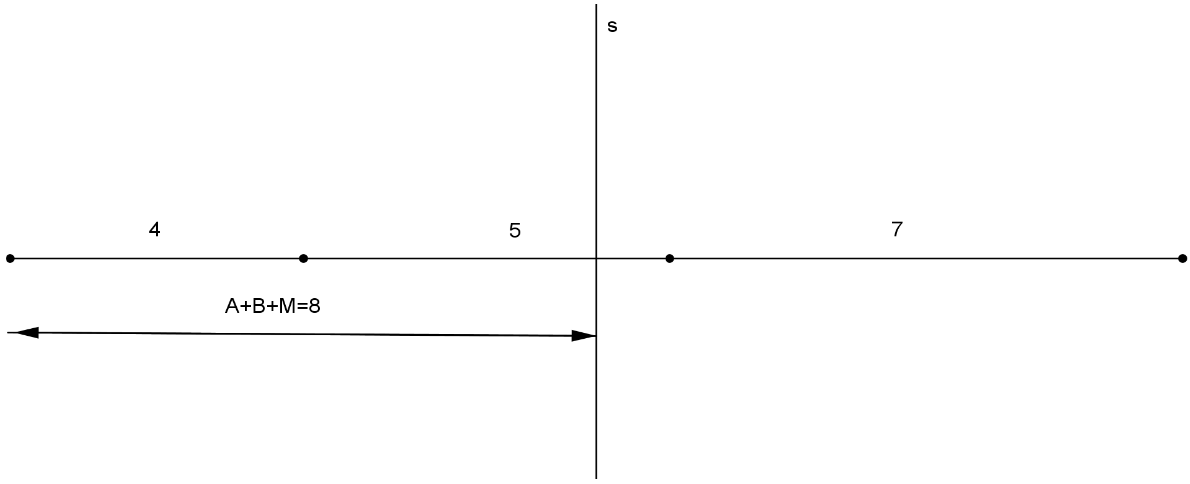
Со примена на дистрибутивниот закон имаме: $\overline{MN}=(x+y):2$.

Нека за годините на Ана ,Виктор и Марга знаеме дека:

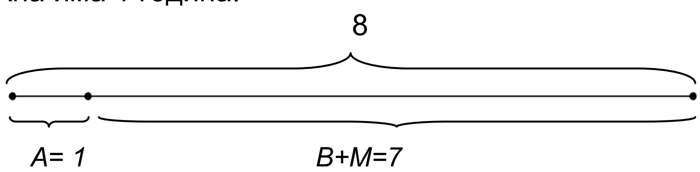
А+В=a години
А+М=b години
В+М=c години

Ставаме $1\,cm = 1$год. и тогаш може да конструираме А=$(a+b+c):2-c$
В=$(a+b+c):2-b$
М=$(a+b+c):2-a$

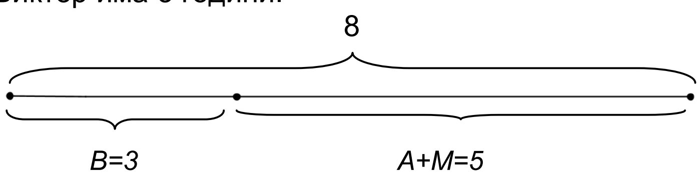
Пример 4: Нека А+В=4
А+М=5
В+М=7



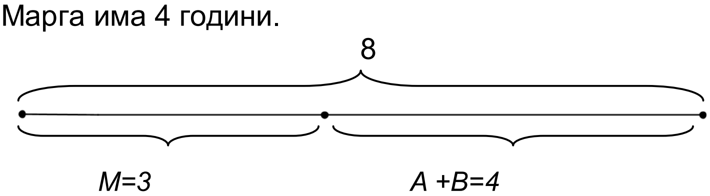
Ана има 1 година.



Виктор има 3 години.



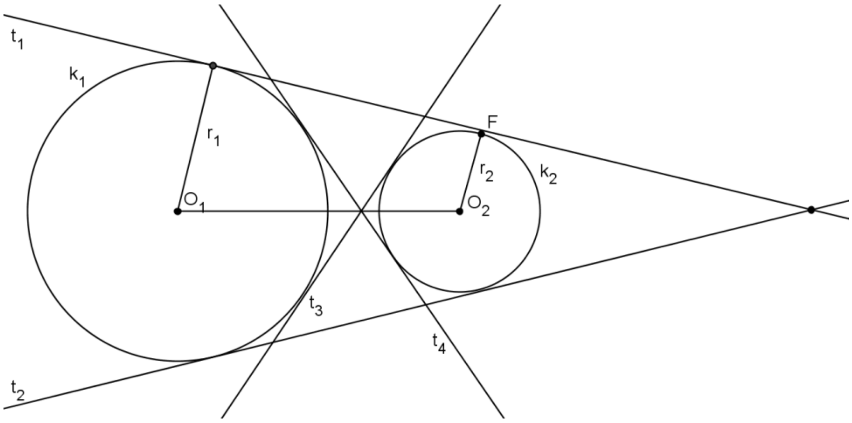
Марга има 4 години.



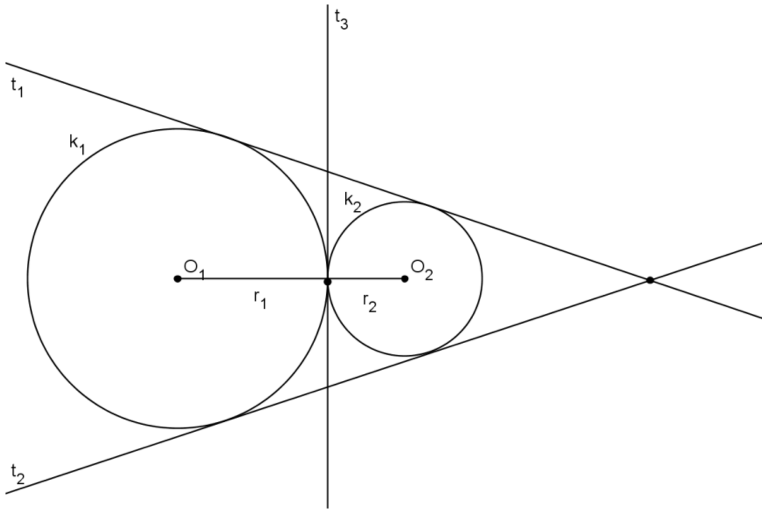
Нека $K(O,r)$ е круг, нека $k(O,r)$ е кружница и нека D е внатрешноста заградена со $k(O,r)$.
Кои од следните искази се вистинити?
а) $O \in K$ б) $O \in D$ в) $O \in k$ г) $D \cup k = K$ д) $D \cup K = k$
ѓ) $k \cup K = K$ е) $k \cap K = k$ ж) $k \cap D = \{O\}$ з) $k \setminus D = k$
Точно е: а, б, г, ѓ, е, з.

Бројот на заедничките тангенти на две кружници ќе го разгледуваме преку централното растојание и радиусите.
Кружниците $K_1(O_1,r_1)$ и $K_2(O_2,r_2)$ имаат заеднички тангенти, и тоа:

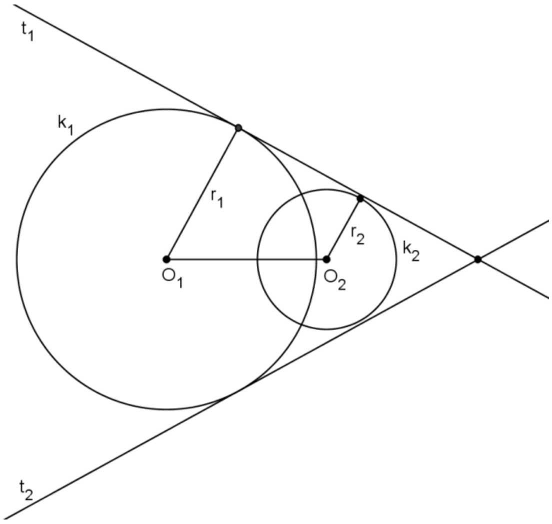
а) четири тангенти,ако $\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$

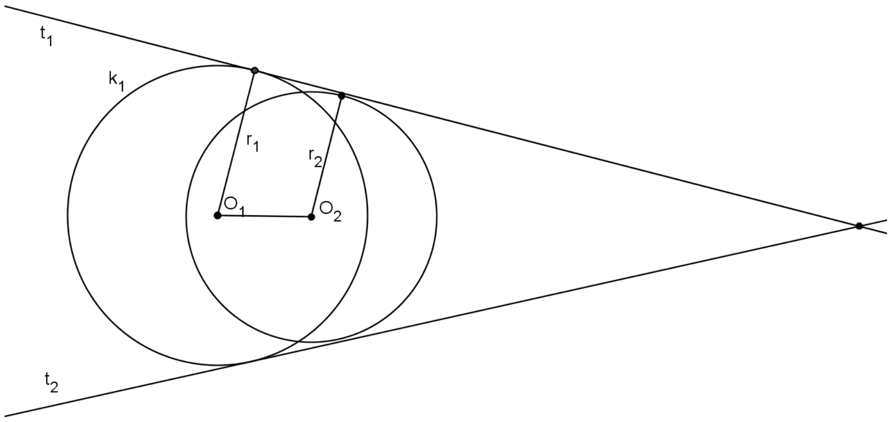


б) три тангенти,ако $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$



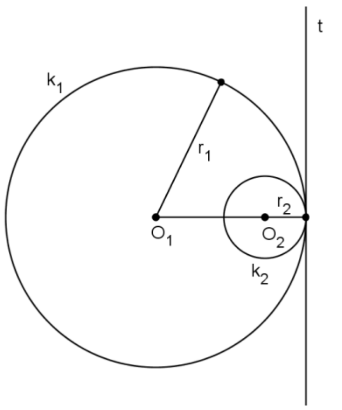
в) две тангенти,ако $\overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$ и $\overline{O_1O_2} > |r_1 - r_2|$

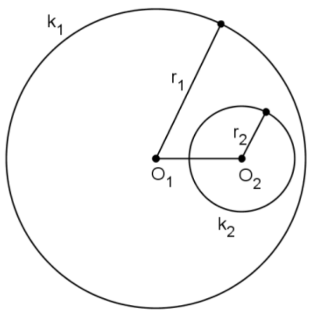




г) една тангента, ако $\overline{O_1O_2} = |r_1 - r_2|$

д) немаат заедничка тангента, ако $\overline{O_1O_2} < |r_1 - r_2|$



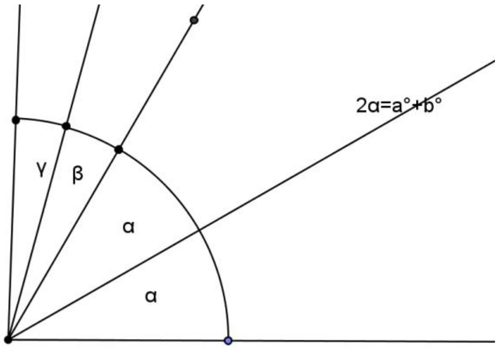


Графичките операции со агли, конструкцијата на агли, симетралата на агол, симетралата на отсечка слично како и кај графичкото собирање и одземање на отсечки може да се користи во решавање на посложени текстуални задачи.

Нека:

$$\begin{cases} \alpha+\beta-\gamma=a^\circ \\ \alpha-\beta+\gamma=b^\circ \\ \alpha+\beta-\gamma=c^\circ \end{cases}$$

Тогаш: $\alpha+\beta-\gamma+\alpha-\beta+\gamma=a^\circ+b^\circ=2\alpha$ т.е. $\alpha=\left(a^\circ+b^\circ\right):2$



$$2\alpha=\alpha+\beta-\gamma+\alpha-\beta+\gamma=a^\circ+b^\circ$$

Слично, $\alpha+\beta-\gamma+\beta+\gamma-\alpha=a^\circ+c^\circ=2\beta$ т.е. $\beta=\left(a^\circ+c^\circ\right):2$

$\alpha-\beta+\gamma+\beta+\gamma-\alpha=b^\circ+c^\circ=2\gamma$ т.е. $\gamma=\left(b^\circ+c^\circ\right):2$

Пример 5: За годините на Дарко, Светлана и Лиле важи следното:

Д + С – Л = 8 г.

Д – С + Л = 12 г.

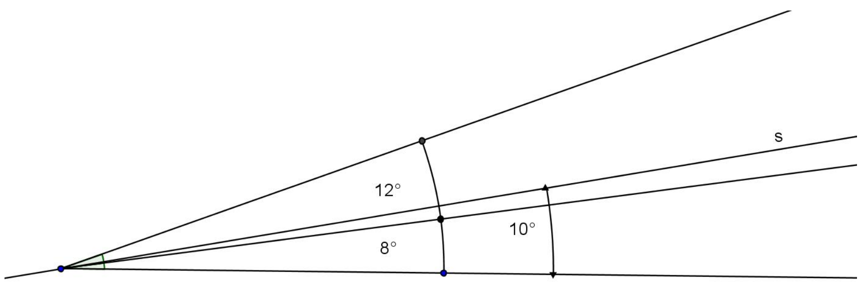
С + Л – Д = 18 г.

Колку години има секој од нив?

Воочи го начинот на решавање: Нека:

$$\begin{cases} \alpha+\beta-\gamma=8^\circ \\ \alpha-\beta+\gamma=12^\circ \\ \alpha+\beta-\gamma=18^\circ \end{cases} \qquad 1\text{г.}\equiv 1^\circ$$

Имаме: $\alpha+\beta-\gamma+\alpha-\beta+\gamma=2\alpha=8^\circ+12^\circ=20^\circ$ т.е. $\alpha=\left(8^\circ+12^\circ\right):2$



Слично: $\beta=\left(8^\circ+18^\circ\right):2$

$\gamma=\left(12^\circ+18^\circ\right):2$

Значи, Дарко има 10 години, Светлана 13 години и Лиле 15 години.
Обиди се задачата да ја решиш со користење на отсечки.

Пример 6: Нека збировите на секои три страни од еден четириаголник се $16\ cm, 18\ cm, 20\ cm$ и $24\ cm$. Одреди го периметарот на четириаголникот.

Согледај го решението:

$$\begin{cases} a+b+c=16 \\ a+b+d=18 \\ a+c+d=20 \\ b+c+d=24 \end{cases}$$

Значи: $3a+3b+3c+3d=78$

$3L=78$

$L=26\ cm$

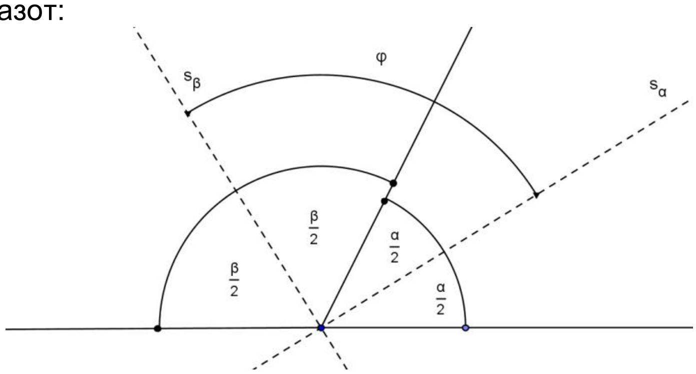
Одговори дали задачата може да се реши со користење на:

а) графички операции со отсечки;

б) графички операции со агли:

Пример 7: Докажи дека аглите што ги зафаќаат симетралите на напоредните агли се прави.

Согледај го доказот:



Од скицата гледаме дека аголот $\varphi=\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}=(\alpha+\beta):2=180^\circ:2=90^\circ$. Зошто и преостанатите агли кои ги формираат s_α и s_β се прави?

Пример 8: Нека страните на еден петаголник се пет последователни броеви од втората десетка: 11, 12, 13, 14, 15. Нека над секоја страна се конструирани триаголници со периметри од третата десетка 31, 32, 33, 34, 35.Одреди го периметарот на фигурата.

Решение: Јасно е дека:

L фиг= L збирот на Δ - L петоаголник=

$=(31+32+33+34+35)-(11+12+13+14+15)=165-65=100\ cm.$

ЗАДАЧИ ОД НИВО **В** И НИВО **Г**

Со користење на задачите подолу, наставникот може да направи проверка на знаењата на ученикот кои се на ниво на примена, анализа, синтеза и вреднување. Задачите може да ги користат учениците за самооценување, а и родителите може да го проверат нивото на стекнатите знаења.

1. На правата p се означени точките M, N, P и Q. Именувај ја правата p на сите можни начини.

2. Низ пет дадени точки минуваат една, пет, шест, осум и десет прави. Претстави ги графички сите случаи.

3. Нека $a \parallel b$, $b \parallel c$ и $c \parallel d$, тогаш во каква положба се правите b и d?

4. Покажи дека ако $a \parallel b$ и $b \parallel c$ тогаш $a \parallel c$ или $a = c$.

5. За точките L, M и N важи $\overline{LM} = 28\ mm, \overline{MN} = 24\ mm.$ Одговори дали може растојанието меѓу точките L и N да биде: а) $52\ mm$ б) $5\ cm$ в) $6\ cm$

6. Точките L, M и N се колинеарни и точката L не лежи меѓу M и N. Пресметај го растојанието меѓу L и M ако $\overline{LN} = 10\ cm, \overline{NM} = 8\ cm.$

7. Нека A и B се точки од правата p при што $\overline{AB} = 3\ cm,$ а AB_1 е отсечка за која B е средина; AB_2 е отсечка за која B_1 е средина и AB_3 е отсечка за која B_2 е средина. Одреди ја должината $\overline{B_1B_3}$.

8. Конструирај отсечка $a + b - c$ ако $a = 10\ cm, b = 3\ cm, c = 8\ cm.$

9. Ако $m + n = 10$ и $m - n = 8$, одреди ја графички отсечката $m.$

10. Покажи дека за секој природен број n на полуправата OS лежи само една точка A што е на растојание n од точката O, т.е. $\overline{OA} = n.$

11. Нацртај проста затворена искршена линија со шест точки.

12. Нека периметарот на една искршена линија е $30\ cm.$ Колку најмалку и колку најмногу страни чии должини се природни броеви може да има искршената линија?

13. Нацртај кружница со центар во O и дијаметар $d = 6\ cm.$ Во точката A нацртај тангента t и одреди го растојанието од тангентата до центарот на кружницата.

14. Кружниците $k_1(O_1, 4\ cm)$ и $k_2(O_2, 22\ mm)$ се допираат однатре. Пресметај го растојанието меѓу центрите на кружницата.

15. Нека се дадени различните полуправи OA, OB, OC и OD .Колку агли образуваат овие полуправи?

Колку најмногу означувања на аглите има ако се означуваат со три букви? (пр. $\measuredangle AOB$)

16. При пресекот на две прави еден од напоредните агли е за 30° помал од другиот.Одреди ги накрсните агли.

17. Нацртај кружница $k(O,3\ cm)$.Со истиот отвор на шестарот нацртај кружни лаци на кружницата (има точен број). Колкав е централниот агол што одговара на еден таков кружен лак?

18. Дадени се два агли α и β , $\alpha > \beta$.
    а) Конструирај го нивниот збир.
    б) Конструирај ја нивната разлика.
    в) Конструирај го збирот од $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$. Што се добива?
    г) Конструирај го аголот $\alpha + \beta - (\alpha - \beta)$. Што се добива?

19. Користејќи собирање и одземање на агли и една тегла со слатко, одреди ја масата на теглата (празна), капакот и слаткото,ако знаеме дека Т+С-К=900гр., Т+К-С=100гр.,
    С+К-Т=300гр. Користи $1^\circ = 10$ гр.

20. Пресметај $3\alpha + \alpha : 6$ ако $\alpha = 76^\circ\ 32'\ 42''$.

21. Нацртај отсечка AB и подели ја на осум еднакви дела користејќи симетрала на отсечка.

22. Конструирај агол од $11^\circ\ 15'$.

23. Конструирај го аголот кој е збир од аголот меѓу симетралите на напоредните агли и аголот меѓу симетралите на комплементните агли добиени како делови на правиот агол.

24. Одреди го сумплементниот агол на аголот којшто е комплементен со аголот од 20°.

25. Одреди го аголот којшто е:
    а) за 10° поголем од својот комплементен агол;
    б) за 10° помал од својот суплементен агол.

26. Нацртај кружница $k(O,3\ cm)$. Околу кружницата нацртај правилен многуаголник чии страни лежат на тангентите на кружницата. Во кружницата нацртај правилен многуаголник чии страни се тетиви на кружницата.
    а) Што забележуваш со зголемувањето на бројот на страните?
    б) Дали овие многуаголници можат да имаат ист периметар?

ЗАДАЧИ ШТО СЕ РЕШАВААТ НА ПОВЕЌЕ НАЧИНИ

1. Задача **Конструирај агол од 1^0 ако е даден агол од 19^0 .**

Решенија

I начин: Директен
Варијанта 1: $19 \times 19^0 = 361^0$; $361^0 - 360^0 = 1^0$ итн.
Варијанта 2: $4 \times 19^0 - 75^0$ (може да се конструира) = $76^0 - 75^0 = 1^0$
Варијанта 3: $11 \times 19^0 = 209^0$; $210^0 - 209^0 = 1^0$

II начин: Индиректен
Варијанта 1: $1 \times 19^0 - 15^0$ (може да се конструира) = 4^0.
Сега се конструира $5^0 \times 4^0 = 20^0$ значи $20^0 - 19^0 = 1^0$ исто така може
$4^0 : 2 : 2 = 1^0$, т.е. се користи симетрала на агол.
Варијанта 2: $2 \times 19^0 - 30^0$ (може да се контструира) = 8^0
$8^0 : 2 : 2 : 2 = 1^0$
Варијанта 3: $3 \times 19^0 = 57^0$; 60^0 (може да се конструира) – $57^0 = 3^0$;
$19^0 - 6 \times 3^0 = 1^0$
Варијанта 4: $5 \times 19^0 = 95^0$; $95^0 - 75^0 = 20^0$; $20^0 - 19^0 = 1^0$
Варијанта 5: $6 \times 19^0 = 114^0$; $120^0 - 114^0 = 6^0$; $19^0 - 3 \times 6^0 = 1^0$
Варијанта 6: : $7 \times 19^0 = 133^0$; $133^0 - 120^0 = 13^0$; $19^0 - 13^0 = 6^0$; $19^0 - 3 \times 6^0 = 1^0$
Варијанта 7: $8 \times 19^0 = 152^0$; $152^0 - 150^0 = 2^0$; $2^0 : 2 = 1^0$
Варијанта 8: $9 \times 19^0 = 171^0$; $171^0 - 165^0 = 6^0$ ($330^0 : 2 = 165^0$); $19^0 - 3 \times 6^0 = 1^0$
Варијанта 9: $10 \times 19^0 = 190^0$; $190^0 - 180^0 = 10^0$; $2 \times 10^0 - 19^0 = 1^0$
Варијанта 10: $12 \times 19^0 = 228^0$; $228^0 - 210^0 = 18^0$; $19^0 - 18^0 = 1^0$
Варијанта 11: $13 \times 19^0 = 247^0$; $270^0 - 247^0 = 23^0$; $23^0 - 19^0 = 4^0$; $4^0 : 2 : 2 = 1^0$ итн.

2. Задача **Колкав е збирот на два агли кои се сумплементни на два комплементни агли?**

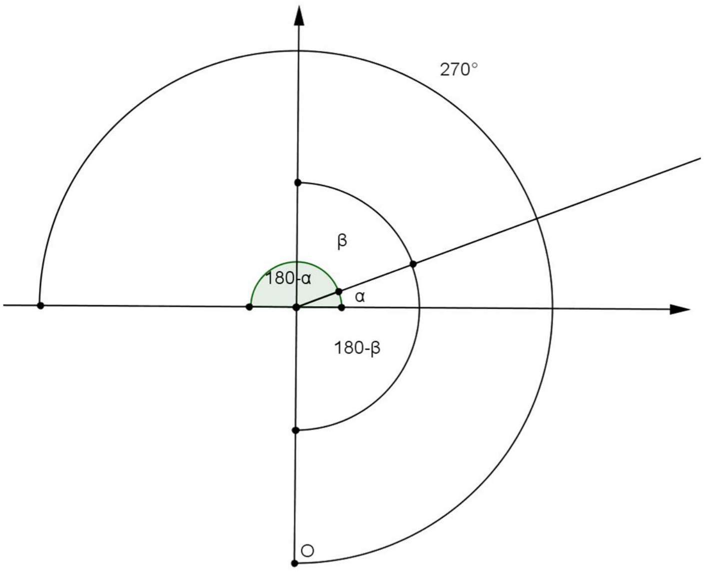
Решенија:

I начин: Алгебарски

Нека $\alpha + \beta = 90^\circ$, т.е. α и β се комплементни агли. Тогаш:

$$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) = 360^\circ - (\alpha + \beta) = 270^\circ$$

II начин: Графички



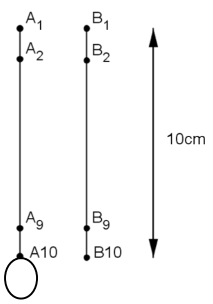
3. Задача **На правата a дадена е низа точки $A_1, A_2, .., A_{100}$, а на правата b дадена е низа точки $B_1, B_2, .., B_{10}$. Растојанието меѓу секои две соседни точки на правата a е еднакво на растојанието на кои било две соседни точки на правата b. Ако должината на отсечката B_1B_{10} е 10 cm, колкава е должината на отсечката A_1A_{100} ?**

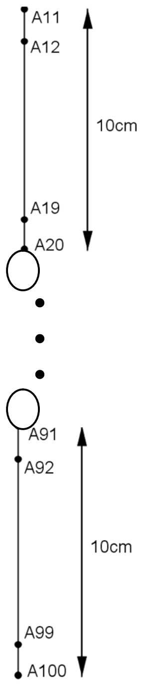
Решенија:

I начин: Алгебарски

Должината $\overline{B_1B_{10}}$ ја прават 9 еднакви отсечки, а должината $\overline{A_1A_{100}}$ ја прават 99 исто толкави отсечки. Значи $\overline{A_1A_{100}} = 11 \cdot \overline{B_1B_{10}} = 110cm$.

II начин: Графички





9 празни е $\overline{B_1B_{10}}$. Потоа 10+1=11 отсечки $\overline{B_1B_{10}}$.Значи, $\overline{A_1A_{100}} = 110\,cm$.

III начин: Со одредување на должина на еден поделок

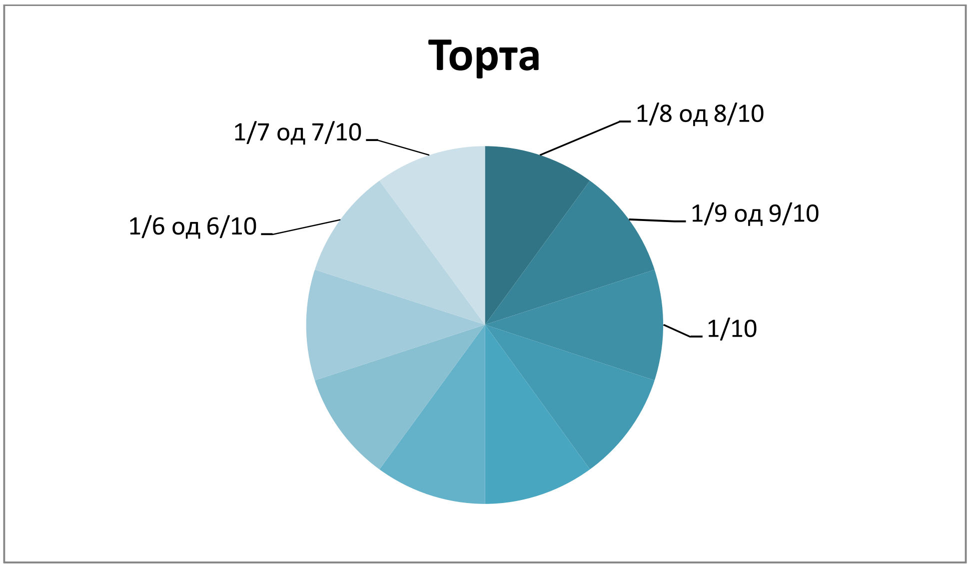
Ако 9 отсечки се $10\,cm$, тогаш една отсечка е $\frac{10}{9}\,cm$. $\overline{A_1A_{100}}$ има 99 отсечки,

значи $99 \cdot \frac{10}{9} = 110\,cm$.

4. Задача **На прославата на својот роденден, Анкица послужила торта. Прво Злата добила 1/10 од тортата, а потоа Сабахудин добил 1/9 од остатокот. После тоа Рајмонда добила 1/8 од она што останало по Сабахудин. Гордана добила 1/7 од остатокот и на крај Игор добил 1/6 од последниот остаток. Колкав дел ѝ останал на Анкица?**

Решенија:

I начин: Геометриски



Останала $\frac{1}{2}$ од тортата.

II начин: Аритметички

Злата земала $\frac{1}{10}$ и останале $\frac{9}{10}$; Сабахудинземал $\frac{1}{9}\cdot\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$ и останале $\frac{8}{10}$; Рајмонда земала $\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{10}=\frac{1}{10}$ и останале $\frac{7}{10}$; Гордана земала $\frac{1}{7}\cdot\frac{7}{10}=\frac{1}{10}$ и останале $\frac{6}{10}$; Игор земал $\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{10}=\frac{1}{10}$ и останале $\frac{5}{10}$.

Значи, останала половина торта.

СПЕЦИФИКАЦИСКА МРЕЖА НА ТЕСТОТ

(Во спецификациската мрежа се дадени бројот на задачите по содржини и по нивоа, како и нивната процентуална застапеност)

	Содржини	Број на часови	А Познавање	Б Разбирање	В Примена, анализа, синтеза, вреднување	Проценти	Задачи
I	Точка. Права	8	2	2	2	20%	6
II	Отсечка. Полуправа	8	2	2	2	20%	6
III	Кружница. Искршена линија	6	2	2	1	15%	5
IV	Агли	12	2	4	2	30%	5
V	Многуаголник	6	1	2	2	15%	5
	Процент		**30%**	**40%**	**30%**	**100%**	
	Задачи		**9**	**12**	**9**		**30**

ТЕМАТСКИ ТЕСТ

1 Колку најмалку прави определуваат четири различни точки?

А. 0 Б. 1 В. 2 Г. 3

2 Колку најмногу прави определуваат четири точки?

А. 2 Б. 4 В. 6 Г. 8

3 Низ една точка минуваат:

А. една права Б. две прави В. конечно многу прави Г. бесконечни многу прави

4 Со четири точки може да се именуваат најмногу:

А. 12 прави Б. 8 прави В. 16 прави Г. 4 прави

5 Три точки се колинеарни ако определуваат:

А. 0 прави Б. една права В. две прави Г. три прави

6 Ако $a \parallel b$, $a \cap b = \varnothing$ и $a \cap c = M$, тогаш:

А. $b \cap c = \varnothing$ Б. $b \cap c = \{M\}$ В. $b \cap c = a$ Г. $b \cap c \neq \varnothing$

7 Ако збирот на должините на отсечките $m+n=10\ cm$, $m+p=12\ cm$, $n+p=14\ cm$ отсечката $m+n+p$ има должина:

А. $16\ cm$ Б. $18\ cm$ В. $24\ cm$ Г. $36\ cm$

8 Точките A, B, C се колинеарни.Тогаш $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ можно е да имаат должини:

А. 2, 3, 6 Б. 2, 3, 4 В. 2, 3, 5 Г. 2, 3, 7

9 За точките A, B, C за кои растојанијата $\overline{AB}=3, \overline{BC}=4, \overline{CA}=5$,важи:

А. Точките не се колинеарни.
Б. Точката А е меѓу В и С.
В. Точката В е меѓу А и С.
Г. Точките се колинеарни.

10 Нека точките $A, B, C \in p$. Тогаш бројот на различни полуправи определени со тие точки е:

А. 2 Б. 3 В. 4 Г. 6

11 Нека OA и OB се две составни полуправи. Тогаш важи:

А. $OA \cap OB = \{O\}$ Б. $OA \cap OB = \varnothing$ В. $OA \cap OB = OA$ Г. $OA \cap OB = OB$

12 Бројот на отсечки определени со три колинеарни точки е:

А. 6 Б. 5 В. 4 Г. 3

13 Две кружници се концентрички ,ако:

А. имаат заедничка точка.
Б. имаат заеднички центар.
В. не се допираат однатре.
Г. не се допираат однадвор.

14 Нека страните на искршената линија имаат должини: $\overline{AB} = 3\ cm,\ \overline{BC} = 10\ mm,\ \overline{CD} = 20\ mm.$Тогаш периметарот на искршената линија е:

А. $6\,cm$ Б. $33\,mm$ В. $33\,cm$ Г. $330\,mm$

15 Кој од дадените поими не е основен?

А. точка Б. права В. отсечка Г. растојание

16 Ако $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ се две кружници и важи $r_1 + r_2 = \overline{O_1O_2}$, тогаш:

А. кружниците се сечат.
Б. кружниците се допираат однатре.
В. кружниците се концентрични.
Г. кружниците допираат однадвор.

17 Правата p што минува низ центарот на кружницата $k(O, r)$ се вика:

А. дијаметар. Б. тетива. В. пресечка . Г. тангента.

18 Крак на аголот е:

А. права. Б. полуправа. В. отсечка. Г. растојание.

19 Правиот агол е половина од:

А. рамниот агол.
Б. полниот агол.
В. тапиот агол.
Г. остриот агол.

20 Аголот што го формираат симетралите на напоредните агли изнесува:

А. 180° Б. 45° В. 90° Г. 135°

21 Ако збирот на два накрсни и едниот напореден агол со нив што го формираат пресечни прави е 300° ,тогаш напоредниот агол изнесува:

А. 30° Б. 45° В. 75° Г. 60°

22 Ако збирот на два агли е 120° а нивната разлика е 40°, тогаш комплементниот агол на поголемиот од аглите изнесува:

А. 10° Б. 20° В. 30° Г. 40°

23 Еден аглов степен има:

А. $60''$ Б. $3600''$ В. $100'$ Г. $1000''$

24 Суплементниот агол на аголот од 75° е:

А. 15° Б. 75° В. 105° Г. 115°

25 Нека α е остар агол,а неговиот комплементен агол е пет пати поголем од него. Тогаш аголот α изнесува:

А. 65° Б. 45° В. 30° Г. 15°

26 Ако во еден многуаголник има агол поголем од рамниот агол, тогаш тој многуаголник е:

А. конвексен.
Б. неконвексен.
В. двоаголник.
Г. триаголник.

27 Полигоналната линија е:

А. затворена искршена линија која нема несоседни страни што се сечат.
Б. затворена искршена линија која има несоседни страни што се сечат.
В. отворена искршена линија која нема несоседни страни што се сечат.
Г. отворена искршена линија која има несоседни страни што се сечат.

28 Една нива во форма на четириаголник со страни $a=10\ m, b=8\ m, c=7m, d=12\ m$ е заградена со три реда жица. Колку m жица е потрошена при заградувањето?

А. $37\,m$ Б. $74\,m$ В. $111\,m$ Г. $148\,m$

29 Ако страните на триаголникот се $a=5\ cm, b=20\ mm, c=4\ cm$ тогаш неговиот периметар е:

А. $29\,mm$ Б. $29\,cm$ В. $1100\,mm$ Г. $11\,cm$

30 Рамнокракиот триаголник со основа $10\,cm$ и периметар $24\,cm$ има крак:

А. $3\,cm$ Б. $7\,cm$ В. $10\,cm$ Г. $17\,cm$

Клуч

	Решение		Решение
1.	Б	15.	В
2.	В	16.	Г
3.	Г	17.	В
4.	А	18.	Б
5.	Б	19.	А
6.	Г	20.	В
7.	Б	21.	Г
8.	В	22.	А
9.	А	23.	Б
10.	В	24.	В
11.	А	25.	Г
12.	Г	26.	Б
13.	Б	27.	А
14.	А	28.	В
15.	В	29.	Г
16.	Г	30.	Б

Скала за вреднување на резултатите од тестот:
(секоја задача се вреднува со по 1 поен)

ОСВОЕНИ ПОЕНИ	ОЦЕНКА
0-7	Недоволен (1)
8-11	Доволен (2)
12-19	Добар (3)
20-23	Многу добар (4)
24-30	Одличен(5)

ТЕМА 3: ДРОПКИ, ДЕЦИМАЛНИ БРОЕВИ

Ниво А
Ученикот треба да знае дека...

НИВО: ПОМНЕЊЕ

Количникот $a:b$ на природните броеви a и b запишан во обликот $\frac{a}{b}$ се вика дропка.

Пример 1: $3:4=\frac{3}{4}$ се чита: три врз четири или три четвртини.

Делителот b се вика именител (кој покажува на колку еднакви делови е поделено целото).

Деленикот a се вика броител (кој покажува колку делови се земаат од целото.

Операцијата делење (:) се заменува со дробна црта.

Пример 2: $\frac{4}{5}$ → броител, дробна црта, именител

Ако именителот е поголем од броителот, тогаш дропката ја викаме чиста или правилна. (Таа претставува само дел од целото.)

Пример 3: $\frac{4}{5}, \frac{7}{8}, \frac{5}{11}$ итн.

Ако броителот може да се подели со именителот, тогаш дропката се вика привидна**.** (Таа претставува само природен број.)

Пример 4: $\frac{10}{5}=2$

Ако броителот е поголем од именителот и не може да се дели со него, тогаш дропката се вика неправилна или нечиста, т.е. мешана дропка. (Таа претставува цели и делови од цело.)

Пример 5: $\frac{8}{3}=\frac{6+2}{3}=\frac{6}{3}+\frac{2}{3}=2+\frac{2}{3}=2\frac{2}{3}$

Записот $2\frac{2}{3}$ се чита: две цели и две третини и се вика мешана дропка или мешан број кој ја претставува дропката $\frac{8}{3}$. Во пракса се добива со делење на 8 со 3.

8:3=2 –количник

$\frac{-6}{2}$ – остаток

Пример 6: $\frac{23}{5}=4\frac{3}{5}$

23:5=4 – количник
-20
3 – остаток

Неправилна дропка во мешан број (мешана дропка) се претвора кога се дели броителот со именителот, па се добива количникот и зад него се допишува дропката со броител колку што е остатокот од делењето, а именителот се препишува.

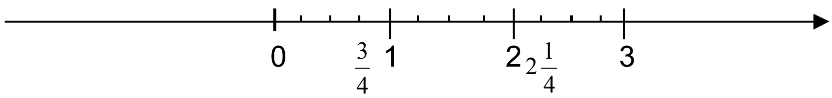
Пример 7: $\frac{17}{5}=3\frac{2}{5}$,бидејќи $17=3\cdot5+2$

Мешаната дропка (мешаниот број) во неправилна дропка се претвора кога бројот на целите се множи со именителот и на тој производ се додава броителот, при што се добива новиот броител на неправилната дропка, а именителот се препишува.

Пример 8: $5\frac{2}{7}=\frac{5\cdot7+2}{7}=\frac{37}{7}$

За секоја дропка одговара само една точка од бројната права која може графички да се прикаже.

Пример 9: $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$, $\frac{12}{4}=3$



Две дропки $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$ со исти именители:

се собираат по правилото $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$, а се одземаат по правилото $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$, $a>c$

Пример 10: $\frac{7}{11}+\frac{2}{11}=\frac{9}{11}$, $\frac{7}{11}-\frac{2}{11}=\frac{5}{11}$

Дропка со природен број се проширува така што и броителот и именителот се множат со тој број.

Пример 11: $\frac{3}{7}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{15}{35}$

Две дропки можат да се споредат ако:
1) имаат исти именители (па поголема е дропката со поголем броител);
2) имаат исти броители (па поголема е дропката со помал именител).

Пример 12: 1) $\frac{3}{7}<\frac{5}{7}$, 2) $\frac{7}{4}<\frac{7}{3}$

Дропка со број се крати кога и броителот и именителот се делат со тој број.

Пример 13: $\frac{15}{20}=\frac{15:5}{20:5}=\frac{3}{4}$

Три четвртини од бројот 5 се одредува така што броителот (3) се множи со бројот (5), а именителот се препишува, т.е.

$\frac{3}{4}$ од 5 е: $\frac{3\cdot 5}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$

Пример 14: $\frac{2}{3}$ од 4 е: $\frac{2\cdot 4}{3}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$

Дропките кои имаат именител една од декадните единици се викаат децимални дропки и скратено се запишуваат во децимален запис наречен децимален број.

Пример 15:

$\frac{1}{10}=0{,}1$ (нула цели и една десетина)

$\frac{3}{10}=0{,}3$ (нула цели и три десетини)

$\frac{42}{10}=4\frac{2}{10}=4{,}2$ (четири цели и две десетини)

$\frac{7}{100}=0{,}07$ (нула цели и седум стотини)

$\frac{27}{100}=0{,}27$ (нула цели и дваесет и седум стотини)

$\frac{405}{100}=4{,}05$ (четири цели и пет стотини)

Децималниот број е составен од цел дел, децимална запирка и децимален дел.

Пример 16: 23,125

цел дел — децимална запирка — децимален дел

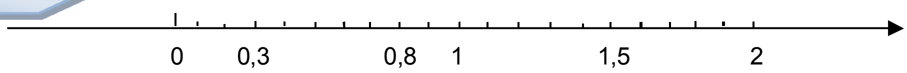
(дваесет и три цели запирка сто дваесет и пет илјадити)

Децимален број во децимална дропка се претвора така што се запишува онака како што се чита.

Пример 17: $4{,}13 = 4\frac{13}{100} = \frac{413}{100}$

Децималните броеви се претставуваат на бројна права исто како дропките.

Пример 18:



Децималните броеви се споредуваат така што прво се споредуваат целите делови, а потоа децималните делови.

Пример 19: $12{,}02 < 13{,}02$; $7{,}9 > 7{,}10$; $235{,}756 < 235{,}757$

Два и повеќе децимални броеви се собираат така што се запишуваат еден под друг целите и децималните делови, а потоа се користи собирањето во природните броеви.
Децималната запирка се пренесува вертикално надолу.

Пример 20:

$$\begin{array}{rl} & 2{,}356 \\ & 12{,}5 \\ & 0{,}3457 \\ + & 231 \\ \hline & 246{,}2017 \end{array}$$

Два децимални броеви се одземаат така што се запишуваат еден под друг целите и децималните делови, а потоа се користи одземањето во природните броеви.
Децималната запирка се пренесува вертикално надолу.

Пример 21:

$$\begin{array}{rl} & 345{,}82 \\ - & 97{,}597 \\ \hline & 248{,}223 \end{array}$$

Два децимални броеви се множат како природни броеви, а децималната запирка се става така што зад неа има онолку места колку што имаат децимални места заедно двата множители.

Пример 22:

$$\begin{array}{r} \underline{23{,}7\cdot 0{,}42} \\ 474 \\ \underline{948} \\ 9{,}954 \end{array}$$

Децимален број се дели со природен број исто како природен број со природен број, само што во количникот запирката се става штом се спушти број после децималната запирка од деленикот.

Пример 23:

$$\begin{array}{l} 23{,}76:12=1{,}98 \\ \underline{-12} \\ 117 \\ \underline{-108} \\ 96 \\ \underline{-96} \\ 0 \end{array}$$

Заокружувањето на децималните броеви со одредена точност се врши така што се гледа следната цифра по цифрата која треба да се заокружи и притоа:

- таа се отфрла ако е помала од 5, а заокружуваната цифра не се менува;
- таа се отфрла ако е 5 или поголема од 5, но заокружуваната цифра се зголемува за 1.

Пример 24: Бројот 23,5738 заокружен со точност 0,1 ; 0,01 ; 0,001 е соодветно.

23,6; 23,57; 23,574.

Ниво Б

Ученикот покажува дека разбира

НИВО: РАЗБИРАЊЕ

Дропките помали од еден се викаат чисти (правилни) дропки.

Пример 1: $\frac{4}{5}, \frac{3}{11}, \frac{1}{100}$ се чисти (правилни) дропки.

Дропките коишто се еднакви на еден се привидни дропки.

Пример 2: $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \dots$ се привидни дропки.

Дропките коишто се поголеми од еден се нечисти (неправилни) или привидни дропки.

Пример 3: $\frac{17}{8}, \frac{24}{5}, \frac{4}{3}, \frac{101}{1001}$ се неправилни дропки.

Пример 4: $\frac{12}{3}, \frac{15}{5}, \frac{27}{9}, \frac{121}{11}$ се привидни дропки.

Две дропки $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ се еднакви ако важи $a \cdot d = b \cdot c$

Пример 5: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ бидејќи $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10$

Пример 6: $\frac{4}{5} \neq \frac{8}{12}$ бидејќи $4 \cdot 12 \neq 5 \cdot 8$

Пример 7: Дропка $\frac{3}{5}$ проширена со 4 е $\frac{12}{20}$ и важи $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$, бидејќи $3 \cdot 20 = 5 \cdot 12$

.

Пример 8: Дропка $\frac{10}{35}$ скратена со 5 е $\frac{2}{7}$ и важи $\frac{10}{35} = \frac{2}{7}$, бидејќи $10 \cdot 7 = 2 \cdot 35$.

Дропките се кратат со заеднички делител (ЗД) - постапно или со најголем заеднички делител (НЗД) на броителот и именителот.

Пример 9: $\frac{18}{30} \overset{2}{=} \frac{9}{15} \overset{3}{=} \frac{3}{5}$; $\frac{18}{30} \overset{6}{=} \frac{3}{5}$

Во пракса: $\frac{\cancel{18}^{\cancel{9}^{3}}}{\cancel{30}_{\cancel{15}_{5}}} = \frac{3}{5}$; $\frac{\cancel{18}^{3}}{\cancel{30}_{5}} = \frac{3}{5}$

Дропките (броителот и именителот) ,ако може, ги кратиме постапно со (ЗД) по следниот редослед со 2,3,5,7,9,11,13.

Пример 10: $\frac{\cancel{28}}{\cancel{98}}$ со 2 може ;

$\frac{14}{49}$ со 3 не може, со 5 не може, а со 7 може и се добива $\frac{2}{7}$

Пример 11: $\frac{143}{1001}$ со 2, 3, 5, 7, 9 не може, а со 11 може и се добива $\frac{13}{91}$,

потоа може и со 13 и се добива $\frac{1}{7}$

Пример 12: $\frac{37}{111}$ со 2,3,5,7,9,11,13 не може, а со 37 може и се добива $\frac{1}{3}$

По собирање или одземање дропката што се добива ако може се крати и се претвора во мешана дропка.

Пример 13: $\frac{7}{12}+\frac{1}{12}=\frac{\cancel{8}}{\cancel{12}}=\frac{2}{3}$

Пример 14: $\frac{7}{12}-\frac{1}{12}=\frac{\cancel{6}}{\cancel{12}}=\frac{1}{2}$

Пример 15: $\frac{7}{12}+\frac{11}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$

Пример 16: $\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{7}{9}+\frac{8}{9}-\frac{5}{9}=\frac{13}{9}=1\frac{4}{9}$

Секој природен број може на различни начини да се претстави во привидна дропка:

$$a=\frac{ab}{b}=\frac{ac}{c}=\ldots$$

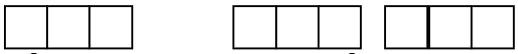
Пример 17: $2=\frac{2\cdot 1}{1}=\frac{2}{1}$; $2=\frac{2\cdot 2}{2}=\frac{4}{2}$; $2=\frac{2\cdot 3}{3}=\frac{6}{3}$ итн.

Може да собираме (одземаме) природен број со дропка така што природниот број го запишуваме како привидна дропка со ист именител како и дропката.

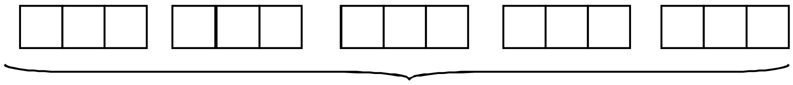
Пример 18: $2+\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 5}{5}+\frac{2}{5}=\frac{10+2}{5}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$

Пример 19: $2-\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 5}{5}-\frac{2}{5}=\frac{10-2}{5}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$

Три четвртини од бројот 5 графички се претставува со скицата:

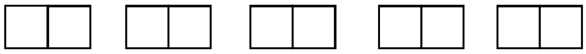


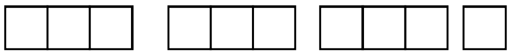
$\frac{3}{4}$ од 1 $\qquad$ $\frac{3}{4}$ од 2



$\frac{3}{4}$ од 5 е $\frac{15}{4}$

Пример 20: Да се одреди графички $\frac{2}{3}$ од 5.

Решение: 

т.е. 

Значи, $\frac{2}{3}$ од 5 е $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$.

Запишувањето на cm во dm или, пак, на cm во m се врши со помош на децимални дропки, односно со децимални броеви.

Пример 21: $1\,cm = \frac{1}{10}\,dm = 0{,}1\,dm$; $1\,cm = \frac{1}{100}\,m = 0{,}01\,m$

Пример 22: $3\,cm = \frac{3}{10}\,dm = 0{,}3\,dm$; $3\,cm = \frac{3}{100}\,m = 0{,}03\,m$

Децималниот број не се менува ако од десната страна му се допишат колку било нули.

Пример 23: $2{,}5 = 2{,}50 = 2{,}500 = \dots$, бидејќи

$$2{,}5 = 2\frac{5}{10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}, \quad 2{,}50 = 2\frac{50}{100} = \frac{250}{100} = \frac{5}{2} \quad \text{итн.}$$

Секој природен број може да се запише како децимален број така што се одделува со запирка, а по неа се допишуваат колку било нули.

Пример 24: $5 = 5{,}0 = 5{,}00 = \dots$

Децималниот број со декадна единица се множи така што децималната запирка се поместува на десно за онолку места колку што има нули во декадната единица.

Пример 25:

$$2{,}37542 \cdot 10 = 23{,}7542$$
$$2{,}37542 \cdot 100 = 237{,}542$$
$$2{,}37542 \cdot 1000 = 2375{,}42$$

Децималниот број со декадна единица се дели така што децималната запирка се поместува налево за онолку места колку што има нули во декадната единица.

Пример 26:
$$34754{,}2 : 10 = 3475{,}42$$
$$34754{,}2 : 100 = 347{,}542$$
$$34754{,}2 : 1000 = 34{,}7542$$

При делењето на децималните броеви добро е делителот да е природен број, а ако не е природен број тогаш го прошируваме до природен број.

Пример 27:

$$\begin{array}{l} \underline{97{,}911:2{,}3} \\ 979{,}11:23 = 42{,}57 \\ \underline{-92} \\ \;\;59 \\ \underline{-\;46} \\ \;\;\;131 \\ \;\underline{-115} \\ \;\;\;\;161 \\ \;\;\underline{-161} \\ \;\;\;\;\;\;0 \end{array}$$

Со делењето на броителот и именителот секоја дропка може да се претвори во децимален број, и тоа:

1) конечен децимален број (со конечно многу децимални места)

Пример 28: $\frac{11}{4} = 2{,}75$

$$\begin{array}{l} 11:4 = 2{,}75 \\ \underline{-8} \\ \;\;30 \\ \underline{-28} \\ \;\;\;20 \\ \;\underline{-20} \\ \;\;\;\;0 \end{array}$$

2) бесконечен чисто периодичен децимален број (со бесконечно многу децимални места)

Пример 29: $\frac{14}{3} = 4{,}666... = 4{,}(6)$

Пример 30: $\frac{235}{99} = 2{,}3737... = 2{,}(37)$

3) бесконечено мешано периодичен децимален број (со бесконечно многу децимални места и периодот не почнува по запирката)

Пример 31: $\frac{107}{45} = 2{,}37777... = 2{,}3(7)$

Точност до 0,1 значи дека бројот е заокружен на една децимала; точност до 0,01 значи дека бројот заокружен на две децимали итн.

Пример 32: Децималниот број што се добива од дропката $\frac{4}{3}=1{,}333...=1{,}(3)$ го заокружуваме како што е прикажано подолу.

$1{,}(3)\approx 1{,}3$ со точност 0,1
$1{,}(3)\approx 1{,}33$ со точност 0,01
$1{,}(3)\approx 1{,}333$ со точност 0,001

Пример 33: $\frac{5}{3}=1{,}666...=1{,}(6)$

$1{,}(6)\approx 1{,}7$ со точност 0,1
$1{,}(6)\approx 1{,}67$ со точност 0,01
$1{,}(6)\approx 1{,}667$ со точност 0,001

Разликата што покажува за колку дадениот број е помал или поголем од заокружениот се вика грешка на заокружувањето.

Пример 34: Заокружи го бројот $0{,}345$ со точност до $0{,}01$ и одреди ја грешката на заокружувањето.

Решение: $0{,}345\approx 0{,}35$

Грешката е: $0{,}35-0{,}345=0{,}005$

Елементарните равенки се решаваат исто како и кај природните броеви.

Пример 35:

1)
$x+2{,}3=5{,}5$
$x=5{,}5-2{,}3$
$x=3{,}2$

2)
$0{,}4+x=1{,}1$
$x=1{,}1-0{,}4$
$x=0{,}7$

3)
$x-2{,}1=3{,}7$
$x=3{,}7+2{,}1$
$x=5{,}8$

4)
$5{,}3-x=2{,}4$
$x=5{,}3-2{,}4$
$x=2{,}9$

5)
$x\cdot 2{,}3=4{,}6$
$x=4{,}6:2{,}3$
$x=2$

6)
$1{,}3\cdot x=3{,}9$
$x=3{,}9:1{,}3$
$x=3$

7)
$x:1{,}4=2{,}4$
$x=2{,}4\cdot 1{,}4$
$x=3{,}36$

8)
$5{,}6:x=2{,}8$
$x=5{,}6:2{,}8$
$x=2$

Комутативното, асоцијативното и дистрибутивното својство важи и кај децималните броеви.

Пример 36:

$$2{,}3 + 4{,}5 = 4{,}5 + 2{,}3$$
$$(2{,}5 + 1{,}3) + 4{,}7 = 2{,}5 + (1{,}3 + 4{,}7)$$
$$(3{,}2 + 1{,}3) \cdot 2{,}1 = 3{,}2 \cdot 2{,}1 + 1{,}3 \cdot 2{,}1$$

Промената на збирот, разликата, производот и на количникот од промената на компонентите кај децималните броеви се одредува исто како кај природните броеви.

Пример 37:

$2{,}3 + 1{,}7 = 4$ Тогаш: $(2{,}3 \pm 0{,}2) + 1{,}7 = 4 \pm 0{,}2$

$2{,}3 + (1{,}7 \pm 0{,}2) = 4 \pm 0{,}2$

$10{,}3 - 4{,}3 = 6$ Тогаш: $(10{,}3 \pm 0{,}2) - 4{,}3 = 6 \pm 0{,}2$

$10{,}3 - (4{,}3 \pm 0{,}2) = 6 \mp 0{,}2$

$2{,}5 \cdot 2{,}4 = 6$ Тогаш: $(2{,}5 \cdot 0{,}2) \cdot 2{,}4 = 6 \cdot 0{,}2$

$(2{,}5 > 0{,}2) \cdot 2{,}4 = 6 : 0{,}2$

ЗАДАЧИ ОД НИВО **А** И НИВО **Б**

Со користење на задачите подолу наставникот може да направи проверка на знаењата на ученикот кои се на ниво познавање и на ниво разбирање. Задачите може да ги користат учениците за самооценување, а и родителите може да го проверат нивото на стекнатите знаења.

1. Количниците 2:3; 3:4; 15:7 запиши ги во во вид на дропки и прочитај ги истите.

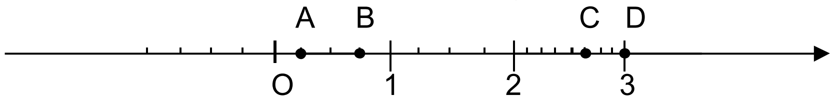
2. Искажи што претставува именител, а што броител на дропките $\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{6}{3},\frac{7}{3},\frac{8}{3}$ и претстави ги графички користејќи круг.

3. Дадено е множеството дропки $A=\left\{\frac{2}{7},\frac{5}{7},\frac{9}{7},\frac{14}{7},\frac{18}{7},\frac{20}{7},\frac{21}{7}\right\}$. Запиши ги подмножествата:
   а) правилни (чисти) дропки;
   б) привидни дропки;
   в) неправилни (нечисти) дропки.

4. Претвори ги неправилните дропки во мешани броеви.
   $\frac{11}{4};\frac{26}{5};\frac{37}{6};\frac{122}{11}$

5. Претвори ги во неправилни дропки следниве мешани броеви.
   $4\frac{2}{3};1\frac{1}{10};3\frac{3}{4};10\frac{1}{2}$

6. Кои дропки одговараат на точките A, B, C од бројната права?



7. На бројната права со единична отсечка од 6 cm претстави ги дропките: $\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{7}{6},\frac{13}{6}$.

8. Одреди кои од следните дропки се еднакви:
   $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{6}$; $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{9}$; $\frac{3}{4}$ и $\frac{9}{16}$; $\frac{4}{5}$ и $\frac{16}{15}$

9. Прошири ги дропките $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{9}$ со а) 2 б) 5

10. Спореди ги дропките: а) $\frac{4}{5}$ и $\frac{7}{5}$; б) $\frac{15}{4}$ и $\frac{15}{7}$

11. Скрати ги дропките: $\frac{8}{12},\frac{12}{30},\frac{36}{60},\frac{72}{90},\frac{22}{33},\frac{14}{77},\frac{13}{39}$ со:
    а) ЗД или постапно
    б) НЗД

12. Пресметај го збирот на дропките:

а) $\frac{5}{9}+\frac{7}{9}$ б) $\frac{3}{11}+\frac{7}{11}$ в) $2\frac{1}{3}+3\frac{2}{3}$

13. Пресметај ја разликата на дропките:

а) $\frac{7}{9}-\frac{4}{9}$ б) $\frac{17}{25}-\frac{12}{25}$ в) $3\frac{1}{6}-1\frac{5}{6}$

14. Кои од дропките $\frac{7}{10},\frac{3}{20},\frac{6}{101},\frac{11}{1000},5\frac{5}{100}$ се децимални?

15. Запиши ги во децимални броеви децималните дропки, па потоа прочитај ги:

а) $\frac{7}{100}$ б) $2\frac{3}{10}$ в) $11\frac{13}{1000}$

16. Запиши ги во децимални дропки следните децимални броеви:

а) $0,3$ б) $1,03$ в) $4,023$

17. Броевите 5 ; 3,2 ; 5,73 запиши ги така што да имаат по три децимали.

18. Спореди ги броевите: 3,05 и 2,96 ; 7,23 и 7,156 ; 2,9 и 2,10.

19. Пресметај го збирот и разликата:

а) 2,375+132,29
б) 0,247+42,9
в) 23,4-9,756
г) 123,7-0,849

20. Одреди го производот:

а) $2,37\cdot 8$
б) $2,57\cdot 3,27$
в) $2,356\cdot 100$
г) $0,32\cdot 0,42$

21. Одреди го количникот:

а) $37,47:3$
б) $2567,3:1000$
в) $5,6:35$
г) $74,9202:2,3$

22. Реши ги равенките:

а) $x+2,3=5,6$ д) $2,3\cdot x=4,6$

б) $0,32+x=7,56$ ѓ) $3,7\cdot x=11,1$

в) $x-3,4=5,1$ е) $x:3,4=4,3$

г) $4,7-x=3,98$ ж) $93,3:x=31,1$

23. Претстави ги во децимални броеви дропките:

$\frac{1}{5}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{2}$; $\frac{2}{15}$; $\frac{124}{45}$

24. Одреди го претпериодот и периодот на децималните броеви:

2,34777... ; 1,5123123...

25. Конечните децимални броеви претвори ги во нескратливи дропки:

0,5 ; 0,2 ; 1,25 ; 3,125

26. Дропката $\frac{7}{22}$ претвори ја во децимален број со точност:

0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; 0,0001.

Ниво В

Ученикот треба да го примени своето знаење и разбирање

НИВО: ПРИМЕНА

Познато е дека $1\,dm$ има $10\,cm$, односно $10\,cm = 1\,dm$.

1 cm	1 cm	1 cm	1 cm	1 cm	1 cm	1 cm	1 cm	1 cm	1 cm

Тогаш, 1 cm е десетти дел од 1 dm, т.е. $1\,cm = \frac{1}{10}\,dm$; $2\,cm = \frac{2}{10}\,dm$; ...; $t\,cm = \frac{t}{10}\,dm$.

Пример 1: Запиши $7cm$ во dm; $13cm$ во m; $11g$ во kg.

$1cm = \frac{1}{10}dm$; $2\,cm = \frac{2}{10}dm$; ...; $7\,cm = \frac{7}{10}dm$

$1cm = \frac{1}{100}m$; $2\,cm = \frac{2}{100}m$; ...; $13\,cm = \frac{13}{100}m$

$1\,g = \frac{1}{1000}kg$; $2\,g = \frac{2}{1000}kg$; ...; $11\,g = \frac{11}{1000}kg$

При одредувањето на x од равенството $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$ може да користиме:

а) проширување на дропки

Пример 2: $\frac{7}{x} = \frac{35}{40}$

Нека дропката $\frac{7}{x}$ е проширена со t,т.е. $7 \cdot t = 35$ и $x \cdot t = 40$. Тогаш $t = 5$. Значи $x \cdot 5 = 40$, т.е. $x = 8$.

б) со скратување на дропки

Пример 3: $\frac{7}{x} = \frac{35}{40}$

Од 35 е добиено 7 по кратењето на именителот и броителот на дропката $\frac{35}{40}$ со 5.

Значи, $\frac{35}{40} = \frac{7}{8}$,од каде $x = 8$.

в) со примена на правилото за еднаквост на дропки: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ако $ad = bc$.

Пример 4: $\frac{7}{x} = \frac{35}{40}$

Значи, $35 \cdot x = 7 \cdot 40$, од каде $x = 8$.

Ако A, B, C се дропки, тогаш важат комутативното и асоцијативното својство:

а) $A+B=B+A$ б) $(A+B)+C=A+(B+C)$

Пример 5: Нека $A=2\frac{3}{11};B=1\frac{1}{11};C=5\frac{7}{11}$, тогаш важат:

а) асоцијативното својство $A+B=2\frac{3}{11}+1\frac{1}{11}=3+\frac{3+1}{11}=3\frac{4}{11}$

$$B+A=1\frac{1}{11}+2\frac{3}{11}=3+\frac{1+3}{11}=3\frac{4}{11}$$

б) комутативното својство $(A+B)+C=\left(2\frac{3}{11}+1\frac{1}{11}\right)+5\frac{7}{11}=3\frac{4}{11}+5\frac{7}{11}=8+\frac{11}{11}=9$

$$A+(B+C)=2\frac{3}{11}+\left(1\frac{1}{11}+5\frac{7}{11}\right)=2\frac{3}{11}+6\frac{8}{11}=8+\frac{11}{11}=9$$

Периметарот и големината на страните на правоаголникот може да се одредуваат кога мерните броеви на страните се дропки.

Пример 6: Нека поголемата страна на правоаголникот е $2\frac{3}{7}\,cm$, а страните се разликуваат за $\frac{2}{7}\,cm$. Помалата страна ќе биде $2\frac{3}{7}-\frac{2}{7}=2\frac{3-2}{7}=2\frac{1}{7}\,cm.$

Периметарот ќе биде:

$$L=2a+2b=a+a+b+b=2\frac{3}{7}+2\frac{3}{7}+2\frac{1}{7}+2\frac{1}{7}=8+\frac{8}{7}=8+1+\frac{1}{7}=9\frac{1}{7}cm.$$

Ако еден работник може да заврши работа за m денови, тогаш за 1 ден завршува $\frac{1}{m}$ од работата,за два дена $\frac{1}{m}+\frac{1}{m}=\frac{2}{m}$, за три дена $\frac{3}{m}=\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}$ итн.

За m денови ќе заврши $\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+...+\frac{1}{m}=\frac{m}{m}=1$, т.е. ќе ја заврши целата работа.

Пример 7: Базен се полни со две цевки,а се празни од трета цевка. Првата цевка за 1 час полни $\frac{3}{10}$ од базенот,втората полни $\frac{6}{10}$, а третата цевка за 1 час празни $\frac{4}{10}$ од базенот.

а) Кој дел од базенот ќе се наполни за 1час

б) За колку часа ќе се наполни базенот?

Решение:

а) За еден час ќе се наполни $\frac{3}{10}+\frac{6}{10}-\frac{4}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ од базенот.

б) $x\cdot\frac{1}{2}=1$; $\frac{x\cdot 1}{2}=1$ т.е. $x=2$, што значи дека базенот ќе се наполни за 2 часа.

Пример 8: Збирот на броевите $7\frac{3}{11}$ и $5\frac{1}{11}$ намален за нивната разлика ќе биде:

$$\left(7\frac{3}{11}+5\frac{1}{11}\right)-\left(7\frac{3}{11}-5\frac{1}{11}\right)=12\frac{4}{11}-2\frac{2}{11}=10\frac{2}{11}.$$

За децималните броеви a, b, c важат:

1) комутативното својство $a+b=b+a$; $a\cdot b=b\cdot a$

2) асоцијативното својство $(a+b)+c=a+(b+c)$; $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

3) дистрибутивното својство на множењето во однос на собирање и одземање

$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

$(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$, $a>b$

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$, $b>c$

4) дистрибутивното својство на делење спрема собирање или одземање

$(a+b):c=a:c+b:c$

$(a-b):c=a:c-b:c$, $a>b$

Пример 9: Нека се дадени децималните броеви $a=5{,}4$; $b=4{,}2$; $c=1{,}2$.Тогаш важи:

1) комутативното својство за собирање и множење

$a+b=5{,}4+4{,}2=9{,}6$

$b+a=4{,}2+5{,}4=9{,}6$

$a\cdot b=5{,}4\cdot 4{,}2=22{,}68$

$b\cdot a=4{,}2\cdot 5{,}4=22{,}68$

2) асоцијативното својство за собирање и множење

$(a+b)+c=(5{,}4+4{,}2)+1{,}2=9{,}6+1{,}2=10{,}8$

$a+(b+c)=5{,}4+(4{,}2+1{,}2)=5{,}4+5{,}4=90{,}8$

$(a\cdot b)\cdot c=(5{,}4\cdot 4{,}2)\cdot 1{,}2=22{,}68\cdot 1{,}2=27{,}216$

$a\cdot(b\cdot c)=5{,}4\cdot(4{,}2\cdot 1{,}2)=5{,}4\cdot 5{,}04=27{,}216$

3) дистрибутивното својство на множење во однос на собирање и одземање

$(a+b)\cdot c=(5{,}4+4{,}2)\cdot 1{,}2=9{,}6\cdot 1{,}2=11{,}52$

$a\cdot c+b\cdot c=5{,}4\cdot 1{,}2+4{,}2\cdot 1{,}2=6{,}48+5{,}04=11{,}52$

$(a-b)\cdot c=(5{,}4-4{,}2)\cdot 1{,}2=1{,}2\cdot 1{,}2=1{,}44$

$a\cdot b-a\cdot c=5{,}4\cdot 1{,}2-4{,}2\cdot 1{,}2=6{,}48-5{,}04=1{,}44$

$a\cdot(b+c)=5{,}4\cdot(4{,}2+1{,}2)=5{,}4\cdot 5{,}4=29{,}16$

$a\cdot b+a\cdot c=5{,}4\cdot 4{,}2+5{,}4\cdot 1{,}2=22{,}68+6{,}48=29{,}16$

$a\cdot(b-c)=5{,}4\cdot(4{,}2-1{,}2)=5{,}4\cdot 3=16{,}2$

$a\cdot b-a\cdot c=5{,}4\cdot 4{,}2-5{,}4\cdot 1{,}2=22{,}68-6{,}48=16{,}2$

4) дистрибутивното својство на делење во однос на собирање и одземање

$(a+b):c=(5{,}4+4{,}2):1{,}2=9{,}6:1{,}2=8$

$a:c+b:c=5{,}4:1{,}2+4{,}2:1{,}2=4{,}5+3{,}5=8$

$(a-b):c=(5{,}4-4{,}2):1{,}2=1{,}2:1{,}2=1$

$a:c-b:c=5{,}4:1{,}2-4{,}2:1{,}2=4{,}5-3{,}5=1$

При решавање на посложени равенки може да користиме некој симбол со чија помош добиваме елементарна равенка.

Пример 10: $3{,}7-(x:0{,}4)=1{,}3$

Наместо $x:0{,}4$ ставаме симбол $\square$, па добиваме:

$3{,}7-\square=1{,}3$. Ова претставува елементарна равенка.

Сега: $\square=3{,}7-1{,}3$

$\square=2{,}4$, т.е.

$x:0{,}4=2{,}4$

Така: $x=2{,}4\cdot 0{,}4$

и конечно: $x=0{,}96$

Ниво Г

Ученикот треба да користи логичко следство

НИВО: АНАЛИЗА ,СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ

Нека $\frac{a}{b}$ е дропка, што значи дека целото е поделено на b делови, а земени се a делови.

Што значи $\frac{a}{b}$ од c?

	$\frac{a}{b}$			$\frac{a}{b}$				$\frac{a}{b}$	
$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{b}$		$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{b}$

$$\overbrace{\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\ldots+\frac{a}{b}}^{c\text{-пати}}=\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}$$

Заклучок: $\frac{a}{b}$ од c е $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}$.

Пример 1: $\frac{3}{5}m$ во dm е $\frac{3}{5}$ од 10, а тоа е $\frac{3}{5}\cdot 10=\frac{30}{5}=6\ dm$.

Можни се три случаи:

1) Ако $a\cdot c<b$, тогаш дропката $\frac{a\cdot c}{b}$ е правилна (чиста).

Пример 2: $\frac{3}{20}$ од 5 е $\frac{15}{20}$

2) Ако $a\cdot c=k\cdot b$, тогаш дропката е привидна.

Пример 3: $\frac{3}{20}$ од 40 е $\frac{3}{20}\cdot 40=\frac{120}{20}=6$

3) Ако $a\cdot c\geq b$, тогаш дропката е неправилна (нечиста).

Пример 4: $\frac{3}{7}$ од 5 е $\frac{3}{7}\cdot 5=\frac{15}{7}$

Ако $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ се две еднакви дропки, тогаш $a \cdot d = b \cdot c$.

Навистина, од $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ со проширување со d на дропката $\frac{a}{b}$ и со проширување со b на дропката $\frac{c}{d}$ добиваме $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$, од каде $a \cdot d = b \cdot c$.

Можно е и обратно, ако $a \cdot d = b \cdot c$,тогаш ad и bc може да бидат броители на две еднакви дропки на пример со именител bd . Значи, $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$,т.е. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Пример 5: Вредноста на x од равенството $\frac{2}{3} = \frac{x-1}{5}$ изнесува:

$$3(x-1) = 2 \cdot 5$$
$$3x - 3 = 10$$
$$3x = 13$$
$$x = \frac{13}{3}$$

Пример 6: Равенството $3x = 10$ може да се запише во вид на еднакви дропки:

$$3x = 2 \cdot 5$$
$$\frac{3x}{3 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 2}$$
$$\frac{x}{2} = \frac{5}{3}$$

Симболите □ , △ , ○ итн. (чувачи на место каде ќе дојде број или израз може да се користат повеќе пати).

Пример 7: Да се реши равенката:
$100 : (41{,}2 - 0{,}3x) = 2{,}5$

Решение: $41{,}2 - 0{,}3x$ го заменуваме со □, па добиваме:

100 : □ = 2,5, т.е. добиваме елементарна равенка.

Оттука: □ = 100:2,5

□ = 40

Сега: $41{,}2 - 0{,}3x = 40$. Ставаме △ = $0{,}3x$ и

Добиваме: $41{,}2 - \triangle = 40$

Така: △ = $41{,}2 - 40$

т.е.: $\triangle = 1{,}2$

На крај: $0{,}3x = 1{,}2$

$x = 1{,}2 : 0{,}3$

$x = 4$

Нека $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ се две дропки коишто треба да ги собереме. Тогаш:

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = a : c + b : c =$ (со примена на дистрибутивно својство)= $(a+b) : c = \frac{a+b}{c}$.

Слично е и за одземање: $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$, само овде треба $a > b$.

Дропките коишто немаат исти именители можат да се собираат или одземаат со правилото за собирање и одземање на дропки со исти именители, ако претходно се прошират до ист именител.

Значи, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$

Пример 8: $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15} = 1\frac{4}{15}$

Нека a, b, c, d и x се природни броеви. Тогаш важи комутативното, асоцијативното и дистрибутивното својство:

1) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{b}{c} + \frac{a}{c}$

2) $\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right) + \frac{c}{d} = \frac{a}{d} + \left(\frac{b}{d} + \frac{c}{d}\right)$

3) $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)x = \frac{ax}{c} + \frac{bx}{c}$

Навистина:

1) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} = \frac{b+a}{c} = \frac{b}{c} + \frac{a}{c}$

2) $\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right) + \frac{c}{d} = \frac{a+b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{d} = \frac{a+(b+c)}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b+c}{d} = \frac{a}{d} + \left(\frac{b}{d} + \frac{c}{d}\right)$

3) $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)x = \frac{a+b}{c}x = \frac{(a+b)x}{c} = \frac{ax+bx}{c} = \frac{ax}{c} + \frac{bx}{c}$

Бесконечниот децимален број 1,333.... има точен запис 1,(3), но не е погоден за примена.

Имаме: $1,(3) \approx 1,3$ со точност до 0,1

$1,(3) \approx 1,33$ со точност до 0,01

$1,(3) \approx 1,333$ со точност до 0,001

.

.

.

$$1,(3) = \frac{4}{3}$$

Значи дека бесконечниот периодичен децимален број 1,333... има точен запис $\frac{4}{3}$ и овој запис е погоден за примена.

Навистина, $x = 1,(3)$ и $10x = 13,(3)$

Имаме: $9x + x = 13,(3)$

$9x + 1,(3) = 13,(3)$

$9x = 12$

$x = \frac{4}{3}$ Значи, $1,(3) = \frac{4}{3}$.

Пример 9:

Ќе ја пресметаме точната вредност на бројниот израз: $\frac{2}{3} + 1,25 + 0,125.$

$$\frac{2}{3} = 0,(6) = 0,66...$$

Колку и да запишеме шестки добиваме приближен број,па мора да претвораме во дропки: $\frac{2}{3} + \frac{125}{100} + \frac{125}{1000} = \frac{2}{3} + \frac{5}{4} + \frac{3}{24} = \frac{59}{24}$

Ќе покажеме дека точниот запис на бесконечниот периодичен децимален број 0,999... е 1, т.е. 0,(9)=1.

Прв начин: Бесконечниот периодичен децимален број во пракса се применува со некоја точност.

$0,9 \approx 1$ со точност до 0,1

$0,99 \approx 1$ со точност до 0,01

$0,999 \approx 1$ со точност до 0,001

Значи, со која било точност $0,(9) = 0,999... = 1$, т.е. $0,(9) = 1$

Втор начин: Нека $x = 0,(9)$ и $10x = 9,(9)$.
Сега , $9x + x = 9,(9)$,т.е. $9x = 9$.
Значи, $x = 1$, т.е. $0,(9) = 1$

Грешката на заокружување ако бројот е бесконечен периодичен се одредува кога периодичниот број се претвора во дропка.

Пример 10: Заокружи го бројот 1,(3) со точност до две децимали и одреди ја грешката на заокружување.

Решение: $1,(3) \approx 1,33$

$1,3 = \frac{4}{3}$; $1,33 = \frac{133}{100}$

$\frac{4}{3} - \frac{133}{100} = \frac{400-399}{300} = \frac{1}{300}$. Значи,грешката е $\frac{1}{300}$.

ЗАДАЧИ ОД НИВО **В** И НИВО **Г**

Со користење на задачите подолу, наставникот може да направи проверка на знаењата на ученикот кои се на ниво примена, анализа, синтеза и вреднување. Задачите може да ги користат учениците за самооценување, а и родителите може да го проверат нивото на стекнатите знаења.

1. Запиши $15\,cm$ во m.

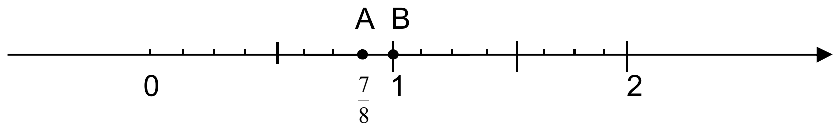
2. Запиши $\frac{3}{25}\,kg$ во g.

3. Во едно одделение има 36 ученици. $\frac{2}{3}$ од нив се момчиња од кои четвртината се родени во првите три месеци од годината. Колку момчиња не се родени во првите три месеци од годината?

4. Запиши ги сите нескратливи правилни дропки со именител 12.

5.Одреди го x од равенството $\frac{2}{9}=\frac{x}{81}$ со помош на:
а) проширување на дропки; б) кратење на дропки; в) со правило на еднаквост на дропки.

6. На бројната права претставени се броевите $\frac{7}{8}$ и 1. Претстави ги броевите $\frac{3}{8}$ и $\frac{11}{8}$.



7. Одреди ја вредноста на x од $\frac{7}{2}=\frac{x+1}{4}$.

8. Напиши барем една еднаквост на дропки од која се добива $2x=15$.

9. Пресметај го периметарот на правоаголник со страни $a=m+n$ и $b=m-n$,ако $m=3\frac{5}{7}$. 10. Периметарот на еден правоаголник е $11\frac{4}{15}$. Одреди ги страните на правоаголникот ако тие се разликуваат за $\frac{2}{15}\,cm$.

11. Еден ученик во првиот ден прочитал $\frac{3}{11}$ од една книга, во вториот уште $\frac{5}{11}$, а во третиот уште $\frac{2}{11}$. Колкав дел од книгата му останал непрочитан?
Реши ја задачата и со користење на отсечки.

12. П окажи дека важи својството $\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\right)\cdot x=\frac{ax}{c}-\frac{bx}{c}$.

13. Ана,Елена и Игор од својата баба Марија добиле по една чоколада.
Ана изела $\frac{3}{5}$ од својата чоколада, Елена $\frac{4}{5}$ од својата чоколада и Игор изјавил: „Јас од мојата чоколада изедов повеќе од Ана, а помалку од Елена и тоа е единствената можност“. Кој дел од чоколадата му останал на Игор?

14. Меѓу $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{5}$ најди барем една дропка со именител 30.

15. Одреди дропка која е за $1\frac{2}{13}$ помала од разликата на дропките $7\frac{5}{13}$ и $4\frac{1}{13}$.

16. Одреди ја разликата на броевите $5\frac{2}{7}-3\frac{5}{7}$.

17. Пресметај ја вредноста на изразот $2\frac{3}{5}+4\frac{1}{5}-3\frac{2}{5}$:

а) со претворање во неправилна дропка;
б) без претворање во неправилна дропка.

18. Реши ги равенките:

а) $\left(3\frac{1}{5}-x\right)+1\frac{2}{5}=3\frac{4}{5}$ б) $5\frac{3}{8}-\left(x-1\frac{1}{8}\right)=4\frac{5}{8}$

19. Оливер од баба му добил шеќерна табла и почнал да ја дели на следниот начин: Половина од таблата земал за него, половина од остатокот му дал на брат му Томе, а половина од новиот остаток му дал на другар му Екрем и се замислил: Кога би продолжил да ја делам шеќерната табла на овој начин, тогаш:
1) За колку време ќе ја поделам шеќерната табла?
2) Може ли сите деца на светот да добијат дел?
3) Дали ќе ми остане дел од шеќерната табла?
Помогни му на Оливер во одговорот.

20. Пресметај со точност до 0,001:
а) $\frac{2}{5}+2,(3)$ б) $\frac{3}{8}+2,(7)$ в) $2,(7)+3,(2)$

21. Бројот $\frac{2}{5}$ претвори го во децимална дропка со именител: 10,100,1000,10000, а потоа добиените децимални дропки запиши ги како децимални броеви.
Одреди го бројот на елементите на множеството децимални броеви.

22. Збирот на броевите $4{,}89$ и $3{,}52$ намали го за бројот $5{,}343$.

23. Кон бројот $40{,}22$ додај ја разликата на броевите 25,03 и 17,007.

24. Пресметај ја вредноста на изразот $0{,}72:1{,}2+2{,}375\cdot 100-1{,}2\cdot 2{,}0125$ и заокружи ја со точност до 0,01.

25. Колку пати количникот од броевите $4{,}5$ и $0{,}5$ е поголем од нивниот производ?

26 .Одреди го бројот на плочки во правоаголна форма со димензии $7{,}2\ cm$ и $3{,}2\ cm$ што се потребни за поплочување на под чија плоштина е $23{,}04\ m^2$.

27. Буквата замени ја со број за да добиеш точно равенство:

а) $15=\frac{15}{m}$ б) $9=\frac{n}{3}$ в) $7=\frac{p}{7}$ г) $1=\frac{64}{q}$

28.Едно шише и сокот во него заедно имаат маса од $230{,}4g$,а разликата од нивните маси е $40{,}6g$.Колку грама има сок во шишето?

ЗАДАЧИ ШТО СЕ РЕШАВААТ НА ПОВЕЌЕ НАЧИНИ

Задача 1. **Ивица отпил 1/6 од полна шолја црно кафе и ја дополнил со млеко правејќи бело кафе. Потоа отпил 1/3 од таа шолја и одново ја дополнил со млеко. Повторно отпил 1/2 од шолјата и ја дополнил до врвот. На крај ја испил сета течност од шолјата. Што испил повеќе Ивица, кафе или млеко?**

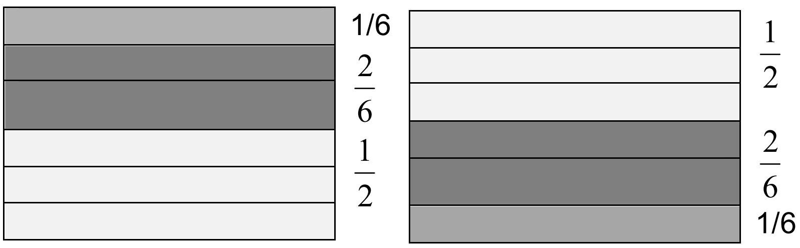
Решенија:

I начин: Аритметички

Ивица дополнувал 3 пати, т.е. $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=1$, што значи дека испил подеднакво кафе и млеко по една шолја.

II начин: Графички

отпил доставил



млеко кафе

Ивица испил подеднакво кафе и млеко по една шолја.

Задача 2. **Одреди колку денари чини гума, а колку денари чини молив ако е познато дека 3 гуми и 2 молива заедно чинат 16,6 денари а разликата меѓу цената на гумата и моливот е 2,2 денари.**

Решенија

I начин:

Варијанта 1: Нека со **Г** ја означиме цената на една гума, а со **М** цената на еден молив. Според условот на задачата имаме 3**Г** + 2**М** = 16,6 и **Г** – **М** = 2,2.
Од **Г** – **М** = 2,2 имаме **Г** = 2,2 +**М** . Значи 3(**М** + 2,2) + 2 **М** = 16,6 или 5**М** + 6,6 = 16,6, т.е. 5**М** = 10, односно **М** = 2 денари. Оттука, моливот чини 2 денари, а гумата чини 4,2 денари.

Варијанта 2: Од 3**Г** + 2**М** = 16,6 имаме 3**Г** + 5**М** -3**М** = 16,6, а со примена на асоцијативниот и дистрибутивниот закон добиваме 3(**Г** – **М**) + 5**М** = 16,6.
Добиваме 6,6 + 5**М** = 10 т.е. 5**М** = 10, односно **М** = 2. Значи моливот чини 2 денари, а гумата чини 4,2 денари.

Варијанта 3: Од **Г** – **М** = 2,2 добиваме 2**Г** – 2**М** = 4,4 т.е. 2**М** = 2**Г** – 4,4.
Сега 3**Г** + 2**Г** – 4,4 = 16,6, т.е. 5**Г** = 20,4, односно **Г** = 4,2. Значи моливот чини 2 денари, а гумата чини 4,2 денари.

Варијанта 4: Од 3**Г** + 2**М** = 16,6 добиваме 1,5 **Г** + **М** = 8,3 и од **Г** – **М** = 2,2 добиваме 1,5 x 2,2 + 1,5**М** + **М** = 8,3 т.е. 2,5 **М** = 5, односно **М** = 2. Значи моливот чини 2 денари, а гумата чини 4,2 денари.

Варијанта 5: Од 3**Г** + 2**М** = 16,6 добиваме **Г** + $\frac{2}{3}$ **М** = $\frac{1}{3}\cdot 16,6$ и од **Г** – **М** = 2,2 добиваме

$\frac{5}{3}$ **М** = $\frac{1}{3}\cdot$ 16,6 - 2,2. Оттука 5**М** = 10, односно **М** = 2. Значи моливот чини 2 денари, а гумата чини 4,2 денари.

Варијанта 6: Од 3**Г** + 2**М** = 16,6 и од 3**Г** – 3**М** = 6,6 добиваме 6,6 + 5**М** = 16,6 од каде 5**М** = 10, односно **М** = 2. Значи моливот чини 2 денари, а гумата чини 4,2 денари.

Варијанта 7: Од 3**Г** + 2**М** = 16,6 и од **Г** – **М** = 2,2 добиваме 4**Г** + **М** = 12,8.
Од 4**Г** + **М** = 12,8 и од **Г** –**М** = 2,2 добиваме 5**Г** = 21, односно моливот е 2 денари, а гумата е 4,2 денари
.

II начин: Нека ✎ е моливот, а ▭ е гумата. Според условот на задачата имаме:

▭▭▭ + ✎✎ = 16,6

▭ – ✎ = 2,2 . Добиваме

▭▭▭▭ + ✎ = 18,8

▭ – ✎ = 2,2. Оттука,

▭▭▭▭▭ = 21 т.е. ▭ = 4,2

Сега 4,2 - ✎ = 2,2 т.е. ✎ = 2. Значи моливот чини 2 денари, а гумата чини 4,2 денари.

Задача 3. **Одреди го збирот на мешаните броеви $2\frac{2}{5}$ и $3\frac{1}{5}$**

Решенија

I начин:

Варијанта 1: $2+\frac{2}{5}+3\frac{1}{5}=(2+3)\frac{2+1}{5}=5\frac{3}{5}$

Варијанта 2: $2\frac{2}{5}+3\frac{1}{5}=\frac{12}{5}+\frac{16}{5}=\frac{28}{5}=5\frac{3}{5}$

Варијанта 3: $2\frac{2}{5}+3\frac{1}{5}=\frac{12}{5}+3\frac{1}{5}=3+\frac{12+1}{5}=3+\frac{13}{5}=3+2\frac{3}{5}=5\frac{3}{5}$

Варијанта 4: $2\frac{2}{5}+3\frac{1}{5}=2\frac{2}{5}+\frac{16}{5}=2+\frac{18}{5}=2+3\frac{3}{5}=5\frac{3}{5}$

Варијанта 5: $2\frac{2}{5}+3\frac{1}{5}=(2+3)+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=5+0,4+0,2=5+0,6=5+\frac{6}{10}=5\frac{3}{5}$

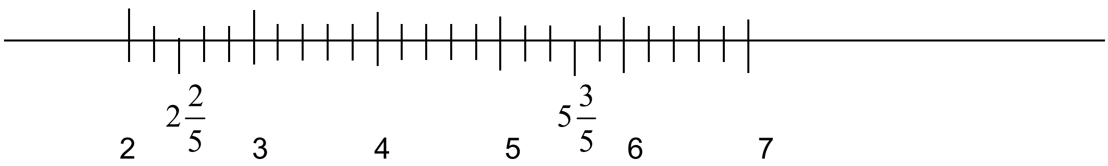
Варијанта 6: $2\frac{2}{5}+3\frac{1}{5}=2,4+3,2=5,6=5\frac{6}{10}=5\frac{3}{5}$

Варијанта 7: $2\frac{2}{5}+3\frac{1}{5}=2,4+3+\frac{1}{5}=5,4+\frac{1}{5}=5\frac{4}{10}+\frac{1}{5}=5\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=5\frac{3}{5}$

Варијанта 8: $2\frac{2}{5}+3\frac{1}{5}=2+\frac{2}{5}+3,2=5,2+\frac{2}{5}=5\frac{2}{10}+\frac{2}{5}=5\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=5\frac{3}{5}$

Варијанта 9: $2\frac{2}{5}+3\frac{1}{5}=2+\frac{2}{5}+3,2=5+\frac{2}{5}+0,2=5\frac{2}{5}+\frac{2}{10}=5\frac{3}{5}$

II начин: Графички на бројна права:



III начин: $\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{\frac{1}{5}}\ \boxed{\frac{1}{5}} + \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{\frac{1}{5}} =$

$= \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{\frac{1}{5}}\ \boxed{\frac{1}{5}}\ \boxed{\frac{1}{5}} = 5\frac{3}{5}$

Задача 4. **Скрати ја дропката** $\frac{30030}{60060}$

<u>Рершенија:</u>

I начин: Со НЗД (30030, 60060) = 30030; кратиме со 30030, т.е. $\frac{30030}{60060}=\frac{1}{2}$

II начин:

Варијанта 1: Со прости заеднички делители т.е. со 2, 3, 5, 7, 11 и 13

$$\frac{30030}{60060}\ (\text{кратиме со } 2) = \frac{15015}{30030}\ (\text{кратиме со } 3) = \frac{5005}{10010}\ (\text{кратиме со } 5)$$
$$= \frac{1001}{2002}\ (\text{кратиме со } 7) = \frac{143}{286}\ (\text{кратиме со } 11) = \frac{13}{26}\ (\text{кратиме со } 13) = \frac{1}{2}$$

Варијанта 2: Со заеднички делители, т.е.

$$\frac{30030}{60060}\,(\textit{кратиме со } 22) = \frac{1365}{2730}\,(\textit{кратиме со } 39) = \frac{35}{70}\,(\textit{кратиме со } 35) = \frac{1}{2}$$

Варијанта 3: Со заеднички делители т.е.

$$\frac{30030}{60060}\ (\text{кратиме со } 77) = \frac{390}{780}\ (\text{кратиме со } 39) = \frac{10}{20}\ (\text{кратиме со } 10) = \frac{1}{2}$$

Варијанта 4: Со заеднички делители т.е.

$$\frac{30030}{60060}(\text{кратиме со } 10) = \frac{3003}{6006}(\text{кратиме со } 1001) = \frac{3}{6}(\text{кратиме со } 3) = \frac{1}{2}\ \text{итн.}$$

Задача 5. **Одреди го збирот** $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}$

Решенија:

Варијанта 1:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{30}{60}+\frac{10}{60}+\frac{5}{60}+\frac{3}{60}+\frac{2}{60}=$$
$$=\frac{50}{60}\,(\textit{кратиме со } 10)=\frac{5}{6}$$

Варијанта 2:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{15}=$$
$$=\frac{1}{2}\,(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15})=\frac{1}{2}\left(\frac{30}{30}+\frac{10}{30}+\frac{5}{30}+\frac{3}{30}+\frac{2}{30}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{50}{30}=\frac{5}{6}$$

Варијанта 3:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\frac{5-4}{4\cdot 5}+\frac{6-5}{5\cdot 6}=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

Варијанта 4: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{1}{2}+\frac{1}{30}+\frac{1}{6}+\frac{1}{20}+\frac{1}{12}=$
$=\frac{15+1}{30}+\frac{10+3}{60}+\frac{1}{12}=\frac{32}{60}+\frac{13}{60}+\frac{5}{60}=\frac{50}{60}=\frac{5}{6}$

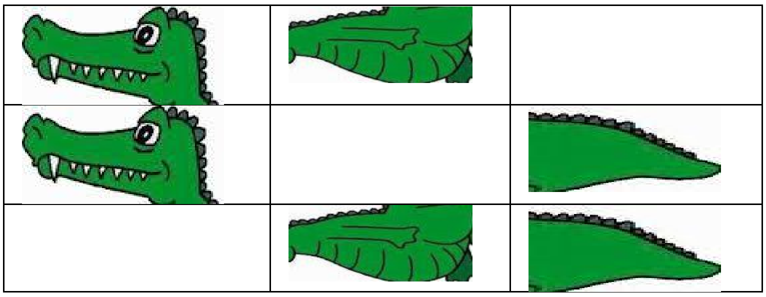
Варијанта 5: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{25}+\frac{3}{50}\right)=$
$\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{30}{50}+\frac{10}{50}+\frac{5}{50}+\frac{2}{50}+\frac{3}{50}\right)=\frac{5}{6}\cdot\frac{50}{50}=\frac{5}{6}\,итн.$

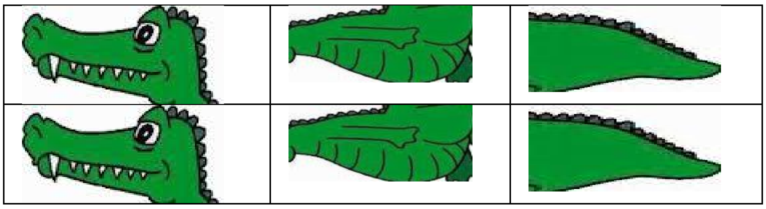
Задача 6. **Колку е долг еден крокодил ако за него е познато дека главата и телото заедно имаат 12,6 dm; главата и опашката заедно имаат 12,8 dm и телото и опашката заедно имаат 12,4 dm?**

Решенија:
I начин: Алгебарски
Г+Т=12,6
Г+О=12,8
Т+О=12,4
Значи, 2(Г+Т+О)=37,8 , т.е. 2К=37,8 ,од каде 1К=18,9.
Добивме дека крокодилот е долг 18,9 dm.

II начин: Логички
Може да запишеме:
Г+Т=12,6
Г+О=12,8
Т+О=12,4
Од првите две равенства добиваме : 2Г+12,4=25,4, т.е. 2Г=13.
Значи, Г=6,5 dm.
Сега Т=12,6-6,5=6,1dm. Потоа О=12,8-6,5=6,3 dm.
Добиваме дека крокодилот е долг 18,9 dm.

III начин: Геометриски





Се добиваат 2 крокодила , долги 37,8 dm.

Значи, крокодилот е долг 18,9 dm.

СПЕЦИФИКАЦИСКА МРЕЖА НА ТЕСТОТ

(Во спецификациската мрежа се дадени бројот на задачите по содржини и по нивоа, како и нивната процентуална застапеност)

	Содржини	Број на часови	А Познавање	Б Разбирање	В Примена, анализа, синтеза, вреднување	Проценти	Задачи
I	Дропки. Видови дропки. Претставување на дропки. Еднаквост	8	2	2	2	20%	6
II	Операции со дропки	6	1	2	2	15%	5
III	Децимални броеви. Својства	6	2	2	1	15%	5
IV	Операции со децимални броеви	14	3	4	3	35%	10
V	Претворање на дропки во децимални броеви и заокружување на децимални броеви	6	1	2	1	15%	4
	Процент		**30%**	**40%**	**30%**	**100%**	
	Задачи		**9**	**12**	**9**		**30**

ТЕМАТСКИ ТЕСТ

1 Дропката $\frac{2}{5}$ проширена со 3 изнесува:

А. $\frac{6}{5}$ Б. $\frac{2}{15}$ В. $\frac{6}{15}$ Г. $\frac{2}{5}\cdot 3$

2 Одговори колку неправилни дропки има во множеството $\left\{\frac{2}{3},\frac{3}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{6}{3}\right\}$.

А. 2 Б. 3 В. 4 Г. 5

3 По кратењето на дропката $\frac{12}{42}$ со НЗД (12,42) се добива дропката:

А. $\frac{6}{21}$ Б. $\frac{2}{7}$ В. $\frac{1}{4}$ Г. $\frac{4}{14}$

4 Колку правилни дропки има со именител 12?

А. 1 Б. 2 В. 11 Г. 12

5 Вредноста на x во равенството $\frac{4}{9}=\frac{x}{81}$ изнесува:

А. 36 Б. 13 В. 85 Г. 90

6 Колку нескратливи правилни дропки има со именител 12?

А. 1 Б. 2 В. 3 Г. 4

7 Збирот на дропките $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$ изнесува:

А. $\frac{4}{9}$ Б. $\frac{4}{6}$ В. $1\frac{1}{9}$ Г. $\frac{4}{3}$

8 Вредноста на изразот $3\frac{2}{11}+\frac{5}{11}-2\frac{4}{11}$ е:

А. $1\frac{3}{11}$ Б. $\frac{13}{11}$ В. $\frac{3}{11}$ Г. $1\frac{3}{33}$

9 Разликата $3\frac{2}{5}-1\frac{3}{5}$ изнесува:

А. $1\frac{5}{5}$ Б. $1\frac{4}{5}$ В. $1\frac{5}{0}$ Г. $2\frac{1}{5}$

10 Вредноста на изразот $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}-\frac{4}{11}$ е:

А. $\frac{3}{3}$ Б. $\frac{3}{7}$ В. $\frac{7}{11}$ Г. $\frac{71}{77}$

11 Игор има $10\frac{5}{12}$ години, а Ајше има $8\frac{1}{12}$. Колку години Игор ќе биде постар од Ајше по $11\frac{11}{12}$ години?

А. $11\frac{11}{12}$ Б. $21\frac{16}{12}$ В. $19\frac{12}{12}$ Г. $2\frac{4}{12}$

12 Децималната дропка $3\frac{7}{1000}$ запишана во децимален број е:

А. $3{,}7$ Б. $3{,}07$ В. $3{,}007$ Г. $3{,}0007$

13 Колку најмногу нули може да се изоставаат така што вредноста на децималниот број 0,10101000 нема да се промени?

А. 3 Б. 4 В. 5 Г. 6

14 Природниот број 8 запишан како децимален број со три децимални места е:

А. $8{,}00$ Б. $8{,}3$ В. $8{,}33$ Г. $8{,}000$

15 Кој знак треба да се стави во кружчето за да биде точно $8{,}9 \bigcirc 8{,}10$?

А. $\leq$ Б. $>$ В. $<$ Г. $=$

16 Нека со точките А и В на бројната права се претставени броевите 0,6 и 0,60. Тогаш за точките А и В важи:

А. А се совпаѓа со В Б. А е лево од В
В. А е десно од В Г. В е подалеку од А за 0,54

17 Разликата од децималните броеви 23,7 и 5,792 е:

А. $18{,}092$ Б. $17{,}908$ В. $18{,}408$ Г. $17{,}092$

18 Бројот на децималите на производот од броевите 0,7 и 0,08 изнесува:

А. 1 Б. 2 В. 3 Г. 4

19 Најмалиот број на децимали на произвдот 0,5 и 0,08 е:

А. 1 Б. 2 В. 3 Г. 4

20 При делењето на конечни децимални броеви **НЕ** може да се добие:

А. природен број Б. бесконечен периодичен децимален број
В. конечен децимален број Г. бесконечен непериодичен децимален број

21 По множењето на бројот 0,001 со 1000 се добива:

А. 1 Б. $0{,}01$ В. $0{,}001$ Г. $0{,}001000$

22 Зорица имала 5 000 денари. За ролери потрошила 0,75 од парите, а за тетратки 0,05 од парите. Колку денари ѝ останале на Зорица?

А. 250 Б. 500 В. 750 Г. 1000

23 Точниот збир на броевите 0,(3) и $\frac{1}{2}$ е:

А. $0{,}8$ Б. $0{,}83$ В. $\frac{5}{6}$ Г. $\frac{4}{5}$

24 Еден патник за 4 часа поминал 18,216 km. За еден час просечно поминувал:

А. $4{,}054\ km$ Б. $4{,}504\ km$ В. $4{,}554\ km$ Г. $4{,}004\ km$

25 Решение на равенката $1{,}2 : x = 1{,}2$ е бројот:

А. 0 Б. 1 В. $1{,}2$ Г. $1{,}44$

26 Ако кон некој број се додаде 2,2 ќе се добие број 1,1 пати помал од бројот 5,5. Бараниот број се одредува од изразот:

А. $5{,}5 : 1{,}1 - 2{,}2$ Б. $5{,}5 : 1{,}1 + 2{,}2$ В. $5{,}5 + 2{,}2 - 1{,}1$ Г. $5{,}5 - 1{,}1 - 2{,}2$

27 Која од дропките е конечен децимален број?

А. $\frac{2}{3}$ Б. $\frac{7}{8}$ В. $\frac{3}{11}$ Г. $\frac{1}{6}$

28 Конечниот децимален број 0,125 е дропката:

А. $\frac{125}{10}$ Б. $\frac{1}{125}$ В. $\frac{1}{8}$ Г. $\frac{125}{100}$

29 Децималниот број 0,(37) заокружен со точност до 0,001 е:

А. $0{,}374$ Б. $0{,}373$ В. $0{,}373737$ Г. $0{,}37$

30 Која од дропките го претставува децималниот број 2,3(3)?

А. $2\frac{33}{100}$ Б. $2\frac{3}{10}$ В. $2\frac{1}{33}$ Г. $2\frac{1}{3}$

Клуч

	Решение		Решение
1.	В	16.	А
2.	А	17.	Б
3.	Б	18.	В
4.	В	19.	Б
5.	А	20.	Г
6.	Г	21.	А
7.	Г	22.	Г
8.	А	23.	В
9.	Б	24.	В
10.	В	25.	Б
11.	Г	26.	А
12.	В	27.	Б
13.	А	28.	В
14.	Г	29.	А
15.	Б	30.	Г

Скала за вреднување на резултатите од тестот:
(секоја задача се вреднува со по 1 поен)

ОСВОЕНИ ПОЕНИ	ОЦЕНКА
0-7	Недоволен (1)
8-11	Доволен (2)
12-19	Добар (3)
20-23	Многу добар (4)
24-30	Одличен(5)

ТЕМА 4: МЕРЕЊЕ И РАБОТА СО ПОДАТОЦИ

Ниво А

Ученикот треба да знае дека…

НИВО: ПОМНЕЊЕ

За мерните единици за должина важи следната табела:

Табела 1

ПОГОЛЕМИ МЕРНИ ЕДИНИЦИ		
декаметар (dam) $1\ dam=10\ m$ $(1\ m=0{,}1\ dam)$	хектометар (hm) $1\ hm=100\ m$ $(1\ m=0{,}01\ hm)$	километар (km) $1\ km=1000\ m$ $(1\ m=0{,}001\ km)$
ОСНОВНА МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА ДОЛЖИНА Е **МЕТАР** m		
милиметар (mm) $(1\ mm=0{,}001\ m)$ $1\ m=1000\ mm$	центиметар (cm) $(1\ cm=0{,}01\ m)$ $1\ m=100\ cm$	дециметар (dm) $(1\ dm=0{,}1\ m)$ $1\ m=10\ dm$
ПОМАЛИ МЕРНИ ЕДИНИЦИ		

Пример 1:

$$5\ mm=5\cdot 0{,}001=0{,}005\ m$$
$$7cm=7\cdot 0{,}01=0{,}07m$$
$$8\ dm=8\cdot 0{,}1=0{,}8\ m$$
$$3\ dam=3\cdot 10=30\ m$$
$$2\ hm=2\cdot 100=200\ m$$
$$9\ km=9\cdot 1000=9000\ m$$

За мерните единици за маса важи следната табела:

Табела 2

ПОГОЛЕМИ МЕРНИ ЕДИНИЦИ					
тон (t) $1\ t=1000kg$					
ОСНОВНА МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА МАСА Е **КИЛОГРАМ** (kg)					
хектограм (hg) $(1\ hg=0{,}1\ kg)$ $1\ kg=10\ hg$	декаграм (dag) $(1\ dag=0{,}01\ kg)$ $1\ kg=100\ dag$	грам (g) $(1\ g=0{,}001kg)$ $1\ kg=1000\ g$	дециграм (dg) $(1\ dg=0{,}0001\ kg)$ $1\ kg=10000dg$	центиграм (cg) $(1\ cg=0{,}00001\ kg)$ $1\ kg=100000cg$	милиграм (mg) $(1\ mg=0{,}000001\ kg)$ $1\ kg=1000000g$
ПОМАЛИ МЕРНИ ЕДИНИЦИ					

Пример 2:

$$5\ t = 3 \cdot 1000 = 3000\ kg$$
$$5\ hg = 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5\ kg$$
$$7\ dag = 7 \cdot 0{,}01 = 0{,}07\ kg$$
$$8\ g = 8 \cdot 0{,}001 = 0{,}008\ kg$$
$$4\ dg = 4 \cdot 0{,}0001 = 0{,}0004\ kg$$
$$2\ cg = 2 \cdot 0{,}00001 = 0{,}00002\ kg$$
$$6\ mg = 6 \cdot 0{,}000001 = 0{,}000006\ kg$$

За мерните единици за течност важи следната табела:

Табела 3

ПОГОЛЕМИ МЕРНИ ЕДИНИЦИ		
декалитар (dal) $1\ dal = 10\ l$ $(1\ l = 0{,}1\ dal)$	хектолитар (hl) $1\ hl = 100\ l$ $(1\ l = 0{,}01\ hl)$	килолитар (kl) $1\ kl = 1000\ l$ $(1\ l = 0{,}001\ kl)$
ОСНОВНА МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА ТЕЧНОСТ Е **ЛИТАР** l		
милилитар (ml) $(1\ ml = 0{,}001\ l)$ $1\ l = 1000\ ml$	центилитар (cl) $(1\ cl = 0{,}01\ l)$ $1\ m = 100\ cm$	децилитар (dl) $(1\ dl = 0{,}1\ l)$ $1\ l = 10\ dl$
ПОМАЛИ МЕРНИ ЕДИНИЦИ		

Пример 3:

$$5\ ml = 3 \cdot 0{,}001 = 0{,}003\ l$$
$$2\ cl = 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}02\ l$$
$$4\ dl = 4 \cdot 0{,}1 = 0{,}8\ l$$
$$7\ dal = 7 \cdot 10 = 30\ l$$
$$8\ hl = 8 \cdot 100 = 200\ l$$
$$5\ kl = 5 \cdot 1000 = 9000$$

За мерните единици за време важи следната табела:

Табела 4

ПОГОЛЕМИ МЕРНИ ЕДИНИЦИ							
минута $(\min)$ $1\min = 60\ s$ $\left(1\ s = \frac{1}{60}\min\right)$	час (h) $1\ h = 3600\ s$ $\left(1\ s = \frac{1}{3600}\ h\right)$	ден (d) $1\ d = 24\ h$ $\left(1\ h = \frac{1}{24}\ d\right)$	седмица 1сед= $7\ d$ ($1\ d = \frac{1}{7}$ сед)	месец 1 м= $30\ d$ ($1\ d = \frac{1}{30}$ м)	година 1 г=12 м (1 м= $\frac{1}{12}$ г)	деценија 1 дец=10 г (1 г= $\frac{1}{10}$ дец)	век 1век=100г
ОСНОВНА МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА ВРЕМЕ Е **СЕКУНДА** (s)							

Пример 4:

$5\ \min = 5 \cdot 60 = 300\ s$

$2\ h = 2 \cdot 3600 = 7200\ s$

$3\ d = 3 \cdot 24 = 72\ h$

4 сед=$4 \cdot 7 = 28\ d$

3 м=$3 \cdot 30 = 90\ d$

5 г=$5 \cdot 12 = 60$ м

8 дец=$8 \cdot 10 = 80$ г

3 века=$3 \cdot 100 = 300$ г

Основна мерна единица за температура е келвин (К).
Се користи и мерната единица степен Целзиусов $\left({}^{\circ}C\right)$.
Водата мрзне на $0^{\circ}C$, врие на $100^{\circ}C$.
Врската меѓу степени Целзиусови и келвини е изразена со:

$$T^{\circ}K = t^{\circ}C + 273{,}16$$

Значи, водата мрзне на $273{,}16K$, а врие на $373{,}16K$.

Пример 5: 20° изразени во келвини е $T(K) = 20^{\circ} + 273{,}16 = 293{,}16K$

$t^{\circ}(C) = 0(K) - 273{,}16 = -273{,}16^{\circ}C$ што значи дека $-273{,}16^{\circ}C = 0(K)$ и се вика апсолутна нула.

За именуваните броеви важи следната табела:

именуван број			
мерен број или неименуван број	пример: 7	пример: kg	мерна единица или едноимен број
Иста мерна единица значи истоимен број			
Повеќеимен број е збир од два и повеќе едноимени броеви од ист вид			

Пример 6: Од дадените броеви: 3 m, 5 km, 46 m, 7 km, 20 kg, 10 l , истоимени се броевите: 3 m и 46 m.Броевите: 3 m и 7k m се именувани броеви од ист вид,
т.е. повеќеимен број.
Значи, бројот 5 m е едноимен,а бројот 5 m и 3 cm е повеќеимен број.

За мерните единици за плоштина важи следната табела:

Табела 5

ПОГОЛЕМИ МЕРНИ ЕДИНИЦИ		
квадратен декаметар (dam^2) $1\ dam^2=100\ m^2$	квадратен хектометар (hm^2) $1\ hm^2=10000\ m^2$	квадратен километар (km^2) $1\ km^2=1000000\ m^2$
ОСНОВНА МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА ТЕЧНОСТ Е **КВАДРАТЕН МЕТАР** (m^2)		
квадратен милиметар (mm^2) $1\ mm^2=0{,}000001m^2$	квадратен центиметар (cm^2) $1\ cm^2=0{,}0001m^2$	квадратен дециметар (dm^2) $1\ dm^2=0{,}01\ m^2$
ПОМАЛИ МЕРНИ ЕДИНИЦИ		

Пример 7:

$3\ mm^2=3\cdot 0{,}000001=0{,}000003\ m^2$

$5\ cm^2=3\cdot 0{,}0001=0{,}0005\ m^2$

$7dm^2=7\cdot 0{,}01=0{,}07m^2$

$8\ dam^2=8\cdot 100=800\ m^2$

$4\ hm^2=4\cdot 10000=40000\ m^2$

$2\ km^2=2\cdot 1000000=2000000\ m^2$

За мерните единици за волумен важи следната табела:

Табела 6

ПОГОЛЕМИ МЕРНИ ЕДИНИЦИ		
кубен декаметар (dam^3) $1\ dam^3=1000\ m^3$	кубен хектометар (hm^3) $1\ hm^3=1000000\ m^3$	кубен километар (km^3) $1\ km^3=1000000000\ m^3$
ОСНОВНА МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА ТЕЧНОСТ Е **КВАДРАТЕН МЕТАР** (m^2)		
кубен милиметар (mm^3) $1\ mm^3=0{,}000000001\ m^3$	кубен центиметар (cm^3) $1\ cm^3=0{,}000001\ m^3$	кубен дециметар (dm^3) $1\ dm^3=0{,}001m^3$
ПОМАЛИ МЕРНИ ЕДИНИЦИ		

Пример 8:

$2\ mm^3=2\cdot 0{,}000000001=0{,}000000002\ m^3$

$5\ cm^3=5\cdot 0{,}000001=0{,}000005\ m^3$

$7\ dm^3=7\cdot 0{,}001=0{,}007\ m^3$

$8\ dam^3=8\cdot 1000=8000\ m^3$

$3\ hm^3=3\cdot 1000000=3000000\ m^3$

$4\ km^3=4\cdot 1000000000=4000000000\ m^3$

Волуменот (V) на квадарот е еднаков на производот од должината (означена со a),
ширината (означена со b) и висината (означена со c) дадени во иста мерна единица, т.е. $V = a \cdot b \cdot c.$

Волуменот (V) на коцка со должина (a), ширина (a) и висина (a) е $V = a^3.$

Пример 9: Пресметај го волуменот на:
а) квадар со рабови: $3\,cm, 4\,cm, 5\,cm$
б) коцка со раб: $10\,cm$

Решение:а) $V = a \cdot b \cdot c = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60\,cm^3$ б) $V = a^3 = 10^3 = 1000\,cm^3$

Прибирањето податоци се врши со анкетирање, набљудување, мерење, броење и др.

Инструменти (средства) за прибирање податоци се: анкетен лист, прашалници , прегледи итн.

Пример 10: Игор и Маја се ученици од VI одд. и со анкетен лист извршиле анкетирање на своите соученици и на самите себе, со кој спорт се занимава секој од нив. Прибраните податоци ги претставиле во табелата:

спорт	број
кошарка	8
тенис	14
фудбал	16
ракомет	2

Табелата во која се претставени податоците е табела на фреквенции.

Аритметичка средина на два или повеќе броеви е количникот од збирот на тие броеви и бројот на собироците.

Пример 11: Аритметичката средина за податоците од претходниот пример изнесува: $\frac{8+14+16+2}{4} = 10.$ Значи, секој спорт го спортуваат по 10 ученици.

Сликовен дијаграм е начин на претставување податоци со користење на слики или симболи.

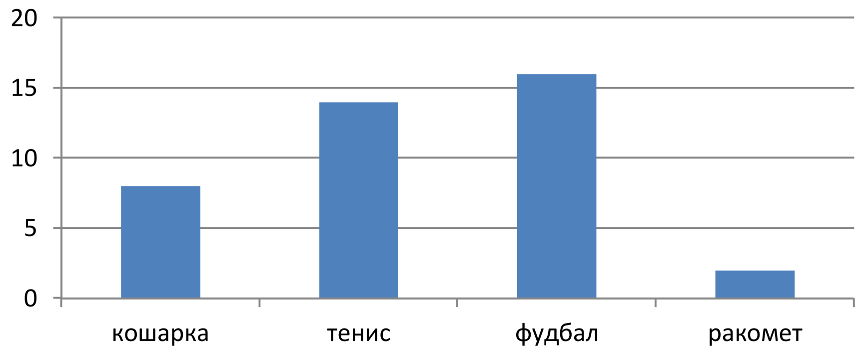
Пример 12: Податоците од примерот 10 може да ги претставиме со следниот сликовен дијаграм:

спорт	број на ученици
кошарка	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
тенис	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
фудбал	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
ракомет	☺ ☺

Столбестиот дијаграм има две оски хоризонтална и вертикална. На едната се запишуваат имињата кои се однесуваат на податоците, а на другата оска се запишува видот на единицата мерка.

Се запишува и насловот на столбестиот дијаграм.

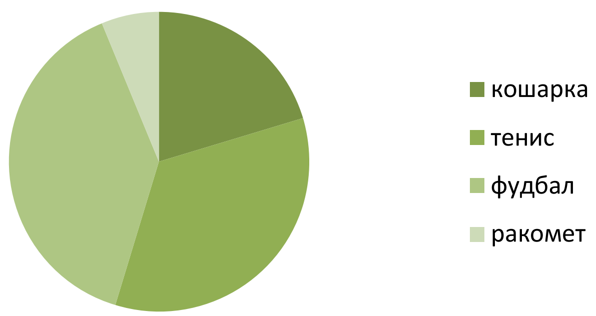
Пример 12: Податоците од примерот 10 може да ги претставиме со следниот столбест дијаграм:



Секторскиот дијаграм го кажува соодносот меѓу деловите од целото.

Пример 13: Податоците од примерот 10 може да ги претставиме со следниот секторски дијаграм:

Учество на учениците по спортови:



Користени се аглите во степени со коишто се претставени спортовите:

кошарка: $\frac{8}{40}\cdot 360^\circ = 72^\circ$

фудбал: $\frac{16}{40}\cdot 360^\circ = 144^\circ$

тенис: $\frac{14}{40}\cdot 360^\circ = 126^\circ$

ракомет: $\frac{2}{40}\cdot 360^\circ = 18^\circ$

Ниво Б

Ученикот покажува дека разбира...

НИВО: РАЗБИРАЊЕ

Претворањето од поголема во помала мерна единица се врши со множење со односите на мерките што не се во загради во табелите, а од помали во поголеми мерни единици со множење со односите што се во загради во табелите.

Пример 1:

$3\ dam = 3 \cdot 10 = 30\ m$

$3\ dam = 3 \cdot 100 = 300\ dm$

$3\ dam = 3 \cdot 10000 = 30000\ mm$

$5\ m = 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5\ dam$

$5\ dm = 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}05\ dam$

$5\ mm = 5 \cdot 0{,}0001 = 0{,}0005\ dam$

Пример 2:

Според табела 2:

$3\ kg = 3 \cdot 1000 = 3000\ g$

$5\ cg = 5 \cdot 0{,}00001 = 0{,}00005\, kg$

Пример 3:

Според табела 3:

$5\ hl = 5 \cdot 10000 = 50000\ cl$

$3\ kl = 3 \cdot 1000000 = 3000000\ ml$

$4\ cl = 4 \cdot 0{,}1 = 0{,}4\ dl$

$5\ ml = 5 \cdot 0{,}0001 = 0{,}0005\ dal$

Пример 4:

Според табела 4:

$3\ d = 3 \cdot 24 \cdot 3600 = 259200\ s$

24 м$= 24 \cdot \frac{1}{12} = 12$ г

Пример 5:

Претвори $3dm$ во cm :

а) преку основната мерна единица

б) директно

Решение: а) $3\ dm = 3 \cdot 10m = 3 \cdot 10 \cdot 100cm = 3000\ cm$

б) $3\ dm = 3 \cdot 1000 = 3000\ cm$

Пример 6:

Претвори $5\ km$ во dam:

а) преку основната мерна единица

б) директно

Решение: а) $5\ km = 3 \cdot 1000\ m = 5 \cdot 1000 \cdot 0{,}1\ dam = 500\ dam$

б) $5\ km = 5 \cdot 100 = 500\ dam$

Пример 7: Претвори $8\ mm$ во hm:
а) преку основната мерна единица
б) директно

Решение: а) $8\ mm = 8 \cdot 0{,}001\ m = 8 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}01\ hm = 0{,}00008\ hm$
б) $8\ mm = 8 \cdot 0{,}00001 = 0{,}00008\ hm$

Пример 8: Претвори $8\ mm$ во dm:
а) преку основната мерна единица
б) директно

Решение: а) $8\ mm = 8 \cdot 0{,}001\ m = 8 \cdot 0{,}001 \cdot 10\ dm = 0{,}08\ dm$
б) $8\ mm = 8 \cdot 0{,}01 = 0{,}08\ dm$

Повеќеимен број во едноимен најчесто се претвора:
а) директно во дадената мерна единица
б) постапно

Пример 9: Претвори 5 cm 3 dm 9 cm во cm:

а) $5\ m = 5 \cdot 100 = 500\ cm$
$3\ dm = 3 \cdot 10 = 30\ cm$
$9\ cm = 9\ cm$
Значи, 5 cm 3 dm 9 cm = 539 cm

б) $5\ m = 5 \cdot 10 = 50\ dm$
$53\ dm = 53 \cdot 10 = 530\ cm$
$530\ cm + 9\ cm = 539\ cm$

Едноимен број во повеќеимен најчесто се претвора:
а) директно во дадената мерна единица
б) постапно

Пример 10: Претвори 539 cm во повеќеимен број.

а) 539:100=5, значи 5 m
−500
39 –остаток

39:10=3, значи 3 dm
−30
9-остаток, значи 9 cm

т.е. едноимениот број претворен во повеќеимен е 5 cm 3 dm 9 cm.

б) $539\ cm = 53\ dm$ и 9 cm
$53\ dm = 5\ m$ и 3 dm
Значи, $539\ cm = 5\ m\ \ 3\ dm\ \ 9\ cm$.

За мерката hm^2 се користи називот **хектар** (ha), а за мерката dam^2 се користи називот **ар** (a), т.е.

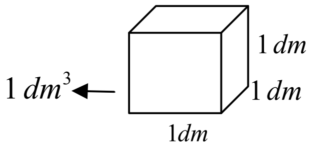
$$1\ ha = 1\ hm^2 \quad \text{и} \quad 1\ a = 1\ dam^2.$$

Значи, $1\ a = 100\ m^2$, т.е. тоа е плоштина на квадрат со должина $10\ m$ и ширина $10\ m$.

$\boxed{1\ a}$ $10\ m$
$10\ m$

Пример 11: Плоштината на правоаголникот со должина $20m$ и ширина $10\ m$ е: $P = 20 \cdot 10 = 200\ m^2 = 2 \cdot 100 = 2\ a$

За мерката $1\ dm^3$ се користи називот **литар** (l).
Значи, $1\ l = 1\ dm^3$ т.е. тоа е волумен на коцка со должина $1\ dm$, ширина $1\ dm$ и висина $1\ dm$.



Пример 12: Одговори колку литри вода собира базен во форма на:
а) квадар со димензии $a = 50\ dm, b = 40\ dm, c = 10\ dm$
б) коцка со раб $20\ dm$

Решение: а) $V = abc = 50 \cdot 40 \cdot 10 = 20000\ dm^3 = 20000\ l$
б) $V = a^3 = 20^3 = 8000\ l$

Предностите и недостатоците на дијаграмите со кои се претставуваат податоците ќе ги искажеме во следната табела:

Вид на дијаграм	**Предности**	**Недостатоци**
столбест	-Лесно се читаат податоците -Едноставно се споредуваат големини	-Ако столбовите се со блиски големини тешко се читаат -Зависно од столбовите може да се добие погрешен впечаток за поголемите разлики
сликовен	-Лесно се читаат податоците -Едноставно се споредуваат големини	-За да се утврди точен број мора да се пресметува
секторски	-Добро се споредуваат делови од целото	-Тешко е за користење кога деловите на целото се мали

Многу важен елемент од работата со податоци е изборот на примерок, анализата и заклучокот.

Пример 13: Во едно село од 2 000 жители треба да се изгради ново фудбалско игралиште и за таа цел е направена анкета меѓу жителите. Ако се направи анкета на малку жители може да добиеме одговор кој не го одобрува мнозинството. Затоа ќе прашаме 200 жители и во нив да има мажи, жени и деца,а, пак, меѓу нив да има спортисти и жители кои не спортуваат. Добиените одговори ги запишуваме во табела.

Ново фудбалско игралиште

Одговор	**Број**	**Однос**
да	120	$\frac{120}{200} = 0,6$
не	60	$\frac{60}{200} = 0,3$
не знам	20	$\frac{20}{200} = 0,1$

Со анализа на податоците се утврдува дека 0,6 од примерокот сакаат ново фудбалско игралиште. Пресметуваме $2000 \cdot 0,6 = 1200$, значи може да заклучиме дека приближно 1 200 жители сакаат да се изгради ново фудбалско игралиште.

ЗАДАЧИ ОД НИВО **А** И НИВО **Б**

Со користење на задачите подолу, наставникот може да направи проверка на знаењата на ученикот кои се на ниво на познавање и на разбирање. Задачите може да ги користат учениците за самооценување, а и родителите може да го проверат нивото на стекнати знаења.

1. Одреди колку cm има во $13\,m$.
2. Колку килограми (kg) имаат $42\,g$?
3. Колку литри (l) имаат $35\,ml$?
4. Колку часови има во 300 $\min$?
5. Колку келвини се $78^{\circ}C$?
6. Колку m^2 имаат $12\,dam^2$?
7. Колку dm^3 имаат $5\,m^3$?
8. Колкав е волуменот на квадар ако рабовите се $7\,m, 2\,m$ и $1\,m$? ($V = a \cdot b \cdot c$)
9. Одреди ја аритметичката средина на броевите 10, 20 и 30.
10. На колку и на кои начини може да се претставуваат прибраните податоци?
11. Повеќеимениот број $3\,hm\ \ 4\,m\ \ 5\,dm\ \ 7\,cm$ претвори го во едноимен во cm.
12. Едноимениот број $3458\,mm$ претвори го во повеќеимен.
13. Колку ари (a) има нива од $1200\,m^2$?
14. Колку литри (l) има сад со волумен од $500\,dm^3$?

ЗАДАЧИ ОД НИВО **В** И НИВО **Г**

Со користење на задачите подолу наставникот може да направи проверка на знаењата на ученикот кои се на ниво примена, анализа, синтеза и вреднување. Задачите може да ги користат учениците за самооценување, а и родителите може да го проверат нивото на стекнатите знаења.

1. Мобилниот телефон на Мира имал дебелина $8\ mm$. Колку hm е дебелината на телефонот на Мира?
   а) Пресметај преку основната мерна единица.
   б) Директно .

2. Повеќеимениот број $3\ km\ \ 5\ hm\ \ 2\ m\ \ 3\ dm\ \ 8\ cm$ претвори го во едноимен во m.

3. Едноимениот број $42{,}56\,m$ претвори го во повеќеимен.

4. Таткото имал нива од $27\ ha\ \ 13\ a\ \ 25\ m^2$ и ја разделил подеднакво на своите пет деца.
   По колку ари добил секој?

5. Должините на сите рабови на една коцка е $60\ dm$.
   а) Одреди го волуменот на коцката по формулата $V = a \cdot a \cdot a$.
   б) Колку литри вода собира сад во форма на коцка со наведените димензии?

6. Квадар и коцка имаат еднакви волумени. Најмалиот раб на квадарот е $2\ m$, вториот е два пати подолг од првиот, а третиот е два пати подолг од вториот. Одреди го работ на коцката. (Волумен на квадар се одредува со формулата $V = a \cdot b \cdot c$, а на коцка со $V = a \cdot a \cdot a$.)

7. Еден амбар во форма на квадар има волумен 8 000 dm^3, должина $3\ m\ \ 2\ dm$ и ширина $2\ m\ \ 5\ dm$. Колку треба да биде висината на амбарот? ($V = a \cdot b \cdot c$)

8. Три месингени коцки со рабови $3\ cm$, $4\ cm$ и $5\ cm$ се претопени во коцка. Колкав е работ на новата коцка?

9. Еден базен во форма на квадар има волумен $60\,000\ l$, а страните се последователни природни броеви. Одреди ги страните на базенот. ($V = a \cdot b \cdot c$)

10. Аритметичката средина од десет броеви е 7. Колку ќе биде аритметичката средина од овие броеви ако секој број се сголеми за 14?

11. Во едно училиште имало 98 ученици во шесто одделение. На екстерното тестирање по математика постигнат е следниот успех:
10 – единици; 13 - двојки; 25 - тројки; 30 - четворки и 20 петки.
Претстави ги резултатите со столбест дијаграм и одреди ја средната оценка.

ЗАДАЧИ ШТО СЕ РЕШАВААТ НА ПОВЕЌЕ НАЧИНИ

Задача 1. **Растојанието меѓу две наплатни рампи е d=7 km 5 hm 4 dam 3 m 2 dm 8 cm 9 mm. Да се искаже ова растојание во mm.**

Решенија:

Варијанта 1:

7	km	=	7 000 000mm
5	hm	=	500 000mm
4	dam	=	40 000mm
3	m	=	3 000mm
2	dm	=	200mm
8	cm	=	80mm
9	mm	=	9mm

Значи d = 7543289 mm

Варијанта 2:

7	km	=	700000cm
5	hm	=	50000 cm
4	dam	=	4000 cm
3	m	=	300 cm
2	dm	=	20 cm
8	cm	=	8 cm
9	mm	=	0,9 cm

Значи d = 754328,9 cm = 7543289 mm

Варијанта 3:

7	km	=	70000 dm
5	hm	=	5000 m
4	dam	=	400 dm
3	m	=	30 dm
2	dm	=	2 dm
8	cm	=	0,8 dm
9	mm	=	0,09 dm

Значи d = 75432,89 dm = 7543289 mm

Варијанта 4:

7	km	=	7000 m
5	hm	=	500 m
4	dam	=	40 m
3	m	=	3 m
2	dm	=	20, m
8	cm	=	0,08 m
9	mm	=	0,009 m

Значи: d = 7543,289 m = 7543289 mm

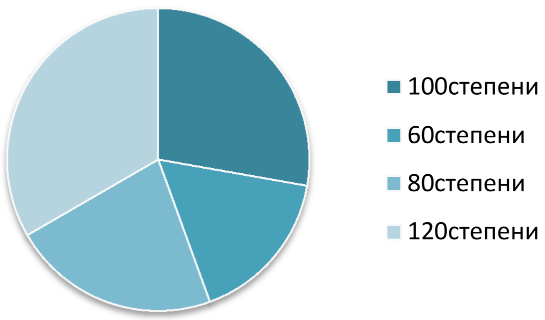
Варијанта 5:

7	km	=	700 dkm
5	hm	=	50 dkm
4	dam	=	4 dkm
3	m	=	0,3 dkm
2	dm	=	0,02 dkm
8	cm	=	0,008 dkm
9	mm	=	0,0009 dkm

Значи: d = 754,3289 dkm = 7543289 mm.

Задача 2. **Четворица натпреварувачи фрлаат диск од иста почетна точка. Постигнатите должини се: Жаклина - 60 m ; Лазо - 100 m ; Горан - 120 m и Муса- 80 m. Претстави ги резултатите со секторски, сликовен и столбест дијаграм.**

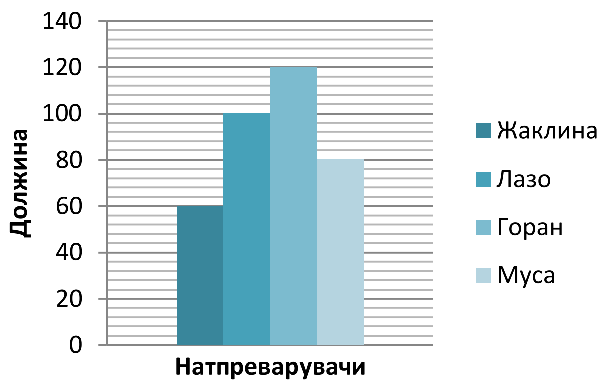
<u>Решенија:</u>
I начин: Секторски дијаграм
1степен =1 метар



II начин: Сликовен дијаграм

Жаклина	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
Лазо	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
Горан	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
Муса	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

III начин: Столбест дијаграм



СПЕЦИФИКАЦИСКА МРЕЖА НА ТЕСТОТ

(Во спецификациската мрежа се дадени бројот на задачи по содржини и по нивоа, како и нивната процентуална застапеност.)

	Содржини	Број на часови	А Познавање	Б Разбирање	В Примена, анализа, синтеза, вреднување	Проценти	Задачи
I	Мерење	13	6	8	5	65%	19
II	Работа со податоци	7	3	4	4	35%	11
	Процент		**30%**	**40%**	**30%**	**100%**	
	Задачи		**9**	**12**	**9**		**30**

ТЕМАТСКИ ТЕСТ

1 Кој од дадените броеви е едноимен број?

А. 3m 7dm   Б. 2,13 kg   В. 12l 5cl   Г. 10 д 11ч

2 Основна мерна единица за маса е:

А. метар   Б. килограм   В. литар   Г. час

3 Подреди ги по големина мерните единици 1 dm, 1 m, 1km, почнувајќи од најголемата.

А. 1 km, 1 m, 1 dm   Б. 1 km, 1 dm, 1 m

В. 1 dm, 1 km, 1 m   Г. 1 m, 1 dm, 1 km

4 Филип изел 5 dag јаболка. Колку грама се тоа?

А. 50 g   Б. 500 g   В. 0,15 g   Г. 0,05 g.

5 Колку метри има во 1 dm?

А. 0,1 m   Б.0,01 m   В. 10 m   Г. 100 m.

6 Кои од броевите 5 m, 6 km, 13 m и 7 kg се истоимени броеви?

А. 5 m и 6 km   Б. 5 m и 13 m   В. 6km и 7 kg   Г. сите.

7 Цената на 1 m штоф е 120 денари. Колку денари треба да се плати за 5 m штоф?

А. 600 денари   Б. 700 денари   В. 800 денари   Г. 500 денари

8 Кој од дадените чекори на решавање ќе употребиш за да пресметаш 8 dm – 31,5 cm?

А. 825 cm - 31,5 cm   Б. 8,25 cm - 31,5 cm

В. 62,5 cm - 61,4 cm   Г. Ниту еден од наведените

9 Колку часови има во две седмици?

А. 14 *h*   Б. 120 *h*   В. 336 *h*   Г.7200 *h*

10 Бројот 3 m 5 dm 2 cm претворен во едноимен број (во cm) е:

А. 3520 cm   Б. 3,52 cm   В. 352 cm   Г. 35,2 cm

11 Цената на 1 kg месо е 120 денари. Колку чинат 500 g од месото?

А. 60 денари Б. 30 денари В. 120 денари Г. 15 денари

12 Количникот од збирот на три броеви и бројот три е:

А. ранг на броевите Б. геометриска средина на броевите
В. аритметичка средина на броевите Г. медијана

13 Сликовен дијаграм е начин на претставување на податоци со користење на:

А. дропки Б. формули В. столбови Г. слики или симболи

14 Аритметичката средина на броевите 12,18, и 6 е:

А. 24 Б. 36 В. 12 Г. 72

15 Бројот 12 е аритметичка средина на броевите:

А. 12, 9, 15, 6 и 23 Б. 13, 15 и 23 В. 14, 16 и 23 Г. 12, 9 и 15

16 Момир има 20 години, Агим има 16 години, а Миле има 18 години. Годините на Светлана се колку аритметичката средина од возраста на Момир, Агим и Миле. Колку години има Светлана?

А. 54 години Б. 27 години В. 16 години Г. 18 години

17 Писмена работа по математика работеле 31 ученик и ги добиле следните оценки:

4 ученици добиле оценки 1, 6 ученици добиле оценка 2, 10 ученици добиле оценка 3, 8 ученици добиле оценка 4 и 3 ученици добиле оценка 5.
Просечната оценка од писмената работа по математика во одделението е:

А. 3 Б. 3,5 В. 2,5 Г. 3,1

18 Аритметичката средина на три броја е 57. Првиот број е 72,вториот е 95, а третиот број е:

А. 5 Б. 6 В. 3 Г. 4

19 Рангот на една низа е 7. Ако најмалата вредност е 11, тогаш најголемата вредност е:

А. 4 Б. 18 В. 77 Г. 36

20 Аритметичката средина на 12 податоци е 12. Кој број е збир на податоците?

А. 144 Б. 24 В. 12 Г. 0

21 Длабочините изразени во метри во кои бил забележан делфин биле:
0 ; 3 ; 2 ; 12 ; 7 ; 5 ; 0 ; 16 ; 0.
Колку пати делфинот се наоѓал над просечната длабочина?

А. 6 Б. 5 В. 3 Г. 4

22 Јован запишал дека еден ден температурата била 290, 16 К, односно запишал:

А. $29^{\circ}C$ Б. $16^{\circ}C$ В. $20^{\circ}C$ Г. $20{,}16^{\circ}C$

23 Бројот на кошеви што ги постигнувале по натпревар Павле-висок 202 cm и Раде висок 190 cm се: Павле 10;12;8;7;13;17; 3 кошеви и Раде 11;7;15;3;10;8.
Павле е подобар од Раде во постигнување кошеви бидејќи:

А. постигнал вкупно повеќе кошеви. Б. постигнал просечно повеќе кошеви.
В. одиграл повеќе натпревари. Г. е повисок.

24 Бројот 2013 е:

А. именуван Б. именуван од ист вид В. повеќеименуван Г. неименуван

25 Колку литри има во 2 dal 2 l

А. 20,2 l Б. 2,2 l В. 22 l Г. 202 l

26 Најголемата длабочина на Егејското Море е 2524 метри. Во повеќеимен број длабочина на Егејското Море се запишува со:

А. 2 km 50 hm 20 dam 4 m Б. 2 km 5 hm 20 dam 4 m
В. 2 km 5 hm 2 dam 4 m Г. 2 km 50 hm 2 dam 4 m

27 Еден столб е висок 6 m 5 dm 6 cm.Во дното на реката е закопан 1 m 62 cm, а над водата е 2 m 2 dm 4 cm. Длабочината на реката на тоа место е:

А. 4 m 3 dm 1 cm Б. 2 m 3 dm 0 cm В. 4 m 9 dm 4 cm Г. 3 m 8 dm 0 cm

28 Кој број е 4 пати помал од бројот 8 km 12 m?

А. 4 km 8 m Б. 12 km 16 m В. 2 km 3 m Г. 32 km 48 m

29 Ако бројот 6 kg 66 g се намали за 16 g се добива:

А. 6 kg 6 g Б. 6 kg 60 g В. 50g Г. 6 kg 50 g

30 Еден часовник за 8 дена заостанал 1 h 15 min 36 s.
Колку заостанал часовникот за еден ден?

А. 9 min 27 s Б. 9 min 36 s В. 14 min 27 s Г. 14 min 36 s

Клуч

	Решение		Решение
1.	Б	16.	Г
2.	Б	17.	А
3.	А	18.	Г
4.	А	19.	Б
5.	А	20.	А
6.	Б	21.	В
7.	А	22.	В
8.	Б	23.	Б
9.	В	24.	Г
10.	А	25.	А
11.	А	26.	В
12.	В	27.	Б
13.	Г	28.	В
14.	В	29.	Г
15.	Г	30.	А

Скала за вреднување на резултатите од тестот:
(Секоја задача се вреднува со по 1 поен)

ОСВОЕНИ ПОЕНИ	ОЦЕНКА
0-7	Недоволен (1)
8-11	Доволен (2)
12-19	Добар (3)
20-23	Многу добар (4)
24-30	Одличен(5)

ОДГОВОРИ, УПАТСТВА И РЕШЕНИЈА

Тема 1:   А и Б

1. а) $A=\{1,2,3\}$ б) $M=\varnothing$ в) $K=\{441,442,443,444,445\}$ г) $T=\{14,15,16,...\}$

2. а) $A=\{1,2,35,6,9\}$ б) $A=\{2,4,6,7,8,10,11\}$ в) $A\cap B=\{2,6\}$ г) $A\cup B=\{1,2,3,...,10,11\}$

д) $A\setminus B=\{1,3,5,9\}$ ѓ) $B\setminus \mathrm{A}=\{4,7,8,10,11\}$

3. а) $M\cup P=\{2,3,4,5,6,7,8,10\}$ б) $M\cap P=\{3,7\}$ в) $M\setminus P=\{2,5,10\}$ г) $P\setminus \mathrm{M}=\{4,8,1\}$

4. а) $A\cap A=A$ б) $A\cap\varnothing=\varnothing$ в) $A\cup A=A$ г) $A\cup\varnothing=A$

5. $A\cap B=A$

6. Обој го делот што се содржи во трите множества.

7. $M\times T=\{(10,1),(10,7),(10,16),(5,1),(5,7),(5,10)\}$

$M^2=\{(10,10),(10,5),(5,10),(5,5)\}$

8. Точни се: а), в) и г)

9. 123001+122999=246000

16. а) $a\cdot b+a\cdot c$ б) $a\cdot(b-c)$

17. 815+60=875

18. $x=28$

19. $186\cdot 305$

20. а) 3382 б) 17920 в) 36202896 г) 205

21. а) 149057 б) 119666 в) 4 г) 35

22. Бројот 1

23. $\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$

24. Делители на 36 се: 9,12,4,6,1,36, а содржатели се:72,108,36,360

25. а) 8 б) 8 в) 11 г) 1

26. а) 72 б) 900 в) 231 г) 1350

27. а) $3^3\cdot 5$ б) $2\cdot 3\cdot 7\cdot 29$

28. $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

29. а) 308,7000,640,164 б) 6453,8865,87,777 в) 308,7000,640,164 г) 7000,8865,640

30. а) 17,29,37 б) 50,1001,51,49,81

31. 11,31,41,61,71,91

32. 126,128,130,132,134,135,136,138,129,133

Тема 1:   В и Г

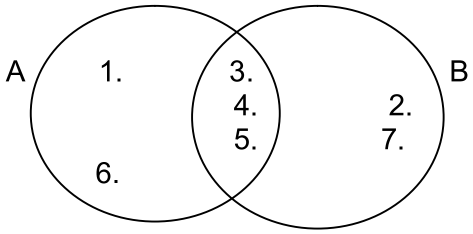
1. $A=\{201,202,203,204,205,206\}$

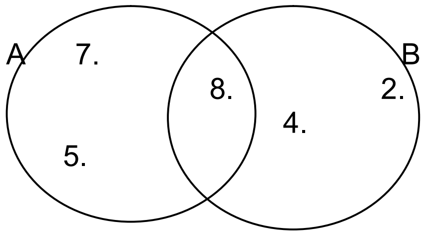
2. Еднаквите множества имаат ист број елементи, а еквивалентните множества не мора да имаат исти елементи.

3. {Ø,{а},{б},{в},{а,б},{а,в},{б,в},{а,б,в}}

4. {а}

5. {1,2}

6.


7.


8. $A=\{5,6,7\}$, $B=\{5,6,8\}$

9. $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

10. $K\cap S=\{e,f,g\}$

11. а) $\{1,2,11,6,7,13,4,8,14\}$ б) $\{3,10,15\}$ в) $\{7,13\}$ г) $\{6\}$

13 $(A\cup B)\setminus C$ или $(A\setminus B)\cup(B\setminus C)$ итн.

14. $M=\{1,3,5\}$, $N=\{2,4\}$

15. $A\times B=\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(4,2),(4,3)\}$, $\delta(A\times B)=6$,

$A^2=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4)(4,1),(4,2),(4,4)\}$, $\delta(A^2)=9$

16. а) $M\setminus N=\{1,2,3\}$, $\delta(M\setminus N)=3$

б) $M\cap N=\varnothing$, $\delta(M\cap N)=0$

в) $M\cup N=$ {1,2,3,а,б} , $\delta(M\cup N)=5$

17. 3 ученици

18. 17 деца

19. 124761,730005,612021

20. а) 53 б) 8 в) 7200 г) 27 д) 20000 ѓ) 54000

21. а) $27\cdot(34+66)$ б) $7\cdot(125-14)$ в) $8\cdot(88+13)$

г) $6\cdot(99-77)$ д) $59\cdot(992+8)$ ѓ) $39\cdot(573-373)$

22. а) $x=2553-365$ б) $x=860:4$ в) $x=24700+896$

23. $(12365+65421):2$

24. $x-356408=245592$

25. $235\cdot x=12690$

26. $\overline{AB}=3265+(3265-968)$

27. $256300+(256300-23750)+(256300+(256300-23750)):2$

28. $(7\cdot150-5\cdot50)-(6\cdot150-3\cdot50)$

29. $24+8+x+8=53+8$

30. $\frac{336}{6}\cdot4$

31. $19\cdot31+7$

32. а) $38\cdot28-820$ б) $820\cdot150$

33. 17001

34. а) 8442 б) 744,8412,8472,10956

36. 9980

37. Не постои, бидејќи е делив со 9 или со 3.

38. 2,3,7

39. 1,2

40. б)

41. Да , НЗД(77,30)=1

42. $5n+2, n\in\mathbb{N}$

43. $6\cdot12\cdot35=2\cdot35\cdot36$ итн.

44. Пример: $a=6, b=10$; $2\,|\,18+50$

45. а) 2 б) 100

46. 30 дена

47. Најмногу 6 пакетчиња; по 35 бонбони.

48. На 5

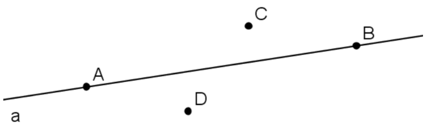
49. На 1

50. 2

51. 31^{31} при делењето со 30 дава остаток 1, па $30\,|\,31^{31}-1$

Тема 2   А и Б

1.

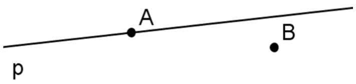


2.

3. $p \equiv q$ и A,B и M се колинеарни

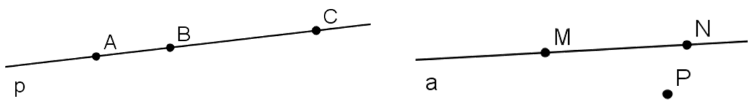
4. Бесконечно многу прави

5.

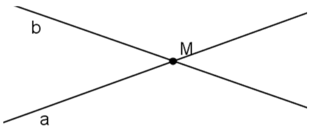


$A \in p$; $B \notin p$

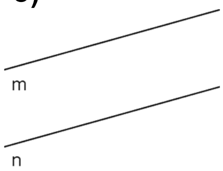
6.



7. **а)**

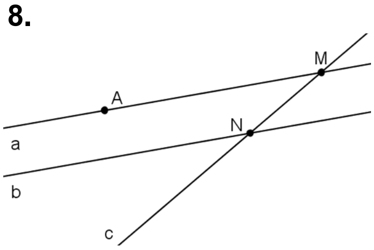


б)



в)

8.



$b \cap c = N$

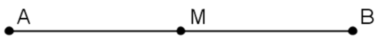
9. Најкраткото растојание

10. Да

11. б)

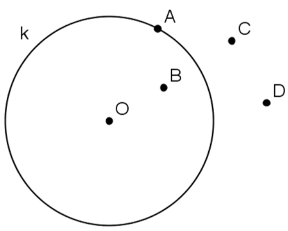
12. Отсечката: а) AB б) a ; Должината на отсечката: а) $\overline{AB}$ б) a

13.



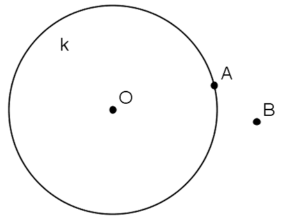
14. $\overline{AB} = \overline{MN}$

18.

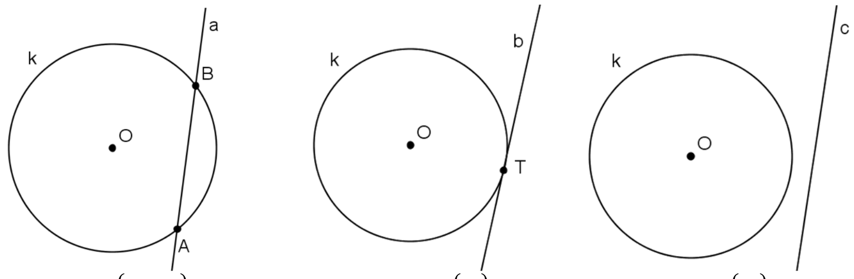


$A, B \in K$; $C, D \notin K$

19. а) **б)**

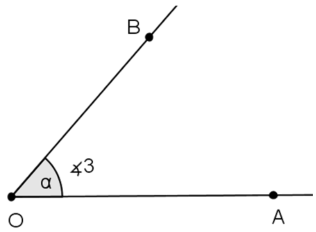


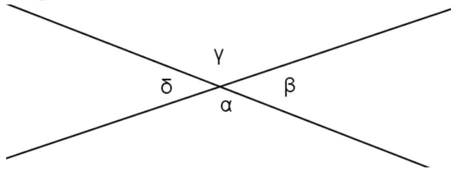
$A \in k$; $B \notin k$



$a \cap k = \{A, B\}$ $b \cap k = \{T\}$ $c \cap k = \{T\}$

21. **23.**





а) Со три големи букви $\sphericalangle AOB$

б) Со една голема буква $\sphericalangle O$

в) Со мала грчка буква α

г) Со број $\sphericalangle 3$

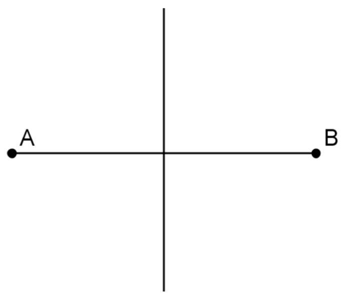
а) α, β ; α, δ ; β, γ ; γ, δ

б) α, β ; α, δ ; β, γ ; γ, δ

в) α, β ; β, δ

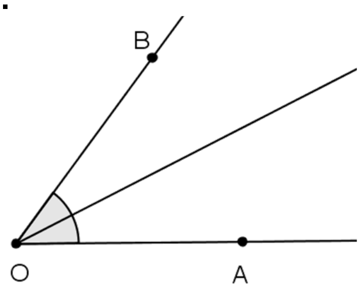
27. $93^\circ 10' 13''$; $53^\circ 45' 3''$

29.



Симетралата на отсечка претставува права.

30.

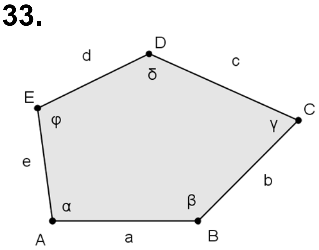


Симетралата на агол претставува полуправа.

31. $\beta = 52^\circ$

32. $\beta = 102^\circ$

33.



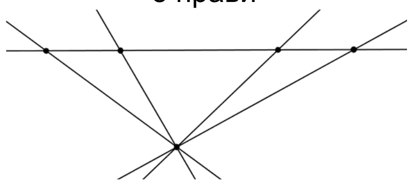
34. $a + b + c = 24cm.$

Тема 2: В и Г

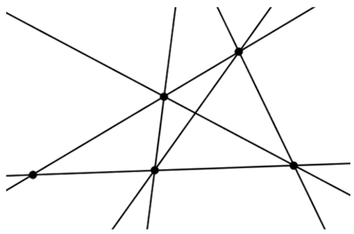
1. $MN, MP, MQ, NM, NP, NQ, PM, PN, PQ, QM, QN, QP.$

2. 1 права

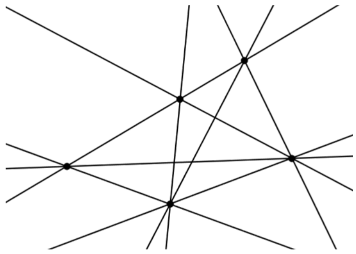
5 прави



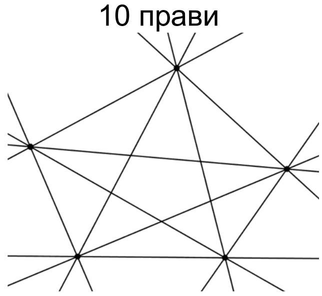
6 прави



8 прави



10 прави

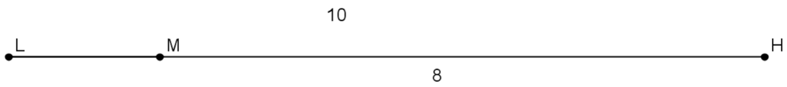


3. $b \parallel d$

4. Ако правата a не ја сече правата b и b не ја сече правата $c,$ тогаш е можно само ако правата a не ја сече правата $c.$

5. в)

6.

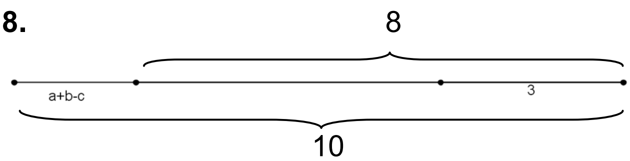


Прв случај $\overline{LM} = 2$

Прв случај $\overline{LM} = 18$

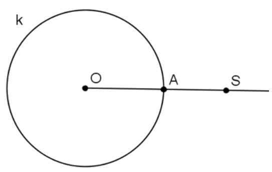
7. $\overline{B_1B_3} = 18\,cm$. Направи цртеж.

8.



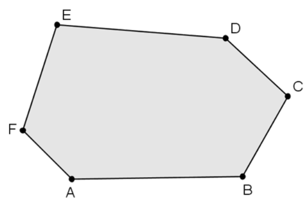
9.Упатство: на $m+n$ надоврзи ја $m-n$ и одреди средина.

10.



$k \cap OS = A$

11.



12.Најмалку две страни, а најмногу 30 страни.

13. $\overline{AO}=3\,cm$

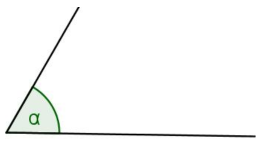
14. 18 mm

15. 6 агли и две означувања

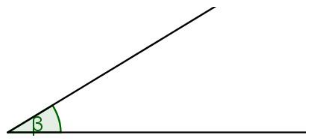
16. **(**180-30):2=75;   75+30=105

17. 60°

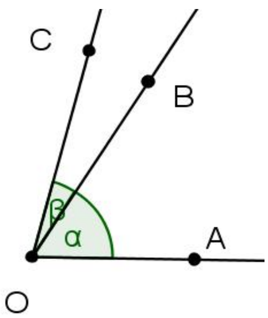
18.

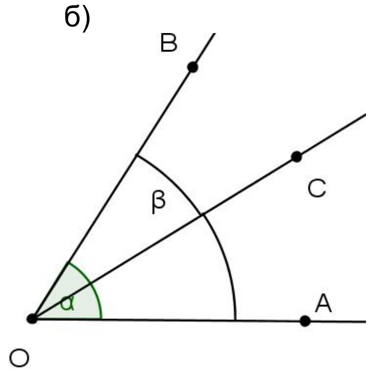


а)



б)





$\measuredangle AOC=\alpha+\beta$ $\measuredangle AOC=\alpha-\beta$

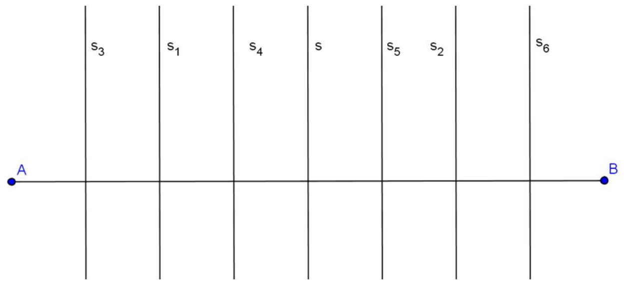
в) $\alpha+\beta+\alpha-\beta=2\alpha$ г) $\alpha+\beta-(\alpha-\beta)=2\alpha$

19. Со собирање на аглите Т+С-К+Т+К-С+С+К-Т=130°, т.е. Т+С+К=130° и имаме:
90° +К+К=130°, т.е. К=(130° -90°):2= 20°

Значи, капакот има маса 200 g. Потоа, С=(130° -10°):2=60° т.е. слаткото има маса од 600 g и Т=50° т.е. теглата има маса од 600 g.

20. $241^{\circ}23'33''$

21.



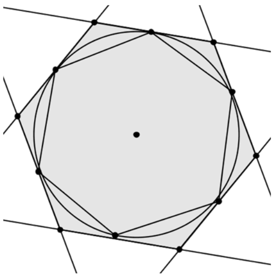
22. Упатство:конструирај агол од 90°, па потоа со симетрала агол од 45°, потоа слично агол од $22^{\circ}30'$ и на крај слично агол од $11^{\circ}15'$.

23. $90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$

24. 110°

25. а) 50° б) 85°

26.



а) Многуаголниците тежат кон кружница

б) Периметрите на многуаголниците се стремат кон периметарот на кружницата

Тема 3:   А и Б

1. $\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{15}{7}$

3. а) $\left\{\frac{2}{7},\frac{5}{7}\right\}$ б) $\left\{\frac{14}{7},\frac{21}{7}\right\}$ в) $\left\{\frac{9}{7},\frac{18}{7},\frac{20}{7}\right\}$

4. $2\frac{3}{4},5\frac{1}{5},6\frac{1}{6},11\frac{1}{11}$

5. $\frac{14}{3},\frac{11}{10},\frac{15}{4},\frac{21}{2}$

6. $\left\{\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{8},3\right\}$

7.

8. $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$

9. $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$; $\frac{3}{5}=\frac{15}{25}$; $\frac{4}{9}=\frac{8}{18}$; $\frac{4}{9}=\frac{20}{45}$

10. а) $\frac{4}{5}<\frac{7}{5}$ б) $\frac{15}{4}<\frac{15}{7}$

11. $\frac{2}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{2}{3},\frac{2}{11},\frac{1}{3}$

12. а) $\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$ б) $\frac{10}{11}$ в) 6

13. а) $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ б) $\frac{1}{5}$ в) $\frac{4}{3}$

14. $\frac{7}{10},\frac{11}{1000},5\frac{5}{100}$

15. а) 0,07 б) 2,3 в) 11,013

16. а) $\frac{3}{10}$ б) $1\frac{3}{100}$ в) $4\frac{23}{1000}$

17. 5,000 ; 3,200 ; 5,730

18. 3,05>2,96 ; 7,23<7,156 ; 2,9>2,10

19. а) 134,665 б) 143,147 в) 13,644 г) 122,851

20. а) 18,96 б) 8,3939 в) 235,6 г) 0,1344

21. а) 12,46 б) 2,5673 в) 0,16 г) 32,574

22. а) 3,3 б) 7,24 в) 8,5 г) 0,72 д) 2 ѓ) 3 е)14,62 ж) 3

23. 0,2 ; 0,(3) ; 3,5 ; 0,1(3) ; 2,75(6)

24. 2,34(7) ; 1,5(123)

25. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{25}{8}$

26. 0,3 ; 0,32 ; 0,318 ; 0,3182

Тема 3:   В и Г

1. 0,15
2. 120
3.18
4. $\frac{1}{12},\frac{5}{12},\frac{7}{12},\frac{11}{12}$
5. 18
7. 13
8. $\frac{x}{2}=\frac{5}{2}$
9. $7\frac{3}{7}$
10. $2\frac{53}{60}$; $2\frac{3}{4}$
11. $\frac{1}{11}$
12. $\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\right)x=\frac{a-b}{c}x=\frac{(a-b)x}{c}=\frac{ax-bx}{c}=\frac{ax}{c}-\frac{bx}{c}$
13. $\frac{3}{10}$. Упатство: $\frac{3}{5}<x<\frac{4}{5}$; $\frac{6}{10}<x<\frac{8}{10}$; $x=\frac{7}{10}$
14. Упатство: Прошири ги дропките до именител 60. Добиваш $\frac{45}{60},\frac{46}{60},\frac{47}{60},\frac{48}{60}$
15. $\left(7\frac{5}{13}-4\frac{1}{13}\right)-1\frac{2}{13}$
16. $1\frac{4}{7}$
17. $3\frac{2}{5}$
18. а) $x=\frac{4}{5}$ б) $x=2\frac{1}{7}$
19. 1) Не може да ја подели за конечно време

2) Може

3) Да

20. а) 2,733 б) 3,133 в) 6,000

21. $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{40}{100}=\frac{400}{1000}=\frac{4000}{10000}=0{,}4$

22. 3,0067

23. 40,22+(25,03-17,007)

24. 235,69

25. $(4{,}5:0{,}5):(4{,}5\cdot 0{,}5)$

26. $(23{,}04\cdot 100):(7{,}2\cdot 3{,}2)$

27. а) $m=1$ б) $n=27$ в) $p=49$ г) $q=64$

28. Шишето има маса 135,5 g, а сокот 94,9 g

Тема 4: А и Б

1. 1300 cm

2. 0,042 kg

3. 0,035l

4. 5 часа

5. (78+273,16) К

6. 1200 cm^2

7. 5000 dm^3

8. 14 m^3

9. 20

11. $3\cdot 10000+4\cdot 100+5\cdot 10+7$

12. 3 m 4 dm 5 cm 8 mm

13. 12 a

14. $500l$

Тема 4: В и Г

1. а) $8\ mm=0{,}008\ m=0{,}00008\ hm$ б) $8\ mm=8\cdot 0{,}00001\ m=0{,}00008\ hm$

2. $3502{,}38\ m$

3. $4\ dam\ \ 2\ m\ \ 5\ dm\ \ 6\ cm$

4. $542{,}65\ a$

5. а) $V=5\cdot 5\cdot 5=125\ dm^3$ б) $V=125l$

6. $V=2\cdot 4\cdot 8=4\cdot 4\cdot 4=a\cdot a\cdot a$.Значи $a=4\ cm$

7. $(8000:25):32=10\ dm$

8. Користи ја задача 6.а)

$3\cdot 3\cdot 3+4\cdot 4\cdot 4+5\cdot 5\cdot 5=a\cdot a\cdot a$

$a\cdot a\cdot a=6\cdot 6\cdot 6$, па $a=6$

9. $a\cdot b\cdot c=60\,000\ dm^3=60\ m^3$. Значи, $a\cdot b\cdot c=3\cdot 4\cdot 5$,па $a=3\ m, b=4\ m, c=5\ m.$

10. $7+\frac{140}{7}=27$

11.

Средната оценка на екстерното тестирање по математика е 3,38.

ЛИТЕРАТУРА

1. Krathwohl, D. R. (2002). A revision of bloom's taxonomy: An overview. Theory into Practice, 41 (4), 212-218.

2. Целакоски Наум: Дидактика на математиката со прирачник за студенти и наставници; Скопје, 1993.

3. Eves Howard,Newsom Carrol: An Introduction to the Foundations and Fundamental concepts of Mathematics,1964.

4. Кудраявцев Л. Д.: Мысли о современой математике и изучении;Москва 1977.

5. Метельский Н. В.: Дидактика математики; Минск 1975.

6. Bakovljev Milan: Didaktika; Beograd, 1984.

7. Prvanovic Stanko: Metodika savremenog matematickog obrazovanja u osnovnoj skoli; Beograd 1970.

8. Poljak Vladimir: Didaktika, Zagreb 1985.

9. Сергиенко Л. Ю., Самйоленко П. И.: Планирование учебного процеса по математике; Москва 1987.

10. Стефановски Јовица, Целакоски Наум: Математика за VI одд. на деветгодишното основно образование; Скопје, 2010.