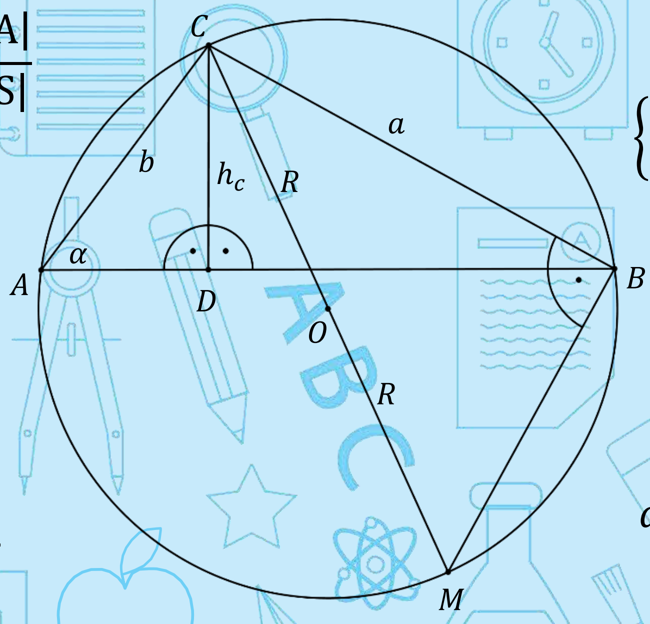
TRAJÇE GJORGJIJEVSKI
OLIVERA TRIFUNOVSKA
LIDIJA FILIPOVSKA
MIRKO PETRUSHEVSKI

DORACAK NGA MATEMATIKA

PËR NXËNËSIT E KLASËS SË VII, VIII DHE IX-TË DHE ARSIMTARËT E TYRE

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$p(\mathrm{A}) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\mathrm{S}|}$$



$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{c_1 - a_1x}{b_1} \\ y = \dfrac{c_2 - a_2x}{b_2} \end{cases}$$

$$a \equiv b(mod\ m)$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Биро за развој на образованието

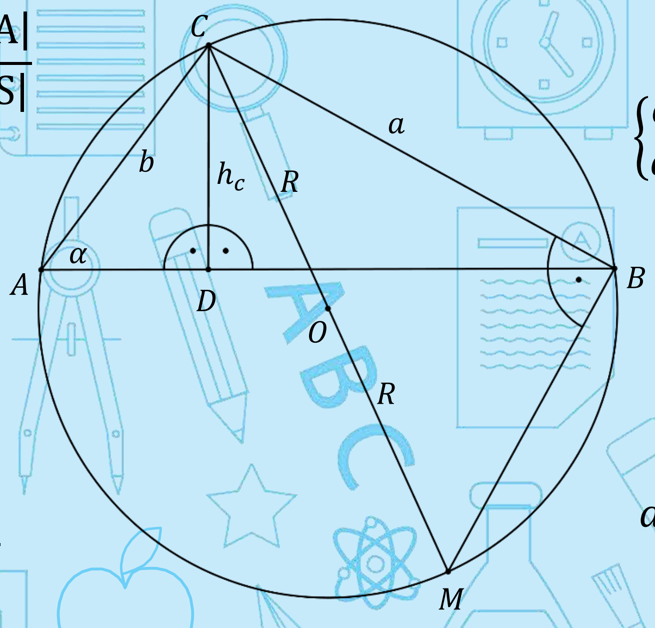
TRAJÇE GJORGJIJEVSKI
LIDIJA FILIPOVSKA
OLIVERA TRIFUNOVSKA
MIRKO PETRUSHEVSKI

DORACAK NGA MATEMATIKA

PËR NXËNËSIT E KLASËS SË VII, VIII DHE IX-TË DHE ARSIMTARËT E TYRE

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$p(\mathrm{A}) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\mathrm{S}|}$$



$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{c_1 - a_1x}{b_1} \\ y = \dfrac{c_2 - a_2x}{b_2} \end{cases}$$

$$a \equiv b(mod\ m)$$

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Биро за развој на образованието

DORACAK

Titulli:
DORACAK NGA MATEMATIKA PËR NXËNËSIT E KLASËS SË VII, VIII DHE IX-TË
DHE ARSIMTARËT E TYRE

Botues:
Byroja për Zhvillim të Arsimit

Për botuesin:
Rizvan Bela, u.d. drejtor

Autorët:
Trajçe Gjorgjijevski, këshilltar i matematikës në BZHA, Shkup
Olivera Trifunovska, këshilltar për arsim të gjimnazit - BZHA, Shkup
Lidija Filipovska, profesor në SHMQSHGJ „Josip Broz Tito“, Shkup
Mirko Petrushevski, d-r i shkencave matematikore–profesor në FMSH

Recenzentë:
Musa Zuka, këshilltar i matematikës - BZHA, Shkup
m-r Lidija Kondinska, këshilltare e matematikës - BZHA, Shkup

Shtypi:
Arbëria Design

Tirazhi:
1000 kopje

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека „Св. Климент Охридски“, Скопје

373.3.016:51(035)

ПРИРАЧНИК по математика за ученици од VII, VIII, и IX одделение и нивните наставници / [автори Трајче Ѓорѓијевски ... и др.]. - Скопје : Биро за развој на образованието, 2018. - 188 стр. : илустр. ; 20 см

Автори: Трајче Ѓорѓијевски, Оливера Трифуновска, Лидија Филиповска, Мирко Петрушевски. - Библиографија: стр. 64

ISBN 978-608-206-058-3
1. Ѓорѓијевски, Трајче [автор]
а) Математика - Основно образование - Прирачници
COBISS.MK-ID 105910282

Botimi është shtypur me përkrahje financiare të zyrës së UNICEF-it, Shkup

PËRMBAJTJA

HYRJE

Doracaku nga matematika për klasën e 7, 8 dhe 9 për nxënës dhe arsimtarë nga autorët Trajçe Gjorgjijevski, Olivera Trifunovska, Lidija Filipovska dhe Mirko Petrushevski është përgatitur me qëllim që tu jepet përkrahje arsimtarëve dhe nxënësve për tema të caktuara që mund të shfrytëzohen në mësim plotësues. Doracaku përmban 6 tema dhe 2 grupe detyrash. Temat janë:

- Metoda për zgjidhjen e sistemeve të barazimeve lineare me dy të panjohura
- Planimetri elementare
- Gjasat elementare
- Induksioni matematikorë
- Hyrje në jobarazi
- Kongruencat në $\mathbb{Z}$

Temat: Metoda për zgjidhjen e sistemeve të barazimeve lineare me dy të panjohura, elemente nga planimetria dhe elemente nga gjasat mësohen në shkollë fillore, kuptohet, këtu janë dhënë me zgjerim të vogël. Disa pjesë të caktuara nga temat e theksuara mund të shfrytëzohen për punë me të gjithë nxënësit në mësim të rregullt.

Temat: induksioni matematikorë, hyrje në jobarazimet dhe kongruencat në $\mathbb{Z}$ nuk mësohen në shkollën fillore, por paraqesin pjesë të rëndësishme gjatë të mësuarit të matematikës. Materialin që e përmbajnë temat është i përgatitur për nxënësit që duan ti zgjerojnë njohuritë,e posaçërisht është i vlefshëm për punën me nxënës të talentuar nga matematika, në orët e mësimit plotësues.

Gjithashtu, përmbajtjet konkrete në temat do të jenë me rëndësi të veçantë për arsimtarët gjatë planifikimit të mësimit plotësues.

Në vetë temat ka numër të madh detyrash të zgjidhura, dhe me të kuptuarit e tyre do të përfitohen „vegla të forta matematikore" të cilat në kohët më të reja shpesh herë mundësojnë zgjidhjen me sukses të detyrave nga garat matematikore.

Pas temës së tretë ka mbi 200 detyra të dedikuara për të gjithë nxënësit nga klasa e 7, 8 dhe 9 për të cilat ka përgjigje. Në fund të temës së gjashtë ka mbi 100 detyra të cilat u dedikohen nxënësve më solid dhe për nxënësit që marrin pjesë në mësimin plotësues dhe për të njëjtit janë dhënë zgjidhjet.

Autorët vlerësojnë se me shfrytëzimin e dorëshkrimi dukshëm do të shtohet dituria e të gjithë nxënësve në matematikë, si dhe interesi për punë me nxënësit më solid, dhe njëkohësisht do të rritet suksesi në garat matematikore.

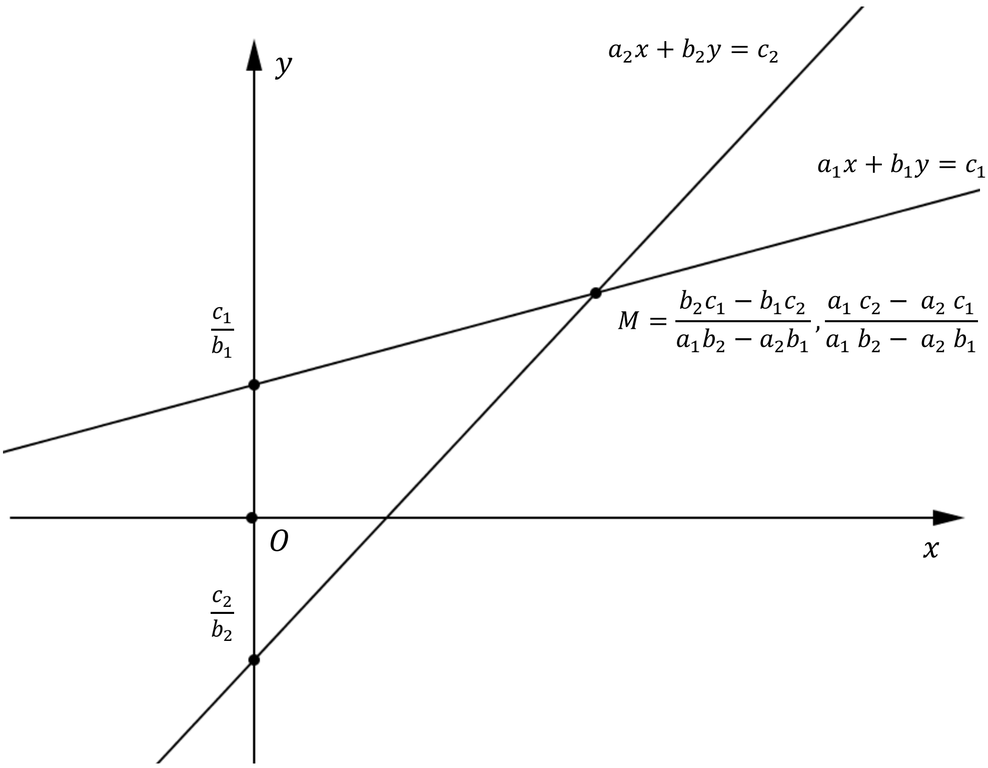
Falënderim deri te recensentët për sugjerimet e tyre me të cilat është përmirësuar kualiteti i dorëshkrimit.

Autorët

TEMA 1

Metodat për zgjidhje të sistemeve prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura

Në këtë temë janë dhënë metodat për zgjidhje të sistemeve prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura dhe diskutimet për zgjidhjet metodat e Kramerit, metoda grafike e zëvendësimit, metoda e barazimit, metoda e koeficienteve të kundërt dhe algoritmi I Gausit më së shpeshti shfrytëzohen, ndërsa metodat: metoda e koeficienteve të lirë të kundërt, metoda e sjelljes së koeficientit të proporcionalitetit, metoda e vizatimit të drejtëzës nëpër pikën (0,0) dhe metoda e koeficienteve të barabartë dhe tranzitivitetit, rrallë shfrytëzohen dhe qëllimi jonë është të paraqiten të gjitha metodat e theksuara.



Për zgjidhjet e sistemit të barazimeve lineare me dy të panjohura

Secili sistem prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura x dhe y mund të sjellet deri te ashtuquajtura *forma e përgjithshme*:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Ku a_1 , a_2 , b_1, $b_2$janë numra real të dhënë.

(I) SISTEMI I RREGULLT (Anët e majta të dy barazimeve nuk janë proporcionale, gjegjësisht $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$) Secili sistem i rregulluar ka një zgjidhje të vetme (x, y). Duke e shikuar gjeometrikisht, barazimet që e formojnë sistemin paraqesin drejtëza joparalele dhe për atë shkak ato në prerje kanë një dhe të vetmen pikë(x, y). Bashkësia e zgjidhjeve Mpërbëhet nga çifti i renditur i numrave real x dhe y.

Shembull 1: Sistemi rregullarë $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 5x + 7y = 12 \end{cases}$ ka bashkësinë e zgjidhjeve $M = \{(1,1)\}$.

(II)SISTEM KUNDËRTHËNËS (Anët e majta të dy barazimeve janë proporcionale, por ai proporcionalitet nuk bartet në anët e djathta, gjegjësisht $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$). Secili sistem kundërthënës nuk ka zgjidhje. Shikuar gjeometrikisht, barazimet që e formojnë sistemin paraqesin dy drejtëza të ndryshme paralele.

Shembulli 2: Sistemi kundërthënës $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 6x - 8y = 5 \end{cases}$ ka bashkësi të zgjidhjeve të zbrazët gjegjësisht. $M = \emptyset$.

(III) SISTEM I PA PËRCAKTUAR (Anët e majta të dy barazimeve janë proporcionale, dhe ai proporcionalitet bartet edhe në anët e djathta, gjegjësisht.$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$). Secili sistem i papërcaktuar ka bashkësi të pafundme të zgjidhjeve. Shikuar gjeometrikisht, bëhet fjalë për një drejtëz ose i tërë rrafshi.

Shembull 3: Sistemi i papërcaktuar $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 9x - 12y = -3 \end{cases}$ ka bashkësi të zgjidhjeve $M = \left\{\left(\frac{3y-1}{2}, y\right) : y \in \mathbb{R}\right\}$ që paraqet tërësinë e pikave të cilat formojnë drejtëz.

<u>Shembull4</u>: Sistemi i papërcaktuar $\begin{cases} 0 \cdot x - 0 \cdot y = 0 \\ 0 \cdot x - 0 \cdot y = 0 \end{cases}$ ka bashkësi të zgjidhjeve $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e cila paraqet tërësi të pikave në rrafsh.

Siç theksuam, në vazhdim do të përshkruajmë disa metoda për zgjidhje të sistemit rregullar.

Metoda e Kramerit

Le të jetë $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\delta - \beta\gamma$ (kjo shprehje quhet ***determinantë***).

Për sistemin $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ shqyrtojmë tri determinanta:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_1b_2 - a_2b_1$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 b_1 \\ c_2 b_2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} c_1b_2 - c_2b_1$ dhe $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_1c_2 - a_2c_1$.

E para quhet detrminanta e sistemit, e të tjerat janë *determinanta të shoqëruara me të panjohurat* x dhe y, përkatësisht.

Formulat vijuese të Kramerit e përcaktojnë zgjidhjen e vetme të sistemit rregullar (gjegjësisht sistemit që ka determinantë Δ të ndryshme nga zero gjegjësisht për të cilën vlen $a_1b_2 \neq a_2b_1$):

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Shembulli 1: $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 5x + 7y = 12 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 20 = 41$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 12 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 48 = 41$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 36 + 5 = 41$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{41}{41} = 1\ ,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{41}{41} = 1$$

Metoda Grafike

Le të jetë dhënë sistemi në formë të përgjithshme për të cilin vlen $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ gjegjësisht. $a_1b_2 \neq a_2b_1$. Ta shprehim të panjohurën y nëpërmjet x *në* secilën nga barazimet të sistemit:

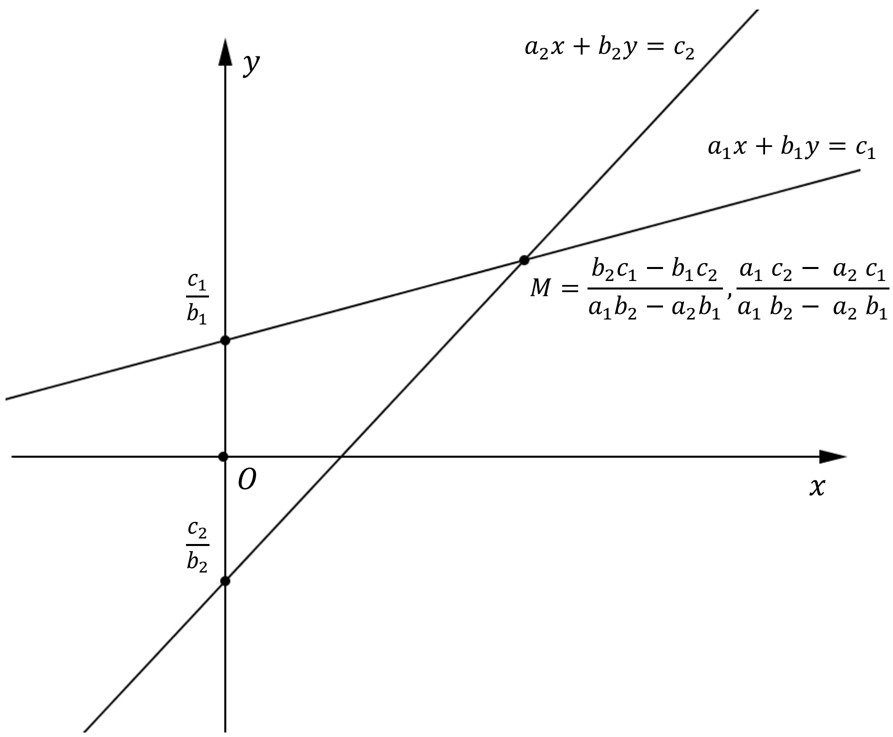
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1} \\ y = \frac{c_2 - a_2x}{b_2} \end{cases}$$

Kështu fitojmë barazime eksplicite të dy drejtëzave joparalele. I tabelojmë:

x	-1	0	1
y	$\frac{c_1+a_1}{b_1}$	$\frac{c_1}{b_1}$	$\frac{c_1-a_1}{b_1}$

x	-1	0	1
y	$\frac{c_2+a_2}{b_2}$	$\frac{c_2}{b_2}$	$\frac{c_2-a_2}{b_2}$

Pikprerja e drejtëzave është zgjidhja e vetme e sistemit të barazimeve:



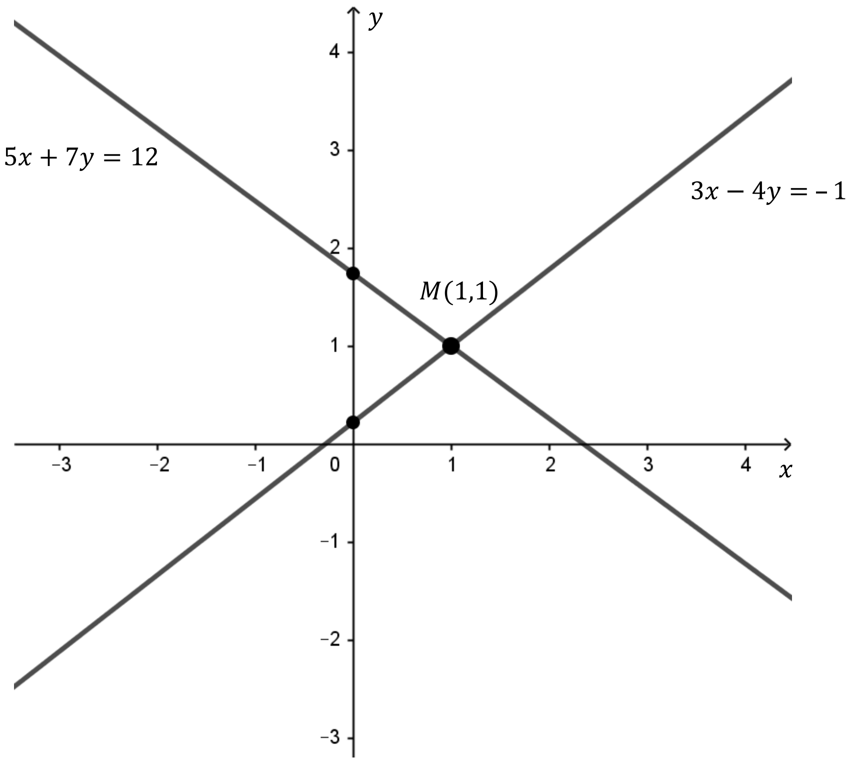
$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \; y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Shembulli 2: $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 5x + 7y = 12 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4y = 3x + 1 \\ 7y = 12 - 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3x+1}{4} \\ y = \frac{12-5x}{7} \end{cases}$$

x	-1	0	1
y	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

x	-1	0	1
y	$\frac{17}{7}$	$\frac{12}{7}$	1



$$x = 1,\ y = 1$$

Metoda e zëvendësimit

Parakusht është që së paku njëri nga koeficientët $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ të jetë i ndryshëm nga zero, të themi$b_1 \neq 0$.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} a_1x+b_1y=c_1 \\ y=\frac{c_1-a_1x}{b_1} \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} y = \frac{c_1-a_1x}{b_1} \\ a_2x + b_2\frac{c_1-a_1x}{b_1} = c_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ x = \frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1},\ y = \frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\ \text{(për } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\text{,т=a.ë.}a_1b_2 \neq a_2b_1\text{).}$$

Shembull 3: $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 5x + 8y = 13 \end{cases} \quad \begin{matrix} 4y = 3x+1 \\ y = \frac{3x+1}{4} \end{matrix}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = \frac{3x+1}{4} \\ 5x + 8\frac{3x+1}{4} = 13 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Longrightarrow M = \{(1,1)\}.$$

Metoda e barazimit

Parakusht është $a_1,\ a_2 \neq 0$ose$b_1,\ b_2 \neq 0$. Të marrim se $b_1, b_2 \neq 0$.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \frac{c_1-a_1x}{b_1} \\ y = \frac{c_2-a_2x}{b_2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{c_1-a_1x}{b_1} = \frac{c_2-a_2x}{b_2}.$$

$$\Longrightarrow\ x = \frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1},\ y = \frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\ \text{(për } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\text{, a.ë.}a_1b_2 \neq a_2b_1\text{).}$$

Shembulli 4: $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 5x + 8y = 13 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \frac{3x+1}{4} \\ y = \frac{13-5x}{8} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Longrightarrow M = \{(1,1)\}.$

Metoda e koeficienteve të kundërt

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \ \ /\cdot b_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \ \ /\cdot (-b_1) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1 \\ -a_2b_1x - b_1b_2y = -b_1c_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1},\ y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \ \text{(për } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\text{, a.ë. } a_1b_2 \neq a_2b_1\text{)}.$$

Shembull 5: $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \ \ /\cdot 2 \\ 5x + 8y = 13 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6x - 8y = -2 \\ 5x + 8y = 13 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Longrightarrow M = \{(1,1)\}.$

Algoritmi i Gausit

Parakusht është që së paku njëri nga koeficientët $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$të jetë i ndryshëm nga zero, të marrim që $a_1 \neq 0$.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \ \ /: a_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + \frac{b_1}{a_1}y = \frac{c_1}{a_1} \ \ /(-a_2) \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Pasi ta shumëzojmë barazimin e parë me $-a_2$, e shtojmë në të dytën dhe fitojmë:

$$\begin{cases} x + \frac{b_1}{a_1}y = \frac{c_1}{a_1} \\ 0 + \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{c_1}y = c_2 - \frac{a_2c_1}{a_1} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$\Longrightarrow y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \ \text{(për } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\text{, a.ë.} a_1b_2 \neq a_2b_1\text{)}.$$

Shembulli 6: $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \ \ / : 3 \\ 5x + 8y = 13 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \ \ / \cdot (-5) \\ 5x + 8y = 13 \end{cases}$

Pasi ta shumëzojmë barazimin e parë me -5, e shtojmë në të dytën dhe fitojmë:

$$\begin{cases} x - \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \\ 0 + \left(\frac{20}{3} + 8\right)y = \frac{5}{3} + 13 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \\ \frac{44}{3}y = \frac{44}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Longrightarrow M = \{(1,1)\}.$$

Metoda e koeficienteve të lirë të kundërt

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \ \ / \cdot (-c_2) \\ a_2x + b_2y = c_2 \ \ / \cdot c_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \ + \begin{cases} -a_1c_2x - b_1c_2y = -c_1c_2 \\ a_2c_1x + b_2c_1y = c_1c_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \ x(a_2c_1 - a_1c_2) = y(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\Longrightarrow \ x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2c_1 - a_1c_2}y$$

$$a_1\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2c_1 - a_1c_2}y + b_1y = c_1$$

$$(a_1b_1c_2 - a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1 - a_1b_1c_2)y = c_1(a_2c_1 - a_1c_2)$$

$$c_1(a_1b_2 - a_2b_1)y = c_1(a_2c_1 - a_1c_2)$$

$$\Longrightarrow \ y = \frac{a_1\,c_2 - a_2\,c_1}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1},\ x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\ \ (\text{për } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \text{a.ë.} a_1b_2 \neq a_2b_1).$$

Shembull 7: $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \ \ / \cdot 13 \\ 5x + 8y = 13 \end{cases} \ \Longrightarrow \ \begin{cases} 39x - 52y = -13 \\ 5x + 8y = 13 \end{cases} \ \Longrightarrow \ 44x = 44y \ \Longrightarrow \ x = y$

$$3x - 4x = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = 1, y = 1 \qquad M = \{(1,1)\}.$$

Metoda e vënies së koeficienteve të proporcionalitetit

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & /\cdot c_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 & /\cdot(-c_1) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} a_1c_2x + b_1c_2y = c_1c_2 \\ -a_2c_1x - b_2c_1y = -c_1c_2 \end{cases}$$

$$(a_1c_2 - a_2c_1)x - (b_2c_1 - b_1c_2)y = 0$$

$$(a_1c_2 - a_2c_1)x = (b_2c_1 - b_1c_2)y$$

$$\frac{x}{b_2c_1 - b_1c_2} = \frac{y}{a_1c_2 - a_2c_1} = k$$

$$x = (b_2c_1 - b_1c_2)k;\ y = (a_1c_2 - a_2c_1)k$$

$$a_1(b_2c_1 - b_1c_2)k + b_1(a_1c_2 - a_2c_1)k = c_1$$

$$k(a_1b_2c_1 - a_1b_1c_2 + a_1b_1c_2 - a_2b_1c_1) = c_1$$

$$k = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\Longrightarrow\ x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1},\ y = \frac{a_1\,c_2 - a_2\,c_1}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1}\ \ (\text{për } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \text{a.ë.} a_1b_2 \neq a_2b_1).$$

Shembulli 8: $\begin{cases} 3x - 4y = -1 & /\cdot 13 \\ 5x + 8y = 13 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 39x - 52y = -13 \\ 5x + 8y = 13 \end{cases} \Longrightarrow\ 44x - 44y = 0,$

gjegjësisht. $44x = 44y$, prej ku rrjedh $\frac{x}{44} = \frac{y}{44} = k$

$$x = 44k,\ y = 44k$$

$$3 \cdot 44k - 4 \cdot 44k = -1$$

$$132k - 176k = -1$$

$$44k = 1$$

$$k = \frac{1}{44} \Longrightarrow\ x = 44 \cdot \frac{1}{44} = 1,\ \ y = 44 \cdot \frac{1}{44} = 1.$$

Metoda e vizatimit të drejtëzës nëpër pikën (0,0)

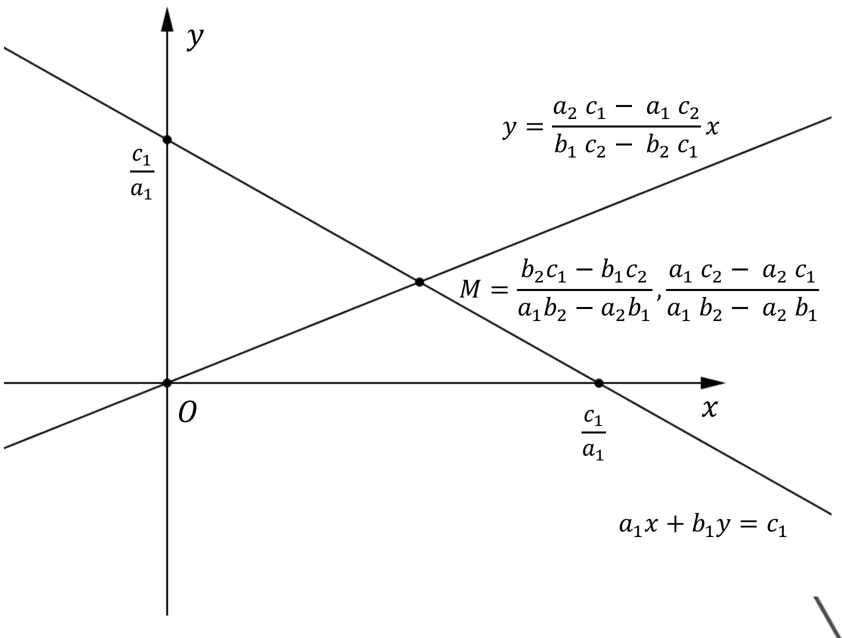
- Vizatohet drejtëza nëpër pikën (0,0)
- Shfrytëzohen pikëprerjet me boshtet

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & /\cdot(-c_2) \\ a_2x + b_2y = c_2 & /\cdot c_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -a_1c_2x - b_1c_2y = -c_1c_2 \\ a_2c_1x + b_2c_1y = c_1c_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ y = \frac{a_2\,c_1 - a_1\,c_2}{b_1\,c_2 - b_2\,c_1}x$$ - vizatojmë drejtëz nëpër pikën (0,0).

vizatojmë dhe $a_1x + b_1y = c_1$. Për $x = 0,\ y = \frac{c_1}{b_1}$; $y = 0,\ x = \frac{c_1}{a_1}$



Shembulli 9: $\begin{cases} 3x - 4y = -5 & /\cdot 14 \\ 4x + 5y = 14 & /\cdot 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 42x - 56y = -70 \\ 20x + 25y = 70 \end{cases} \Longrightarrow 62x = 31y \Longrightarrow y = 2x.$

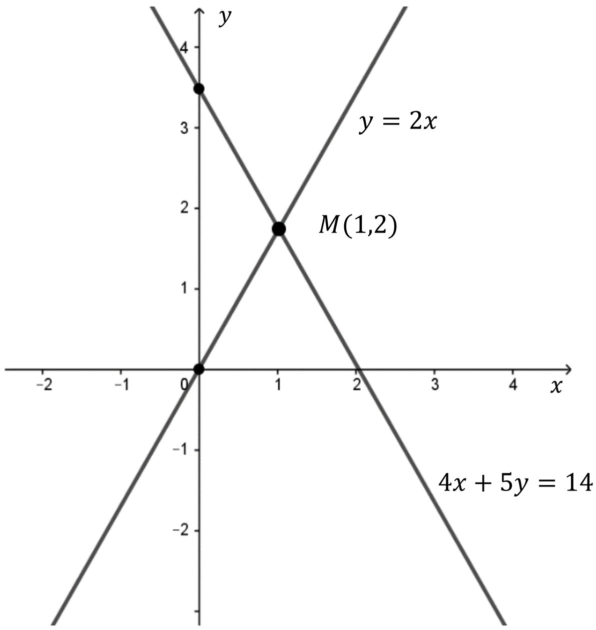
Për $x = 0,\ y = 0$; për $x = -1,\ y = -2$.

Nga $4x + 5y = 14$ fitojmë:

Për $x = 0,\ y = \frac{14}{5}$;

Për $y = 0,\ x = \frac{7}{2}$.

Zgjidhje: $x = 1,\ y = 2$.



Metoda e koeficienteve të barabartë dhe tranzitiviteti

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \ \ /\cdot a_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \ \ /\cdot a_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1a_2x + a_2b_1y = a_2c_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1a_2x = a_2c_1 - a_2b_1y \\ a_1a_2x = a_1c_2 - a_1b_2y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \ a_2c_1 - a_2b_1y = a_1c_2 - a_1b_2y$$

$$\Longrightarrow \ a_1b_2y - a_2b_1y = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$\Longrightarrow \ y = \frac{a_1\,c_2 - a_2\,c_1}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1} \ \ (\text{për } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \text{a.ë.} a_1b_2 \neq a_2b_1)$$

$$a_1x = c_1 - b_1y$$

$$a_1x = c_1 - b_1\frac{a_1\,c_2 - a_2\,c_1}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1}$$

$$\Longrightarrow \ x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \ \ (\text{për } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \text{ a.ë. } a_1b_2 \neq a_2b_1).$$

Shembulli 10: $\begin{cases} 3x - 4y = -5 \ \ /\cdot 4 \\ 4x + 5y = 14 \ \ /\cdot 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 12x - 16y = -20 \\ 12x + 15y = 42 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 12x = -20 + 16y \\ 12x = 42 - 15y \end{cases}$

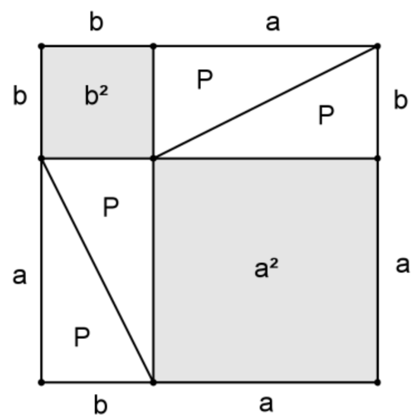
$$-20 + 16y = 42 - 15y \ \Longrightarrow \ y = 2$$

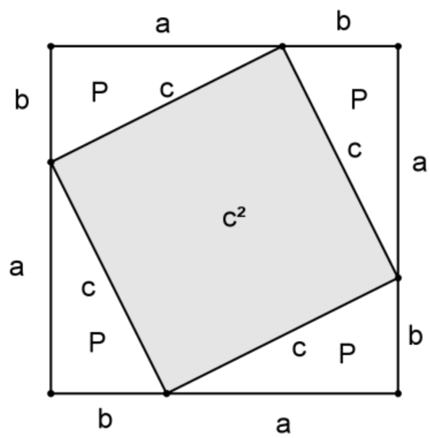
$$3x - 4 \cdot 2 = -5 \ \Longrightarrow \ x = 1.$$

TEMA 2

Elemente të planimetrisë

Në këtë temë janë përdëftuar teoremat elementare të gjeometrisë së rrafshit të ashtuquajtur planimetri. Bëhet fjalë për teoremat e Talesit, teorema e Euklidit, teorema e Pitagorës dhe teorema e kundërt e Pitagorës, teorema e Heronit, si dhe për disa formula më të rëndësishme për përdëftimet e të cilave zbatohen teoremat e përmendura.

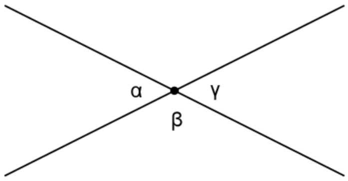




1. Këndet

Teorema: Secilët dy kënde të kryqëzuara janë të barabartë.

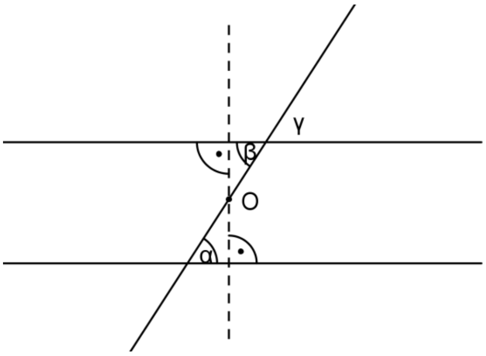
Përdëftim:



$\alpha + \beta = \gamma + \beta = 180°$.
Rrjedh se $\alpha = \gamma$.

Teorema: Secilat dy kënde përkatës, të fituar gjatë prerjes së dy drejtëzave paralele me transversale, janë të barabartë.

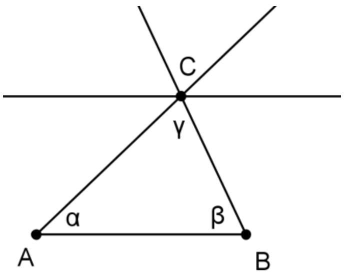
Përdëftim:



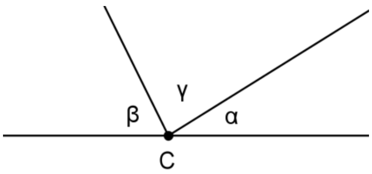
Mjafton të tregojmë barazinë e këndeve α dhe γ. Si kënde të kryqëzuara, të barabartë janë γ dhe β. Le të jetë O pikë e mesit e segmentit e cila është e prerë në transversalen. Të tërheqim nëpër O drejtëz e cila është normale në drejtëzën *a* dhe *b*. Dy trekëndëshat që fitohen janë të përputhshëm (sipas KBK). Nga këtu $\alpha = \beta$.

Teorema: Shuma e këndeve të brendshme në çdo trekëndësh është180°.

Përdëftim:



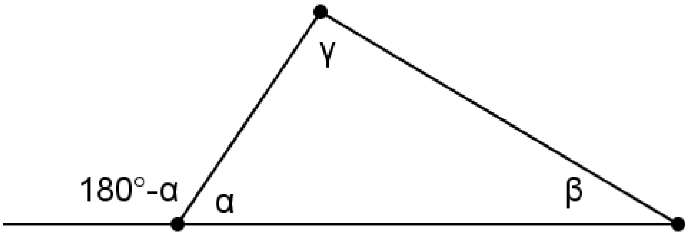
Të tërheqim nëpër kulmin C Drejtëzën që është paralele me AB. Atëherë,



gjegjësisht $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Pasoja: Për çdo trekëndësh, këndi i jashtëm te cilido kulm është i barabartë me shumën e dy këndeve të brendshëm jofqinjë me të.

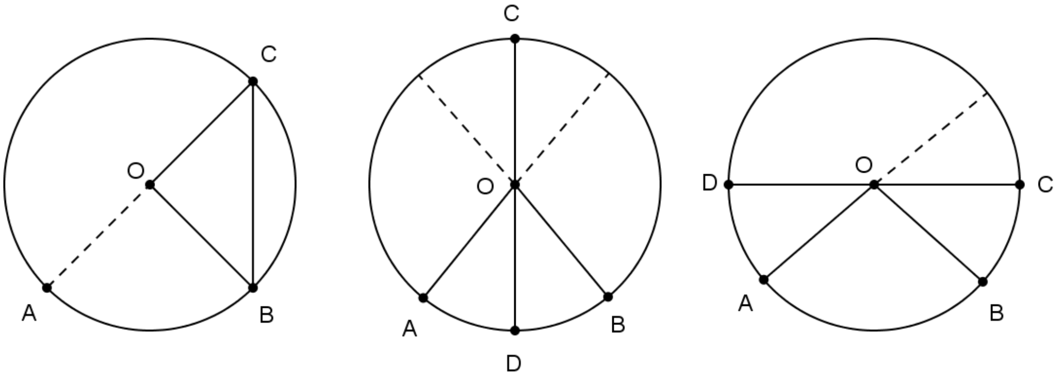
Përdëftim: rjedh drejtpërsëdrejti nga barazimi $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Gjegjësisht, $180° - \alpha = \beta + \gamma$.



Pasojë: Në secilin trekëndësh barakrahës, këndi i jashtëm në kulm është dy herë më i madh se këndi i brendshëm në bazë.

Teorema e Talesit: (këndet periferike) Le të jetë $\widehat{AB}$ harku i rrethit. Atëherë secili kënd periferik mbi harkun $\widehat{AB}$ është dy herë më i vogël se këndi qendrorë mbi harkun $\widehat{AB}$.

Përdëftim:



(rasti parë) (rasti dytë) (rasti tretë)

Të shënojmë me O qendrën e vijës rrethore dhe le të jetë C pikë e vijës rrethore e cila nuk shtrihet në harkun $\widehat{AB}$.

Rasti i parë: C shtrihet në diametrin e njëjtë me A ose B.
Atëherë, pohimi shndërrohet në pasojën paraprake.

Rasti i dytë: C është pikë e brendshme e harkut të kundërt diametral të $\widehat{AB}$. Të tërheqim diametër të vijës rrethore i cili kalon nëpër pikën C dhe le të jetë pika D skaji tjetër. Sipas rastit të parë, $\sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\sphericalangle AOD$ dhe $\sphericalangle DCB = \frac{1}{2}\sphericalangle DOB$, Dhe mjafton ti mbledhim dy barazimet e fundit.

Rasti i tretë: C shtrihet jashtë harkut të kundërt diametral të $\widehat{AB}$. Përsëri të tërheqim diametër të vijës rrethore që kalon nëpër pikën C dhe le të jetë pika D skaji tjetër. Këtë herë i zbresim barazimet (më të vogël nga më e madhe) $\sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\sphericalangle AOD$ dhe $\sphericalangle DCB = \frac{1}{2}\sphericalangle DOB$.

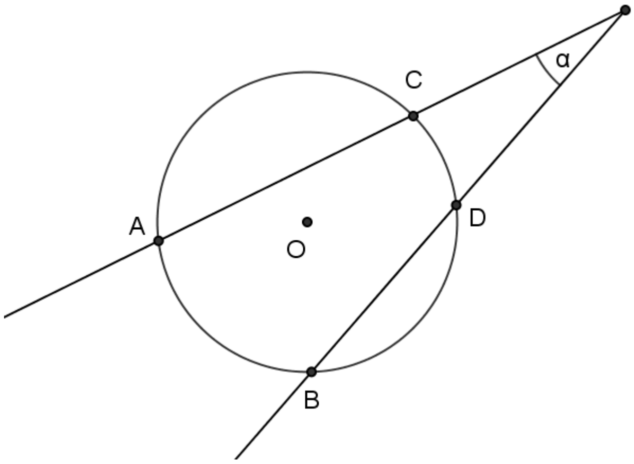
Vërejtje: Për shkak të teoremës së mëparshme, e zakontë është që madhësia e këndit qendrorë mbi harkun $\widehat{AB}$të shënohet gjithashtu me $\widehat{AB}$. Kështu, madhësia e secilit kënd periferik mbi atë hark është $\frac{1}{2}\widehat{AB}$.

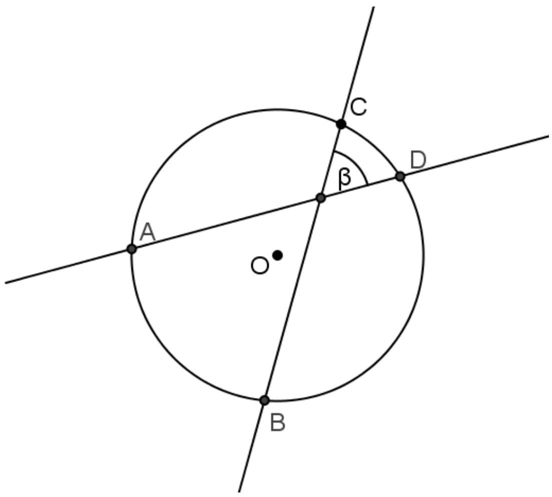
Pasojë: Këndi periferik mbi çdo diametër në vijë rrethore është kënd i drejtë.

Vlen edhe pohimi i kundërt. Vendi gjeometrik i pikave C nga rrafshi nga të cilat segmenti i dhënëAB „shikohet" nën kënd të drejtë, gjegjësisht për të cilat vlen $\sphericalangle ACB = 90°$, paraqet vijë rrethore me diametër AB (pa pikat A dhe B).Kjo rrjedhë drejtpërsëdrejti nga e ashtu quajtur „teorema për kënde në vijë rrethore".

Teorema: Për këndet αdhe β të treguar në vizatimin e më poshtëm vlejnë barazimet:

(i) $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{AB} - \frac{1}{2}\widehat{CD}$ (ii) $\beta = \frac{1}{2}\widehat{AB} + \frac{1}{2}\widehat{CD}$





Përdëftim: Duke e shfrytëzuar barazimin bazë të këndit të jashtëm të trekëndëshit, fitojmë se: (i) $\alpha = \sphericalangle ADB - \sphericalangle DAC$, (ii) $\beta = \sphericalangle ACB + \sphericalangle DAC$.

Pasojë: Le të jetëABdiametër i vijës rrethore $k$dheγështë kënd konveks në rrafshin me kulm E krahët e të cilit kalojnë nëpër pikat A dhe B, përkatësisht. Atëherë:

(i) pika Eshtrihet jashtë vijës rrethore $k$nëse dhe vetëm nëse γështë kënd i ngushtë;

(ii) pika Eshtrihet në brendi të vijës rrethore $k$nëse dhe vetëm nëse γështë kënd i gjerë;

(iii) pika Eshtrihet në vijë rrethore $k$nëse dhe vetëm nëse γështë kënd i drejtë.

2. Syprina

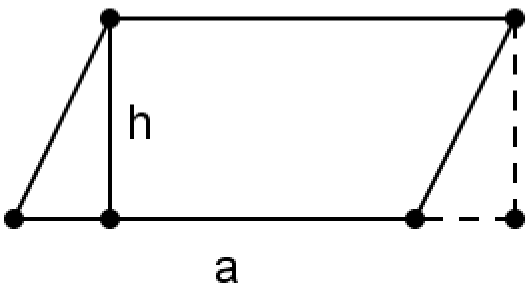
Si bazë (dhe pa përdëftim) do ta marrim pohimin vijues për syprinën e drejtkëndëshit.

Teorema: Syprina e drejtkëndëshit me brinjë a dhe b është ab.

Vërejtje: Përdëftimi rrjedh nga kornizat e pohimit të zakonshëm „naiv ose laik" të kuptimit për syprinë të figurave në rrafsh, dhe për atë shkak nuk i japim ndonjë rëndësi të posaçme.

Teorema: Syprina e paralelogramit me brinjë a dhe lartësi përkatëse h është ah.

Përdëftim:



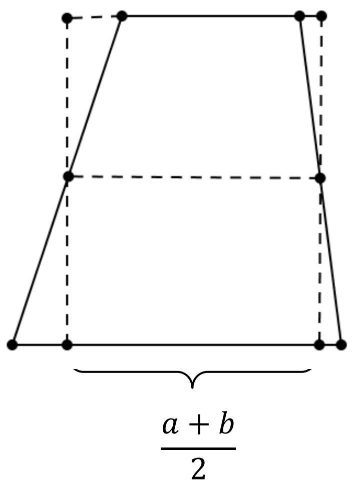
Nga vizatimi rrjedh se syprina e paralelogramit është e barabartë me syprinën e drejtkëndëshit me brinjë a dhe h.

Duke patur parasysh se ky paralelogram me tërheqje të një diagonal është ndarë në dy trekëndësh të përputhshëm, nga teorema paraprake e fitojmë formulën vijuese për syprinën e trekëndëshit.

Pasoja: Syprina e trekëndëshit me brinjën a dhe lartësi përkatëse h është $\frac{ah}{2}$.

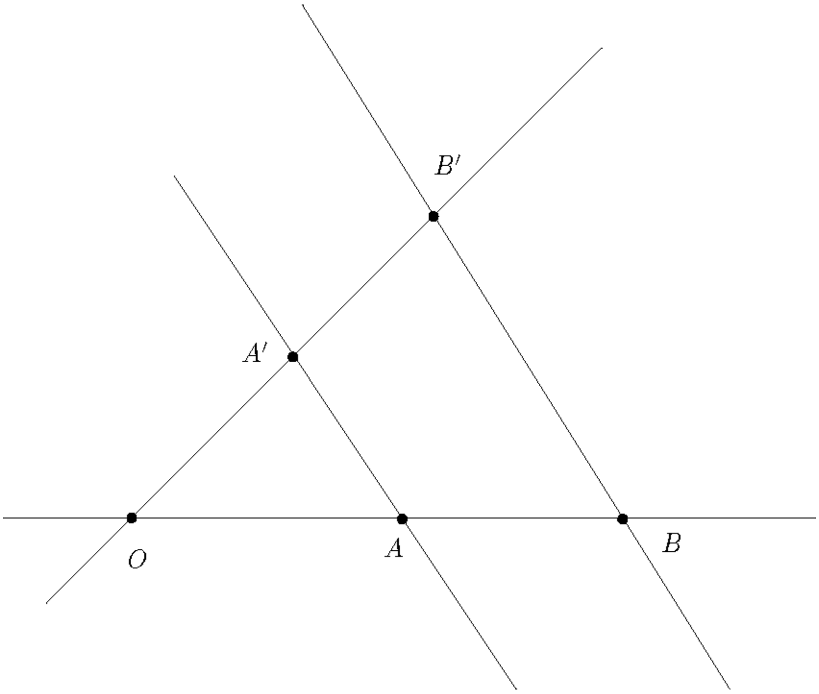
Teorema: Syprina e trapezit me bazë a dhe b dhe lartësi h është $\frac{a+b}{2}h$.

Përdëftim:

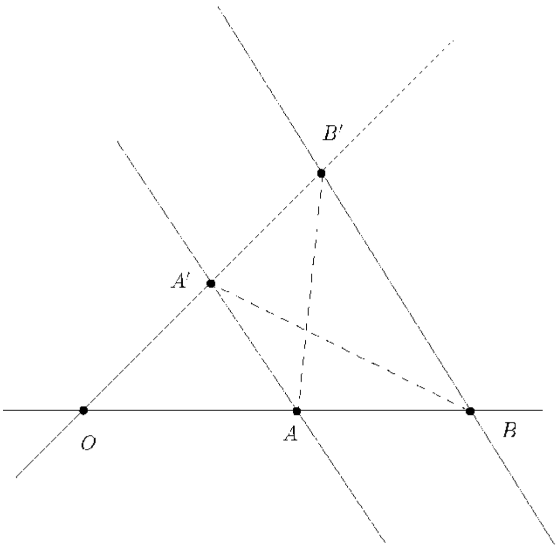


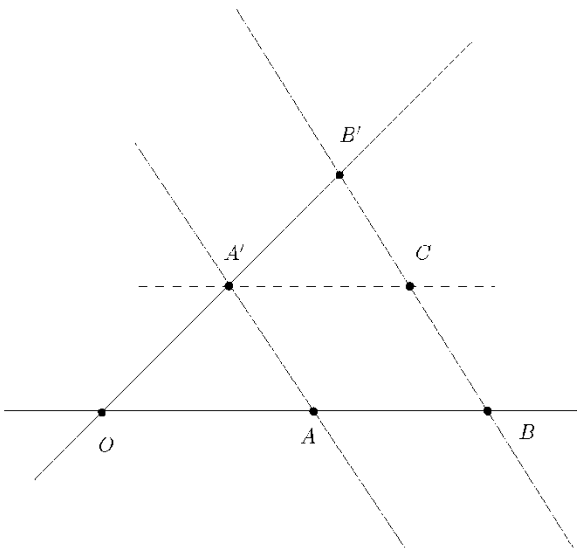
Nga vizatimi rrjedh se syprina e trapezit Është e barabartë me syprinën e drejtkëndëshit me brinjë $\frac{a+b}{2}$ dhe h.

Teorema e Talesit: (segmentet proporcionale) Krahët e këndit të dhënë AOA' janë prerë nga dy drejtëza paralele AA' dhe BB'. Atëherë vlen $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$.



Përdëftim: Ta përdëftojmë fillimisht barazimin $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$. Nga drejtëzat paralele AA' dhe BB' rrjedhë $P_{ABA'} = P_{AB'A'}$ (vizatimi majtas). Nga këtu, $P_{OBA'} = P_{OAB'}$ gjegjësisht $\frac{P_{OAA'}}{P_{OBA'}} = \frac{P_{OAA'}}{P_{OAB'}}$. Pasi që trekëndëshat OAA' dhe OBA' kanë lartësi të përbashkët, sipas formulës për syprinë të trekëndëshit, vlen $\frac{P_{OAA'}}{P_{OBA'}} = \frac{OA}{OB}$. Në mënyrë analoge përfundojmë se $\frac{P_{OAA'}}{P_{OAB'}} = \frac{OA'}{OB'}$, që e vërteton barazimin $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$.



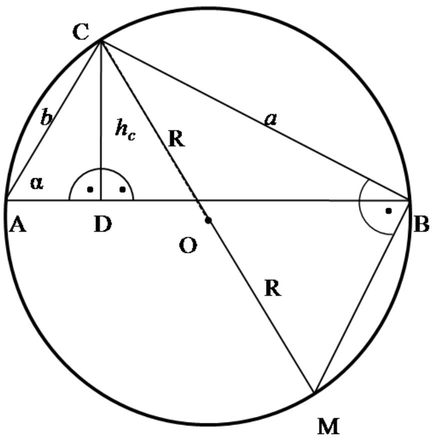


Që të vërtetojmë barazimin $\frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$, nëpër pikën A' tërheqim drejtëz paralele me krahun OA. Drejtëza e tërhequr le të preje drejtëzën BB' në pikën C (vizatimi djathtas). Nga paralelogrami $ABCA'$ rrjedh se $AA' = BC$. Sipas proporcionit të përdëftuar (e zbatuar për $\sphericalangle OB'B$ dhe drejtëzat paralele $A'C$ dheOB), $\frac{B'A'}{B'O} = \frac{B'C}{B'B} = \frac{BB'-AA'}{BB'} = 1 - \frac{AA'}{BB'}$. Nga këtu, $\frac{AA'}{BB'} = 1 - \frac{A'B'}{OB'} = \frac{OB'-A'B'}{OB'} = \frac{OA'}{OB'}$.

Teorema: Në çdo trekëndësh, rrezja R e rrethit të jashtëshkruar është e barabartë me herësin e prodhimit të tre brinjëve a, b dhe $c$me vlerën e katërfishtë të syprinës S të trekëndëshit, gjegjësisht

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Përdëftim: Nga$\sphericalangle DAC = \sphericalangle BMC$ (si kënde periferik)
Rrjedh se $\Delta ADC \sim \Delta MBC$. Domethënë $h_c : b = a : 2R$, gjegjësisht Vlen $2R = \frac{ab}{h_c}$. Nga $S = \frac{ch_c}{2}$ fitojmë se $h_c = \frac{2S}{c}$. Nga këtu rrjedh barazimi i dëshiruar $R = \frac{abc}{4S}$.



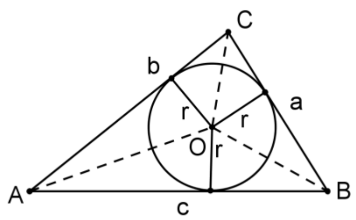
Teorema: Në çdo trekëndësh, rrezja$r$e rrethit të brendashkruar është e barabartë me herësin e syprinës Sdhe dhe gjysmëperimetrin s të trekëndëshit, gjegjësisht

$$r = \frac{S}{s} \text{ ku } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Përdëftim: Nga vizatimi kemi se $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ABO} + P_{\Delta BCO} + P_{\Delta CAO}$.

Domethënë S$= \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{2}$, gjegjësisht $S = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$.

Nga këtu $r = \frac{P}{s}$.

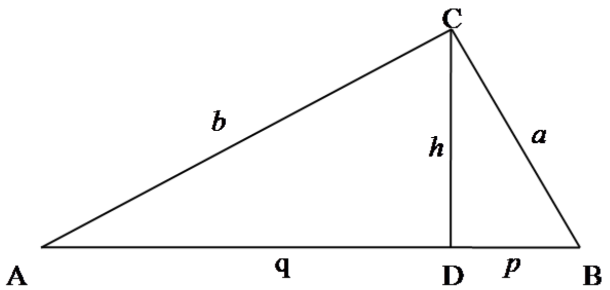


Vërejtje: Formulat $R = \frac{abc}{4S}$ dhe $r = \frac{S}{s}$, në rastin e trekëndëshit barabrinjës me brinjë a fitojnë formën $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ dhe $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

3. Teoremat e Euklidit dhe Pitagorës

Teorema e Euklidit: Në çdo trekëndësh kënddrejtë me hipotenuzë c (duke i shfrytëzuar shenjat nga vizatimi) plotësohen tre barazimet vijuese:

$$a^2 = pc$$
$$b^2 = qc$$
$$h^2 = pq$$

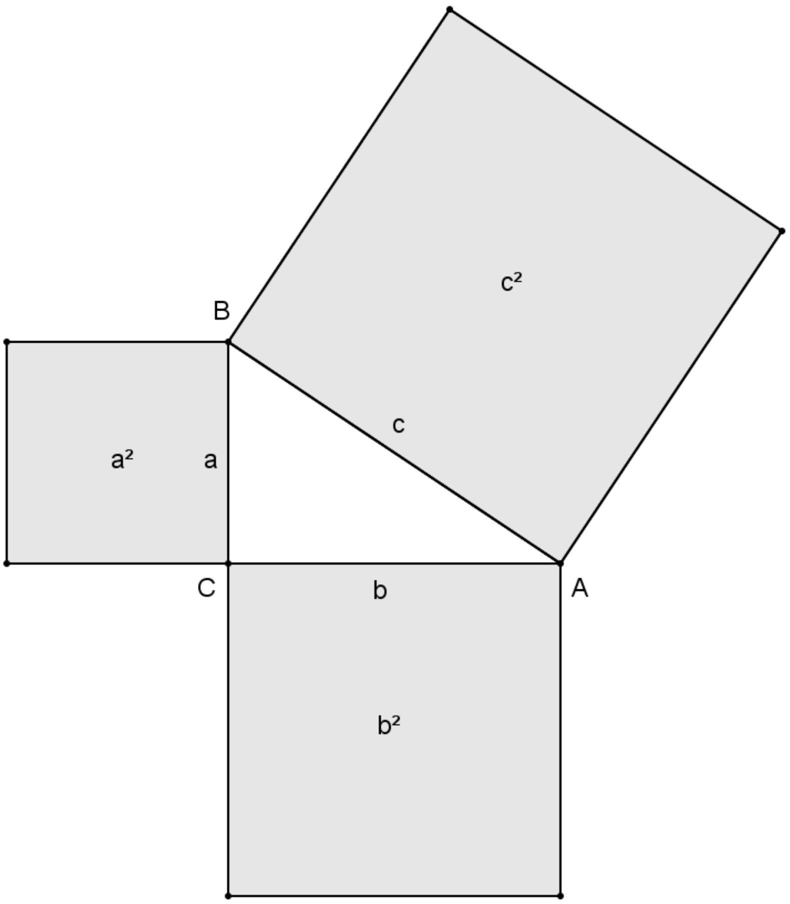


Përdëftim: Të shënojmë se ΔABC ~ ΔCBD dhe ΔABC ~ ΔACD. Nga këtu kemi se

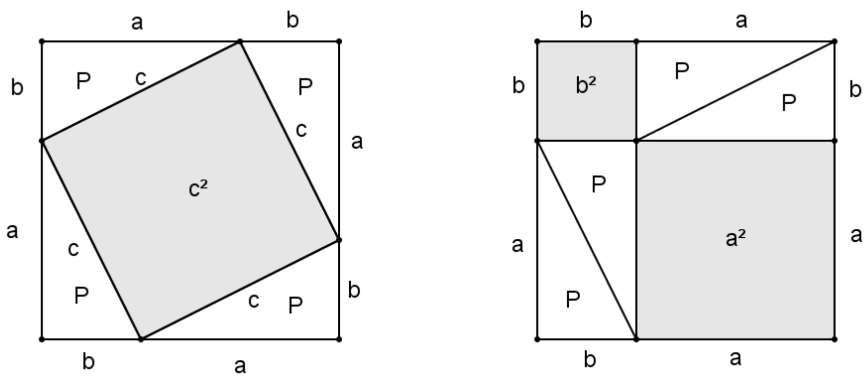
$$a:p = c:a = b:h \Rightarrow b:q = c:b = a:h$$
$$\Rightarrow a^2 = pc \text{ dhe } ah = pb \Rightarrow b^2 = qc \text{ dhe } bh = aq.$$

Duke i shumëzuar barazimet $ah = pb$ dhe $bh = aq$ fitojmë $ab \cdot h^2 = ab \cdot pq$.

Teorema e Pitagorës: Në secilin trekëndësh kënddrejtë syprina e katrorit të ndërtuar mbi hipotenuzë është e barabartë me shumën e katrorëve të ndërtuar mbi katete.



Përdëftimi parë: Mjafton të vërehen prerjet vijuese të katrorit me brinjë $a + b$:



Përdëftimi dytë: Nëse ∢C është i drejtë. Sipas teoremës së Euklidit,

$$\begin{cases} a^2 = pc \\ b^2 = qc. \end{cases}$$

Nga këtu,
$a^2 + b^2 = pc + qc = (p+q)c = c^2$.

Teorema e kundërt e Pitagorës: Nëse në trekëndësh me brinjë a, b dhe c vlen barazimi

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

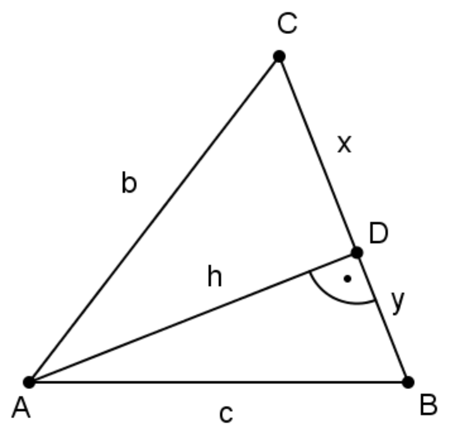
atëherë këndi i brendshëm përballë brinjës c është i drejtë.

Përdëftim: Do të përdëftojmë pohimin vijues më të fortë: Nëse ABC është trekëndësh me brinjë $a = BC, b = AC$ dhe $c = AB$. Vlen:

(I) nëse $\sphericalangle ACB < 90°$, atëherë $c^2 < a^2 + b^2$;

(II) nëse $\sphericalangle ACB > 90°$, atëherë $c^2 > a^2 + b^2$.

Përdëftimi i (I): Lartësia e lëshuar nga cilido nga kulmet A dhe B është në brendi të trekëndëshit ABC (sepse $\sphericalangle C < 90°$).



Me shenjat nga vizatimi ($x = CD, y = BD$), duke e shfrytëzuar teoremën e Pitagorës, kemi:

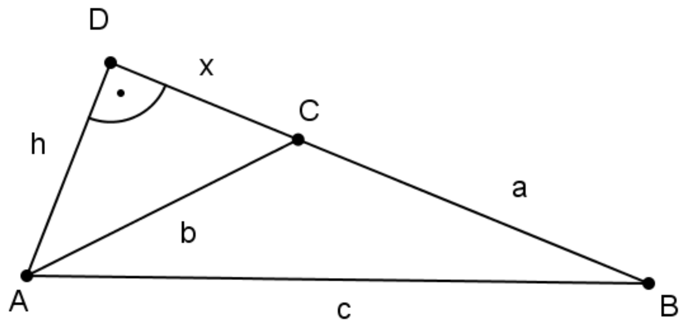
$$a^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$b^2 = h^2 + x^2$$

$$c^2 = h^2 + y^2.$$

Nga këtu, $a^2 + b^2 = c^2 + (2x^2 + 2xy) = c^2 + 2x(x+y) = c^2 + 2xa > c^2$.

Përdëftimi i (II): Lartësia e lëshuar nga cilido kulm A dhe B është në pjesën e jashtme të trekëndëshit ABC (sepse $\sphericalangle C > 90°$).



Me shenjat nga vizatimi $(x = CD, y = BD)$, duke e shfrytëzuar teoremën e Pitagorës, kemi:

$$a^2 = (y - x)^2 = y^2 - 2xy + x^2$$

$$b^2 = h^2 + x^2$$

$$c^2 = h^2 + y^2.$$

Nga këtu, $a^2 + b^2 = c^2 - (2xy - 2x^2) = c^2 - 2x(y - x) = c^2 - 2xa < c^2$.

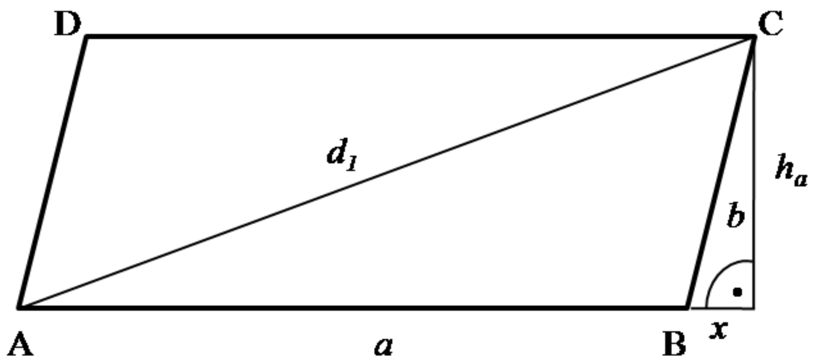
4. Dy zbatime të teoremës së Pitagorës

Teorema: Te secili paralelogram, shuma e katrorëve në diagonale është e barabartë me shumën e dyfishtë të katrorëve të brinjëve, gjegjësisht.

$d_1{}^2 + d_2{}^2 = 2(a^2 + b^2)$.

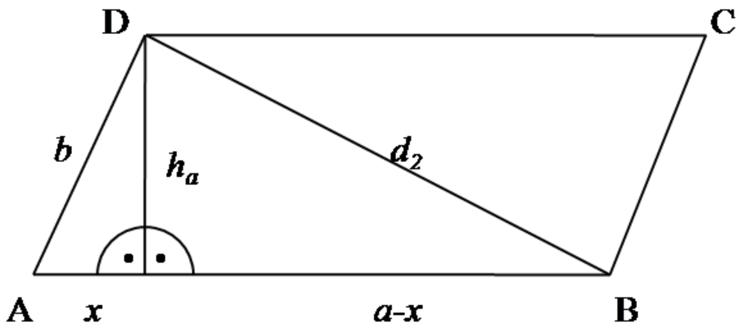
Përdëftim: Duke i shfrytëzuar barazimet $d_1{}^2 = (a + x)^2 + h_a{}^2$ dhe $x^2 + h_a{}^2 = b^2$, fitojmë

$$d_1{}^2 = (a + x)^2 + b^2 - x^2\,. \qquad (1)$$



Duke i shfrytëzuar barazimet ${d_2}^2 = (a-x)^2 + {h_a}^2$ dhe $x^2 + {h_a}^2 = b^2$, fitojmë

$$ {d_2}^2 = (a-x)^2 + b^2 - x^2. \qquad (2) $$



Duke i mbledhur (1) dhe (2), përfundojmë se

$$ {d_1}^2 + {d_2}^2 = a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2, $$

gjegjësisht

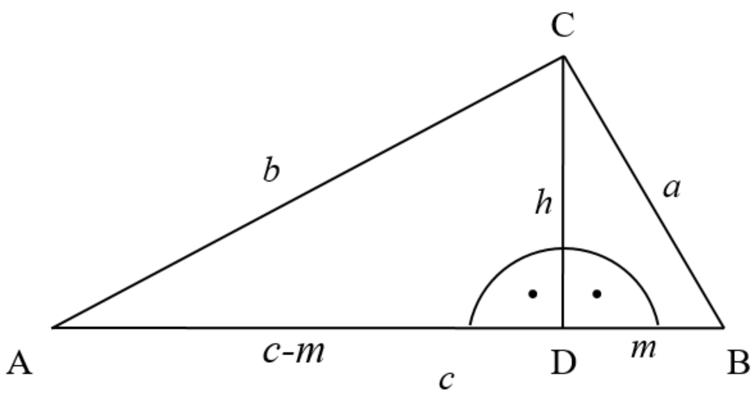
$$ {d_1}^2 + {d_2}^2 = 2(a^2 + b^2). $$

Teorema e Heronit: Për syprinën e trekëndëshit me brinjë a, b dhe c vlen formula

$$ P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ ku } s = \frac{a+b+c}{2}. $$

Përdëftim: Pa e humbur përgjithshmërinë, nëse $\sphericalangle A$ dhe $\sphericalangle B$ janë kënde të ngushtë. Lartësia e lëshuar nga kulmi C është në brendi të trekëndëshit ABC. Me shenjat e vizatimit të poshtëm kemi se

$$ {h_c}^2 = a^2 - m^2 \text{ dhe } {h_c}^2 = b^2 - (c-m)^2. $$



Duke i barazuar anët e djathta,

$$a^2 - m^2 = b^2 - c^2 + 2cm - m^2$$

Fitojmë se për m vlen barazimi $m = \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$.

Domethënë, $h_c{}^2 = a^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2 = \left(a - \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)\left(a + \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)$

$$= \frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2c} \cdot \frac{2ac+a^2+c^2-b^2}{2c} = \frac{b^2-(a-c)^2}{2c} \cdot \frac{(a+c)^2-b^2}{2c}$$

$$= \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+b+c)}{4c^2}.$$

Prej këtu $P^2 = \frac{c^2 h_c{}^2}{4} = \frac{c^2(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+b+c)}{16c^2}$

$$= \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+b+c)}{16}.$$

Nga $a + b + c = 2s$ del se:

$$b + c - a = 2(s - a),$$

$$a + c - b = 2(s - b),$$

$$a + b - c = 2(s - c).$$

Me këtë e përdëftuam formulën e Heronit $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Vërejtje: Formula $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, në rast të trekëndëshit barabrinjës me brinjë a fiton formën $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

TEMA 3

Gjasat elementare

Në këtë temë janë vënë kuptimet themelore nga e ashtuquajtura gjasa klasike diskrete. Kaptina fillestare paraqet hyrje elementare në kombinatorikë nëpërmjet të njoftimit me kuptimet për numër të elementeve të bashkësisë së fundme dhe principet për numërim të shumës dhe prodhimit. Në kaptinën e dytë shkurtimisht janë shqyrtuar kuptimet themelore në lidhje me hapësirë të fundme të gjasave dhe gjasa klasike. Kaptina e fundit i përket kuptimeve për pavarësi të ngjarjeve dhe gjasë të kushtëzuar.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

1. Numërimi kombinatorial

Të përkujtohemi fillimisht në tre kuptime themelore për rifigurimin f: A→ B:

- f është injeksion ⇔ nuk ekzistojnë $a_1, a_2 \in$ A, ashtu që $a_1 \neq a_2$ dhe $f(a_1) = f(a_2)$,
- f është surjeksion ⇔ për çdo $b \in$ B, ekziston $a \in$ A, ashtu që $f(a) = b$,
- f është bijeksion ⇔ f është injeksion dhe f është surjeksion.

Me ndihmën e kuptimit të fundit mund të sqarojmë se çka nënkuptohet nga bashkësia e fundme:

Definicioni: Për bashkësinë e zbrazët, me shenjën Ø, themi se ka 0 elemente, ajo shënohet me |Ø|= 0. Për bashkësinë jo të zbrazët S themi se ka n elemente (për $n \in \mathbb{N}$ numër të përgjithshëm të dhënë) nëse ekziston bijeksion f: {1, 2, ... , n}→ S. Në atë rast, shënojmë |S|= n.
Për secilën nga bashkësitë e përshkruara themi se është e kufizuar ose e fundme.

Vërejtje: Ekzistojnë edhe të ashtuquajtura *bashkësi të pafundme*, gjegjësisht bashkësi që nuk janë të fundme ose të kufizuara me elemente. Bashkësia$\mathbb{N}$nga të gjithë numrat natyrorë, bashkësia$\mathbb{Z}$nga të gjithë numrat e plotë, bashkësia e $\mathbb{Q}$ e të gjithë numrave racional ose thyesave, bashkësia $\mathbb{R}$e të gjithë numrave real, janë disa shembuj të bashkësive të pafundme.

Numërimi kombinatorial si bazë problematike ka gjetjen e numrit |S| për bashkësinë e fundme të dhënë S.

Dy principet themelore kombinatorial janë:

(I) Principi i shumës

Nën *particim* të bashkësisë së dhënë A nënkuptohet familja {B_1, B_2,..., B_m} nga bashkësitë disjunkte B_i (i = 1, 2, ... , m), unioni i të cilave është A.

Principi i shumës: nëse $B_1, B_2, \ldots, B_m$ është particim të bashkësisë së fundme A, atëherë

$$|A| = |B_1| + |B_2| + \ldots + |B_m|.$$

Shembull 1: Në një kuti me toptha ka vetëm të bardhë, toptha të kuq dhe të zi Nëse ka gjithsejtë 4 toptha të bardhë, 2 të kuq dhe 5 të zi, atëherë sa toptha ka në kuti?

Zgjidhje: Le të jetë bashkësia A e topthave në kuti, e B_1, B_2 dhe B_3 janë, në radhë, Nënbashkësitë e topthave të bardhë, të kuq dhe të zi. Atëherë, {B_1, B_2, B_3} është particim i A, prandaj $|A| = |B_1| + |B_2| + |B_3| = 4 + 2 + 5 = 11$.

(II) **Principi i prodhimit**

Le të jetë T bashkësi me vetinë që secili element mund të zgjidhet në k etapa $S_1, S_2, \dots, S_k$ ashtu që për çdo $\mathrm{i} = 1, 2, \dots, k$, në i- hapin S_i ka saktë r_i „zgjedhje“ të mundshme, pavarësisht nga ajo se si janë realizuar (çfarë zgjedhje janë bërë në) hapat $S_1, S_2, \dots, S_{\mathrm{i}-1}$.

Principi i prodhimit: Në atë rast $|\mathrm{T}| = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_k$.

Shembulli 2: A-ja do që gjatë javës së ardhshme, një ditë për drekë të përgatit peshk, një ditë të përgatit bizele dhe një ditë të përgatit oriz. Në sa mënyra A-ja mund ta realizojë këtë ide të saj?

Zgjidhje: Le të jetë

S_1: të zgjidhet në cilën ditë nga java do të ketë peshk

S_2:të zgjidhet në cilën ditë nga java do të ketë bizele

S_3: të zgjidhet në cilën ditë nga java do të ketë oriz

Atëherë $r_1 = 7$, $r_2 = 6$ (sepse një ditë është „e rezervuar“ për peshk), e $r_3 = 5$ (sepse dy ditë paraprakisht janë„rezervuar“). Sipas principit të prodhimit, numri i mundësive për amvisen A-ja është $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

Zbatimi më i thjeshtë i principit të prodhimit është formula

$$|\mathrm{A} \times \mathrm{B}| = |\mathrm{A}| \cdot |\mathrm{B}|,$$

E cila e përcakton numrin e elementeve në prodhimin e Dekartit të dy bashkësive të fundme.

Shembull 3: Në sa mënyra mund të renditen (njëri afër tjetrit) numrat 1, 2 dhe 3? Me fjalë tjera, në sa mënyra mund të formohet listë me gjatësi 3 nga numrat 1, 2 dhe 3?

Zgjidhje: Të caktojmë tre vende të zbrazëta: ___ ___ ___ . Për $\mathrm{i} = 1, 2, 3$, le të jetë

S_i: plotësimi i vendit të i-të të zbrazët (nga e majta nga e djathta)

Atëherë $r_1 = 3$, $r_2 = 2$ dhe $r_3 = 1$, prej ku del se renditje ka gjithsejt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Definicioni: Për $n \in \mathbb{N}$, me $n!$ (lexohet: n faktoriel) shënohet prodhimi in numrave të parë natyrorë, gjegjësisht.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Në këtë kontekst, 0! E jep numrin 1.

Nën *permutacion* të bashkësisë së fundme S nënkuptohet bijeksioni $f: S \rightarrow S$.

Shembull 4: Për $n \in \mathbb{N}$, le të jetë $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Secili permutacion $f: S \rightarrow S$ mund të paraqitet si listë me gjatësi ne përbërë nga numrat 1, 2, ... , n. Gjegjësisht, ajo është lista $f(1)\, f(2) \ldots f(n)$.

Shembulli paraprak sugjeron se:

Numri i permutacioneve i bashkësisë me n elemente është $n!$

Do të përdëftojmë pohim në formë të përgjithshme. Për bashkësinë e dhënë S dhe $k \in \mathbb{N}_0$, me k - variacioni i S nënkuptohet injeksioni $f: \{1,2, \ldots, n\} \rightarrow S$. Secila k - variacion f mund të identifikohet me listën vijuese me gjatësi k:

$$f(1)\, f(2) \ldots f(k).$$

Nga kjo, duke e shfrytëzuar principin e prodhimit dhe duke menduar në mënyrë analoge si në shembullin 3, fitohet se:

Numri i k - variacioneve të bashkësisë me n elemente është: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

Vërejtje: Numri i përgjithshëm i k–variacioneve të bashkësisë me n elemente zakonisht shënohet me V_n^k. Prodhimi i lartë më konciz mund të shënohet në formë $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Vërejtje: Permutacioni i bashkësisë me n elemente nuk është asgjë tjetër përveç një n–variacion i tij. Numri i përgjithshëm i permutacioneve i bashkësisë me n elemente është $V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{(0)!} = \frac{n!}{1} = n!$

Për bashkësinë e dhënë S dhe $k \in \mathbb{N}_0$, me k–*kombinacion* e S nënkuptohet nënbashkësi e çfarëdo e bashkësisë S me k elemente. Numri i përgjithshëm i k–kombinacioneve të bashkësisë me n elemente zakonisht shënohet me C_n^k.

Pohim: Për numrat e plotë n dhe k me $0 \leq k \leq n$ vlen:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Përdëftim: Siç veremë, numri i përgjithshëm i k–variacioneve të bashkësisë $\{1, 2, \dots, n\}$ është $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. T'i numërojmë më ndryshe: gjegjësisht, secilën k–variacion mund të fitohet si permutacion i saktë i një k-kombinacioni. Nga principi i prodhimit rrjedh se $V_n^k = C_n^k \cdot k!$. Nga këtu $C_n^k = \frac{V_n^k}{k!}$.

Ta ilustrojmë përdëftimin e mëparshëm me një shembull.

Shembull 5: Shënoni të gjitha 2 – variacionet dhe 2 – kombinacionet e bashkësisë $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

Zgjidhje:

2 - variacione	2 - kombinacione
12 ; 21	{1,2}
13 ; 31	{1,3}
14 ; 41	{1,4}
23 ; 32	{2,3}
24 ; 42	{2,4}
34 ; 43	{3,4}

Ky paragraf do ta përfundojmë me një shembull më të gjatë për lojën e popullarizuar me letra të ashtuquajtur poker.

Shembull 6: Poker luhet me shpil (shumë) standard prej 52 letrash: në secilën me 13 vlera (2, 3, ..., 10, J, Q, K, A) ka nga 4 letra (një në secilën nga katër „ngjyrat“ ♥, ♦, ♠, ♣).
Në një raund poker, secili lojtarë fiton 5 letra të ashtuquajtur „dorë“. Gjatë kësaj ka $C_{52}^5 = 2598960$ „duar” të mundshme në poker dhe të gjitha (derisa shpili është mirë i përzier) janë me gjasë të njëjtë (fitohen me shanse të njëjtë prej1: 2598960).

Në poker ka disa lloje karakteristike të „duarve“: 2 çifte, 3 të njëjtë, shkalla, ngjyra, full haus, poker, rojall fllesh. E arsyeshme intuitive është të llogarisim se shanset për të fituar „dorë” nga lloji i caktuar është numri $\#$ i „duarve” nga ai lloj i pjesëtuar me C_{52}^5. Nga ana tjetër, numri i „duarve” i llojit të caktuar përcaktohet me ndihmën e numërimit kombinatorik.

a) 2 çifte = nga dy letra nga dy vlera dhe letra tjetër në vlerën e tretë

$$\# \text{ (2 çifte)} = C_{13}^{2} C_{4}^{2} C_{4}^{2} C_{44}^{1} = 123552.$$

Andaj, i zgjedhim të dy vlerat e C_{13}^{2} mënyrave, të dy letrat në secilin çift të $C_{4}^{2} C_{4}^{2}$ mënyra, dhe letrën e ngelur në C_{44}^{1} mënyra ($44 = 52 - 8$). Domethënë, gjasa (shanset) të fitohet dora 2 çifte në një raund është $\frac{123552}{2598960}$, gjegjësisht përafërsisht 0,047390.

b) 3 të njëjtë = tre letra të një vlere dhe letrat tjera në dy tjera
vlera të ndryshme

$$\# \text{ (3 të njëjta)} = C_{13}^{1} C_{4}^{3} C_{12}^{2} C_{4}^{1} C_{4}^{1} = 54912.$$

Andaj, e zgjedhim vlerën e tre letrave të C_{13}^{1} mënyra. Pastaj zgjedhim tre letra në atë vlerë të C_{4}^{3} mënyra, zgjedhim dy vlera tjera të C_{12}^{2} mënyra, dhe në fund zgjedhim nga një letër në secilën nga ato dy vlera të $C_{4}^{1} C_{4}^{1}$ mënyra. D.m.th., gjasa që të fitohet dora 3 të njëjta në një raund është $\frac{54912}{2598960}$, gjegjësisht përafërsisht 0,021128.

c) shkalla = nga një letër nga pesë vlera të njëpasnjëshme, ku vlera A
mund të llogaritet më e vogla (para 2) ose më e madhe (pas K)

$$\# \text{(shkalla)} = 10 \cdot 4^{5} = 10240.$$

Andaj, secila shkallë fillon me njërën nga 10 vlerat vijuese: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; zgjedhja e tillë bëhet në 10 mënyra. Pastaj, për secilën nga vlerat të cilat përbëjnë shkallë ka 4 letra (nga një në secilën ngjyrë) dhe atë zgjedhje e bëjmë në $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ mënyra. D.m.th. gjasa që të fitohet dora shkallë në një raund është $\frac{10240}{2598960}$, gjegjësisht përafërsisht 0,003940.

d) ngjyra = të gjitha pesë letrat në dorë janë me ngjyra të njëjtë

$$\# \text{(ngjyra)} = 4 \cdot C_{13}^{5} = 5148$$

Andaj, një nga katër ngjyrat e zgjedhim në 4 mënyra, e pastaj nga ngjyra e marrë mund të zgjedhim 5 letra në C_{13}^{5} mënyra. D.m.th, gjasa të fitohet dora ngjyrë në një raund është $\frac{5148}{2598960}$, gjegjësisht përafërsisht 0,001981.

e) full haus = tri letra nga një vlerë dhe dy letrat tjera të mbetura në vlerë tjetër

$$\#\text{ (full haus)} = 13 \cdot 12 \cdot C_4^3 \cdot C_4^2 = 3744.$$

Andaj, vlerën nga tre letrat e zgjedhim në13 mënyra, dhe tre letrat me atë vlerë i zgjedhim në C_4^3 mënyra. Pastaj vlerën e dy letrave të mbetura e zgjedhim në $12 = 13 - 1$ mënyra, e ato dy letra i zgjedhim në C_4^2 mënyra (në vlerën e zgjedhur). Gjasa që të fitohet dora full haus në një raund është $\frac{3744}{2598960}$, gjegjësisht përafërsisht 0,001441.

ë) poker = katër letra me vlerë të njëjtë

$$\#\text{ (poker)} = C_{13}^1 \cdot C_{48}^1 = 624.$$

Gjasa të fitohet dorë poker në një raund është $\frac{624}{2598960}$, gjegjësisht përafërsisht 0,000240.

f) rojal flesh = shkalla&ngjyra

$$\#\text{ (rojal flesh)} = 10 \cdot 4 = 40.$$

Gjasa të fitohet rojal flesh në një raund është $\frac{40}{2598960}$, gjegjësishtperafërsisht 0,000015.

Shembullin do ta përfundojmë me një pyetje:

Pse në lojën e pokerit llojet e duarve janë ranguar në mënyrën vijuese

2 çifte$\prec$3 të njëjta$\prec$shkalla$\prec$ngjyra$\prec$full haus$\prec$poker$\prec$rojal flesh?

2. Hapësira e gjasës së besueshmërisë

Shembull1: Në një shou televiziv të njohur nga vitet e 70-ta të shekullit të kaluar, Shpërblimi i rëndësishëm është vendosur mbrapa njërës nga tre dyert e mbyllura. Nga garuesi kërkohet të zgjedhë derë, pas çka udhëheqësi i shout hap njërën nga dy dyert e mbetura dhe thotë: „Siç mund të shohësh, shpërblimi nuk është pas kësaj dere. A do të ngelësh në zgjedhjen tënde të parë ose do ta ndërrosh zgjedhjen?“
Me fjalë tjera, derisa garuesi fillimisht ka zgjedhë derë të gabuar (derë pas të cilës nuk fshihet shpërblimi), atëherë udhëheqësi e hap tjetrën derë të gabuar. Nëse përsëri, garuesi fillimisht e ka zgjedhë derën e vërtetë(pas të cilës fshihet shpërblimi), atëherë udhëheqësi i hap një nga dyert e gabuara.
Cila strategji është më e mirë për garuesin, të mbajë ose të ndërrojë zgjedhjen e parë?

Zgjidhje: Strategjia më e mirë për garuesin është të ndërrojë zgjedhjen e parë. Gjegjësisht, përderisa ai ngel në zgjedhjen e parë të derës, kjo do të thotë se shanset (gjasat) të merr shpërblimin janë $\frac{1}{3}$ (njëra nga tre dyert).
Nga ana tjetër, nëse garuesi e ndërron zgjedhjen e parë, atëherë shanset të fitojë shpërblimin janë dy fish më të mëdha, gjegjësisht gjasa është $\frac{2}{3}$. Pse?

Shembulli 2: Cilat janë shanset që gjatë një hedhje të dy kubeve homogjene për të luajtur, do të bien „dubël“, gjegjësisht në pjesën e sipërme në dy kubet do të paraqiten numra të njëjtë?

Zgjidhje: Për nevojat e shembullit, ti dallojmë kubet, gjegjësisht të shqyrtojmë (kushtimisht thënë) kubin e parë dhe të dytë. Gjatë gjuajtjes së dy kubeve ka 36 mundësi me shanse të njëjta (mundësi me gjasë të njëjtë): Ato janë çiftet (x, y), ku x është numri që bie në pjesën e sipërme të kubit të parë, e y është numri i cili bie në pjesën e sipërme të kubit të dytë. Në saktë 6 nga këto 36 mundësi, të dy kubeve ka rënë numër i njëjtë. Nga këtu, shanset (gjasat) të hidhen „dubël“ është $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Definicioni: Me hapësirë të gjasave të kufizuar nënkuptohet bashkësia e kufizuar S së cilës iështë bashkangjitur funksioni p e definuar në bashkësinë e të gjitha nënbashkësive të S (të quajtura ngjarje) me vetitë vijuese:

(i) për çdo $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{S}$, $0 \leq p(\mathrm{A}) \leq 1$,

(ii) $p(\mathrm{S}) = 1$,

(iii) për secilat nënbashkësi disjunkte $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subseteq \mathrm{S}$ vlen $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$.

Funksioni p quhet *gjasa e hapsirës* (S, p), dhe çdo nënbashkësi një elementësh e S quhet *ngjarje elementare*. Kështu S është bashkësi e ngjarjeve elementare.

Le të jetë $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ është particim i ngjarjes $A \subseteq S$, gjegjësisht secili element i Alajmërohet në saktë një bashkësi B_i. Sipas vetisë(iii) nga definicioni i më lartë, vlen

$$p(A) = p(B_1) + p(B_2) + \dots + p(B_k).$$

Më saktësisht, nëse $k = |A|$ dhe secila B_i është një elementësh, atëherë gjasa $p(A)$ është e barabartë me shumën e gjasave të elementeve (ngjarjet elementare) të cilat i përmban A.

Pohim: (vetit elementare) Le të jenë A dhe B ngjarje nga hapësira e kufizuar të gjasave (S, p). Atëherë:

(i) $p(A^c) = 1 - p(A)$,

(ii) $p(\emptyset) = 0$,

(iii) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Përdëftim: (i) $p(A^c) + p(A) \overset{(iii)}{=} p(A^c \cup A) = p(S) = 1$.

(ii) Rrjedh nga (i) për A=S.

(iii) Një particim $A \cup B$ është $\{A \backslash B, A \cap B, B \backslash A\}$. Të shënojmë se A ka particip $\{A \backslash B, A \cap B\}$, dhe B ka particip $\{B \backslash A, A \cap B\}$. Nga këtu sipas (iii):

$$p(A \cup B) = p(A \backslash B) + p(A \cap B) + p(B \backslash A)$$

$$p(A) = p(A \backslash B) + p(A \cap B)$$

$$p(B) = p(B \backslash A) + p(A \cap B),$$

Që tërheqë se

$$p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A \cup B).$$

Vërejtje: Për ngjarjen A^c (komplimenti relativ i A) themi se është *ngjarje e kundërt e ngjarjes*A. Pohimi paraprak nën(i) tregon se gjasat të ngjarjeve të kundërta janë komplementare, gjegjësisht në shumë japin1. Shpeshherë gjasa e ngjarjes së dhënë gjendet duke llogaritur gjasën e ngjarjes së kundërt të saj.

Shembulli 3: Cila është gjasa që gjatë një hedhjeje të dy kubeve homogjen të mos bie numër i dyfishtë ose „dubël“?

Zgjidhje: Siç përfunduam nga shembulli i mëparshëm, gjasa e të ngjarës

A: ka rënë „dubël“

Është $p(A) = \frac{1}{6}$. Nga këtu, $p(A^c) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Shembulli 4: Cila është gjasa që gjatë një hedhjeje të dy kubeve homogjen të bie së paku një numër gjashtë?

Zgjidhje: Ta shënojmë me A ngjarjen gjasa e të cilit kërkohet. Atëherë,

A^c: në asnjërën nga kubet nuk ka rënë numri gjashtë

Më thjeshtë është të gjendet gjasa $p(\mathrm{A}^c)$. Gjegjësisht, siç theksuam në shembullin 2, hapësira e gjasës përkatësisht përbëhet nga bashkësia e ngjarjeve elementare $\mathrm{S} = \{(x, y): x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$dhe secila ngjarje elementare ka gjasë $p = \frac{1}{|\mathrm{S}|} = \frac{1}{36}$ sepse $\mathrm{A}^c = \{(x, y): x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ vlen $p(\mathrm{A}^c) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\mathrm{S}|} = \frac{5\cdot 5}{6\cdot 6} = \frac{25}{36}$. Përfundojmë se $p(\mathrm{A}) = 1 - p(\mathrm{A}^c) = \frac{11}{36}$.

Siç theksuam, në hapësirën e kufizuar të gjasave (S,p), nënbashkësitë një elementëshe të S kanë emër të posaçëm: quhen ngjarje elementare. Kështu secila ngjarje A është union disjunkt i ngjarjeve elementare që i përmban, e gjasa $p(\mathrm{A})$ është shumë e „gjasave elementare "përkatëse.

Në tre shembujt paraprak, gjasat e ngjarjeve elementare të ashtuquajtur *gjasa elementare* janë reciprokisht të barabartë: gjegjësisht, secila prej tyre është $\frac{1}{|\mathrm{S}|}$. Nga këto shkaqe në secilin nga shembujt e shqyrtuar, për çfarëdo ngjarje A vlen $p(\mathrm{A}) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\mathrm{S}|}$.

Definicioni: Për hapësirë të kufizuar të gjasave (S, p) në të cilin secila ngjarje elementare $\{w\}$ ka gjasë$p(\{w\}) = \frac{1}{|\mathrm{S}|}$, themi se është *hapësirë me gjasë klasike*.

Ja disa shembuj për hapësirë me gjasë klasike:

Shembulli 5: Cila është gjasa se gjatë një hedhjes së dy monedhave homogjene ato do të bien në anë të ndryshme: njëra shkrimi e tjetra stema?

Zgjidhje: Hapësira e gjasave përkatëse është: S = {(sh,sh), (sh,k), (k,sh), (k,k)} dhe p ({sh,sh}) = p ({sh,k}) = p ({k,sh}) = p ({k,k}) = $\frac{1}{4}$. Përsëri (formalisht) dallojmë monedhën e parë dhe të dytë dhe për ngjarjen elementare (x, y), ku $x, y \in \{\text{sh,s}\}$, $x = \text{sh}$ përcakton se monedhës së parë i bie shkrimi, e $x =$ k përcakton se në monedhën e parë bie stema, e kështu me radhë. Supozimi se bëhet fjalë për gjasa klasike, gjegjësisht se të gjitha ngjarjet elementare janë me gjasë të njëjtë e arsyetojmë me shtesën „homogjenë".
Ngjarja A që është përmendur në shembullin është A = {(sh,k),(k,sh)} dhe nga këtu $p(\mathrm{A}) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\mathrm{S}|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Shembulli 6: Shifrat 1, 2, 3, 4, 5 janë rastësisht të renditura në listë (me gjatësi 5). Cila është gjasa që 1 rri saktë para 2?

Zgjidhje: Hapësira përkatëse e gjasës (S,p) përbëhet nga bashkësia e permutacioneve të $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dhe gjasa p është klasike. Siç theksuam në kaptinën e mëparshme, $|S| = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Ngjarja A përbëhet prej atyre permutacioneve në të cilat 1 qëndron saktë para 2 dhe $p(\mathrm{A}) = \frac{|\mathrm{A}|}{120}$.
Ngelë të përcaktojmë numrin e elementeve të A, gjegjësisht të përcaktojmë se sa është |A|. Mirë është të mendojmë në këtë mënyrë: në vend të permutacioneve të $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ të vështrojmë permutacione të bashkësisë katër elementëshe $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Secili permutacion i tillë është saktë njëra nga ato të cilat duam t'i numërojmë. D.m.th, $|\mathrm{A}| = 4! = 24$ dhe $p(\mathrm{A}) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$.

Shembulli 7: Nga shpili standard me 52 letra tërhiqen 3 letra. Sa është gjasa që ndërmjet letrave të tërhequra të ketë:
a) saktë një as
b) së paku një as
c) së paku dy letra të kuqe.

Zgjidhje: Hapësira përkatëse e gjasave (S,p) është hapësirë me gjasë klasike që përbëhet nga të gjithë 3-kombinimet e bashkësisë së letrave, gjegjësisht. $|\mathrm{S}| = C_{52}^3$.

a) Le të jetë A ngjarja e përshkruar. Atëherë, $|\mathrm{A}| = C_4^1 \cdot C_{48}^2$ dhe nga këtu $p(\mathrm{A}) = \frac{C_4^1 \cdot C_{48}^2}{C_{52}^3}$.

b) Le të jetë B ngjarja e përshkruar. Atëherë, $|B^c| = C_{48}^3$ dhe nga këtu $p(\mathrm{B}) = 1 - p(\mathrm{B}^c) =$

$= 1 - \frac{C_{48}^3}{C_{52}^3}$.

c) Le të jetë C ngjarja e përshkruar dhe$\{C_2, C_3\}$ formojnë particim të C, ku

$$\mathrm{C_i}\text{: saktë i letra të kuqe, } \mathrm{i} = 2, 3.$$

$$\text{Atëherë, } p(\mathrm{C}) = p(\mathrm{C_2}) + p(\mathrm{C_3}) = \frac{|\mathrm{C_2}|}{C_{52}^3} + \frac{|\mathrm{C_3}|}{C_{52}^3} = \frac{C_{26}^2 \cdot C_{26}^1}{C_{52}^3} + \frac{C_{26}^3}{C_{52}^3}.$$

<u>Shembulli 8:</u> Shënohet numër treshifrorë i rastësishëm. Sa është gjasa që numri është i pjesëtueshëm me 2 ose 5 (gjegjësisht së paku me njërin nga numrat 2 dhe 5)?

<u>Zgjidhje:</u> Hapësira përkatëse e gjasave (S,p) përbëhet nga bashkësia S = $\{x\colon x$ e është numër natyrorë treshifrorë$\}$ dhe gjasa p është klasike. Le të jenë A dhe B ngjarjet

A: numri është i pjesëtueshëm me 2
B: numri është i pjesëtueshëm me 5

Ngjarja gjasa e të cilit kërkohet në shembullin është A ∪ B. Treguam se vlen
$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$, dhe ngel të shënojmë se:

$$p(\mathrm{A}) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\mathrm{S}|} = \frac{450}{900} = \frac{1}{2},\ p(\mathrm{B}) = \frac{|\mathrm{B}|}{|\mathrm{S}|} = \frac{180}{900} = \frac{1}{5} \text{ dhe } p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}|}{|\mathrm{S}|} = \frac{90}{900} = \frac{1}{10}.$$

Nga këtu $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = 0{,}6$.

<u>Shembulli 9:</u> Sa është gjasa në grup të zgjedhur rastësisht prej n njerëzve, së paku dy të kenë ditëlindje të njëjtë?

<u>Zgjidhje:</u> Punët do t'i thjeshtësojmë, gjegjësisht do të imagjinojmë ditëlindje me 29 shkurt. Hapësira përkatëse e gjasës është (S,p), ku $\mathrm{S} = \underbrace{\{1, 2, \ldots, 365\} \times \ldots \times \{1, 2, \ldots, 365\}}_{k}$ dhe gjasa p është klasike. Kështu $|\mathrm{S}| = 365^k$. Le të jetë A është ngjarja gjasa e të cilit kërkohet. Atëherë A^c përbëhet nga të gjithë k-variacionet e bashkësisë $\{1, 2, \ldots, 365\}$, që tërheqë se

$$p(\mathrm{A}) = 1 - p(\mathrm{A}^c) = 1 - \frac{|\mathrm{A}^c|}{|\mathrm{S}|} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - k + 1)}{365^k}.$$

Në tabelën vijuese është dhënë $p(\mathrm{A})$ për disa vlera konkrete të k.

k	10	20	23	30	40	50
$p(\mathrm{A})$	0,1169	0,4115	0,5073	0,7064	0,8912	0,9704

Këto rezultate ndoshta i kundërshtojnë intuitës tonë: pra mjafton që grupi të jetë nga së paku 23 njerëz për gjasën që së paku dy prej tyre të kenë ditëlindje të njëjtë tejkalon $\frac{1}{2}$.

3. Gjasa e kushtëzuar. Pavarësia e ngjarjeve

Definicioni: Le të jetë B ngjarje në hapësira të kufizuar gjasash (S,p) për të cilin $p(\mathrm{B}) > 0$. Atëherë për çdo ngjarje A nga hapësira e njëjtë e gjasave definojmë gjasë të kushtëzuar $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ të A nën kusht B me:

$$p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}.$$

Shembulli 1: Monedha homogjene hidhet tre herë. Nëse gjatë hedhjes së parë bie shkrim, atëherë cila është gjasa që gjithsej kanë rënë së paku dy shkrime?

Zgjidhje: Hapësira përkatëse e gjasave përbëhet nga bashkësia e gjasave elementare S={Sh sh sh,sh sh s,sh s sh,s sh sh,sh s s,s sh s,s s sh,s s s} dhe gjasa p është klasike. Kështu secila ngjarje elementare ka gjasë $\frac{1}{|\mathrm{S}|} = \frac{1}{8}$. Kushti B është ngjarja

B: gjatë hedhjes së parë ka rënë shkrimi

Gjegjësisht B={sh sh sh, shs sh s,sh s sh,sh s s }, gjasa e të cili r është $p(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}$.

Gjasa A: gjithsej kanë rënë së paku dy shkrime, është nënbashkësia A={sh sh sh,sh sh s, sh s sh, s sh sh}. Vlen $p(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}$, A ∩ B={sh sh sh,sh sh s,sh s sh} dhe$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{3}{8}$. Nga këtu, $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$.

Shembulli 2: Monedha homogjene hidhet tre herë. Nëse bie së paku një herë shkrimi, atëherë cila është gjasa që gjithsej të ketë rënë së paku në anën e dy shkrimeve?

Zgjidhje: Hapësira e gjasës është e njëjtë si në shembullin e mëparshëm. Kushti B' është ngjarja

B': ka rënë së paku një anë me shkrim

Gjegjësisht B'=S\{s s s }, gjasa e te të cilit është $p(\mathrm{B}') = \frac{7}{8}$.

Ngjarja A është si në shembullin e mëparshëm. Sepse $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}' = \mathrm{A}$, kemi se $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}') = \frac{1}{2}$. Nga këtu $p_{\mathrm{B}'}(\mathrm{A}) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{8}} = \frac{4}{7}$.

Shembulli 3: Në një kuti ka 3 toptha të bardhë dhe 3 të zi. Nga kutia rastësisht janë tërhequr dy toptha, një pas tjetrit, pa kthim. Cila është gjasa që të dy topthat e tërhequr të jenë të bardhë?

Zgjidhje: Hapësira përkatëse e gjasës përbëhet nga bashkësia e ngjarjeve elementare S={bb, bz, zb, zz}, dhe gjasa më nuk është klasike! Ti shqyrtojmë ngjarjet

A: në tërheqjen e parë është tërhequr topthi i bardhë
B: në tërheqjen e dytë është tërhequr topthi i bardhë

$p(\mathrm{A})=\frac{3}{6}, p(\mathrm{A}^c)=1-\frac{3}{6}=\frac{3}{6}$.
$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{2}{5}, p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}^c)=\frac{3}{5}, p_{\mathrm{A}^c}(\mathrm{B})=\frac{3}{5}, p_{\mathrm{A}^c}(\mathrm{B}^c)=\frac{2}{5}$.

Kështu për gjasat elementare kemi:

$$p(\{bb\})=p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})\cdot p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5},$$

$$p(\{bz\})=p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})\cdot p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10},$$

$$p(\{zb\})=p(\mathrm{A}^c\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A}^c)\cdot p_{\mathrm{A}^c}(\mathrm{B})=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10},$$

$$p(\{zz\})=p(\mathrm{A}^c\cap\mathrm{B}^c)=p(\mathrm{A}^c)\cdot p_{\mathrm{A}^c}(\mathrm{B}^c)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}.$$

Ky shembull ilustron se ndonjëherë gjasa e kushtëzuar është e thjeshtë për njehsim, e formula e definimit $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}$ shfrytëzohet në formë të prodhimit $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=$ $=(\mathrm{B})\cdot p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$. Në këtë formë, quhet *formula për shumëzim të gjasave*.

Definicioni: Për dy ngjarje A dhe B në hapësirë të njëjtë të gjasave themi se të pavarur nëse vlen

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{B}).$$

Në të kundërtën themi se A dhe B janë ngjarje *të varura*

Vërejtje: Ideja pas këtij definicioni përbëhet nga kjo: nëse $p(\mathrm{B})>0$, atëherë A dhe B janë ngjarje të pavarur vetëm nëse $p(\mathrm{A})=p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$, gjegjësisht kur gjasa e ngjarjes A „nuk varet“ nga plotësimi (ose mosplotësimi) të ngjarjes B.

Shembulli 4: Nga shpili standard me 52 letra, rastësisht tërhiqet një letër. A janë ngjarjet e pavarura:

A: letra e tërhequr është as
B: letra e tërhequr ka ngjyrë flete

Zgjidhje: të shënojmë se

$$p(\mathrm{A})=\frac{C_4^1}{C_{52}^1}=\frac{4}{52}=\frac{1}{13},$$

$$p(\mathrm{B})=\frac{C_{13}^1}{C_{52}^1}=\frac{13}{52}=\frac{1}{4},$$

$$p(\mathrm{A}\cap \mathrm{B})=\frac{1}{C_{52}^1}=\frac{1}{52}.$$

D.m.th se, $p(\mathrm{A}\cap \mathrm{B})=p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{B})$, gjegjësisht A dhe B janë ngjarje të pavarura.

Shembulli 5: Kubi homogjen hidhet dy herë. A janë ngjarjet e pavarura:

A: gjatë hedhjes së parë ka rënë ndonjëri nga numrat 1, 2 dhe 5
B: shuma e numrave të rënë është i barabartë9

Zgjidhje: Të shënojmë se

$$p(\mathrm{A})=\frac{3\cdot 6}{36}=\frac{1}{2}$$

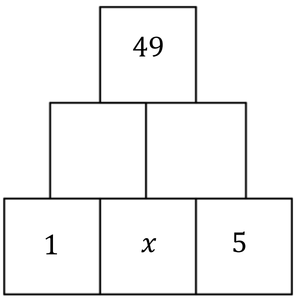
$$p(\mathrm{B})=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

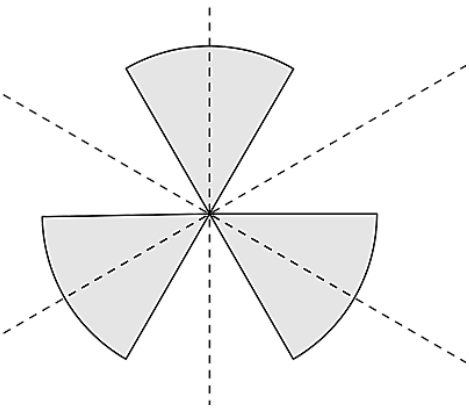
$$p(\mathrm{A}\cap \mathrm{B})=\frac{1}{36}$$

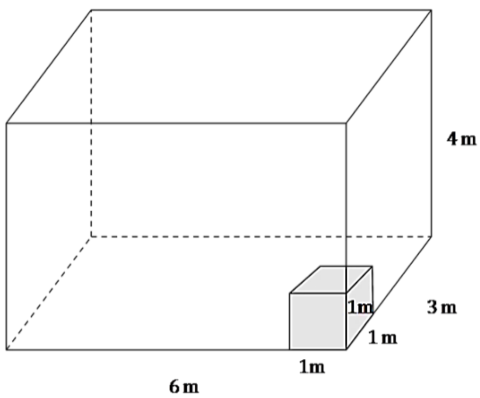
D.m.th se, $p(\mathrm{A}\cap \mathrm{B})\neq p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{B})$, gjegjësisht A dhe B janë ngjarje të varura.

DETYRA PËR USHTRIME

Në këtë pjesë janë dhënë detyra për ushtrime për nxënësit e klasës së 7, 8 dhe 9, të shënuara përkatësisht. Këto detyra janë të dedikuara për mbi 70% të nxënësve dhe për të njëjtat ka përgjigje dhe zgjidhje. Një pjesë e nxënësve do të mund t'i zgjidhin edhe detyrat nga klasat më të larta.







DETYRA PËR KLASËN E VII-TË

1. Cakto vlerën e shprehjes numerike $2 + (2 - 1\frac{1}{3})$.

2. Përcakto $\frac{4}{3}$ nga 12:

   A. 4
   B. $\frac{12}{3}$
   C.16
   D. përgjigje tjetër

3. Cakto numrin çereku i të cilit (një e katërta) është 16:

   A. 4
   B. 64
   C.32
   D. përgjigje tjetër

4. Sa është perimetri në katrorë me brinjë $2\frac{1}{4}$ cm?

5. Syprina e një drejtkëndëshi është $\frac{5}{2}$ m^2. Nëse njëra brinjë e tij është $\frac{1}{2}$ m, gjatësia e brinjës tjetër të tij është:

   A. 5 m
   B. 2 m
   C. 4 m
   D. përgjigje tjetër

6. Në një klasë prej 32 nxënës, 8 nxënës janë të shkëlqyeshëm. Sa nxënës në përqindje nuk janë të shkëlqyeshëm?

   A. 25 %.
   B. 16 %.
   C. 75 %.
   D. përgjigje tjetër

7. Era dhe Liza duhet të ndajnë 2400 denarë në raport 1:3. Sa denarë ka marrë Liza?

8. Vlera e shprehjes numerike $144 + 4 \cdot (12 - 12 : 4)$ është:

   A. 144
   B. 180
   C. 204
   D. përgjigje tjetër

9. Cili numër duhet të zbritet nga numri −9,7 që të fitohet −4,7?

10. Cili numër do të fitohet nëse shuma e numrave −18,3 dhe −6,7 pjesëtohet me +5?

A. −5.
B. 5.
C.- 4.
D. përgjigje tjetër

11. Ditmiri udhëton në pushim vjetorë. Nëse rruga është e gjatë 540 km, e deri tani ka kaluar 40 % të rrugës, edhe sa km i kanë ngelë?

A. 216 km.
B. 324 km.
C. 270 km.
D. përgjigje tjetër

12. Shprehja $2 - (\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3})$ ka vlerë:

13. Nëse a = −3, sa është vlera e shprehjes $24 : (5 - a)$?

A. 6.
B. 12.
C. −8.
D. përgjigje tjetër

14. Zgjidhje e barazimit $x + (-29) = -3$ është numri:

A. −32
B. −26
C. 26
D. përgjigje tjetër

15. Nëse një mollë kushton A denarë, e një dardhë B denarë, me cilën shprehje mund të njehsojmë sa denarë na nevojiten që të blejmë 7 molla dhe 5 dardha?

16. Një laps kushton 8 denarë, e një fletore 20 denarë. Ajani ka blerë x lapsa dhe y fletore. Me cilat nga shprehjet e dhëna mund të njehsohet sa do të paguajë?

A. $8x + 20y$.
B. $8y + 20x$.
C. $8x \cdot 20$ y.
D. përgjigje tjetër

17. Anëtarët e një vargu janë: 12, 20, 28, 36, ... Rregulla për përcaktim të anëtarit të ardhshëm “ në vargun është:

18. Anëtari i parë i vargut është 5. Rregulla për përcaktim të anëtarit të ardhshëm të vargut është: „shumëzo me 2, dhe shto 3“, atëherë anëtari i katërt i vargut është:

A. 14
B. 11
C. 9
D. përgjigje tjetër

19. Cili është barazimi i drejtëzës y e cila kalon nëpër pikat (–2,0) dhe (4,–2)?

20. Sa është vlera e shprehjes $72 + 32 : (-8) - 8 + 2 \cdot 22$?

A. 94
B. 104
C. 114
D. përgjigje tjetër

21. Shprehja $(7x - 5y - 2) \cdot (-5)$ është ekuivalente me:

22. Vlera e shprehjes numerike $5 \cdot 5^2 - 2 \cdot (-3)^3$ është:

A. 179
B. 98
C. 73
D. përgjigje tjetër

23. Për cilën vlerë të x, shprehja $\frac{2x+7}{x-5}$ nuk ka kuptim?

24. Trapezi barakrahës ka ________ boshte të simetrisë.

25. Sa boshte të simetrisë ka paralelogrami?

26. Sa boshte të simetrisë ka pesëkëndëshi i rregullt?

A. 5
B. 3
C. 4
D. përgjigje tjetër

27. Këndi i brendshëm në bazë të trekëndëshin barakrahës është 50°. Këndet tjera të brendshme janë ________.

28. Në një trekëndësh dy këndet janë: 60° dhe 40°, e këndi i tretë është:

A. 100°
B. 90°
C. 80°
D. përgjigje tjetër

29. Nëse këndi më i madh në trekëndësh barakrahës është 110°, atëherë dy këndet tjerë të brendshëm janë _______________.

30. Është dhënë segmenti AB koordinatat e të cilit në pikat e skajshme janë A (2,1) dhe B(6,1). Koordinatat e pikës së mesme të segmentit AB janë:

A. (4, 2)
B. (4, 1)
C. (6, 1)
D. përgjigje tjetër

31. Rendi i simetrisë rrotulluese të drejtkëndëshit është:

A. 4
B. 1
C. 2
D. përgjigje tjetër

32. Rendi i simetrisë rrotulluese të gjashtëkëndëshit të rregullt është ________.

33. Sa boshte të simetrisë ka katrori?

A. Katër boshte të simetrisë.
B. Dy boshte të simetrisë.
C. Tri boshte të simetrisë.
D. përgjigje tjetër

34. Syprina e trekëndëshit me bazë 10 m dhe lartësi 4 m është:

A. $P = 40\ m^2$
B. $P = 20\ m^2$
C. $P = 30\ m^2$
D. përgjigje tjetër

35. Syprina e trapezit me bazë 80 mm dhe 60 mm dhe lartësi 20 mm është _______.

36. Sa është lartësia e paralelogramit me syprinë $P = 80\ m^2$ dhe brinjë $a = 20$ cm?

A. h = 60 m.
B. h = 8 m.
C. h = 4 m.
D. përgjigje tjetër

37. Rrethi me syprinë $P = 144\pi\ dm^2$ ka rreze _________.

38. Perimetri i tavolinës rrethore është 120π cm. Sa është syprina e tavolinës?

A. $P = 3000\pi\ cm^2$.
B. $P = 3600\pi\ cm^2$.
C. $P = 2800\pi\ cm^2$.
D. përgjigje tjetër

39. Syprina e trekëndëshit është 36 cm^2, e lartësia e lëshuar nga baza është 8 cm. Sa është baza e trekëndëshit?

A. 6 cm.
B. 9 cm.
C. 12 cm.
D. përgjigje tjetër

40. Iliri vrapon në shteg të formës rrethore të gjatë 300 metra. Sa kilometra ka vrapuar nëse shtegun e ka kaluar 20 herë?

41. Vëllimi i kuadrit me dimensione 3 m,10 m dhe 5 m është:

A. 150 m^3
B. 450 m^3
C. 130 m^3
D. përgjigje tjetër

42. Syprina e trekëndëshit barakrahës me perimetër 42 cm, krah 15 cm dhe lartësi 6 cm është:

43. Syprina e kuadrit me dimensione 3 cm, 4 cm dhe 5 cm është:

A. $P = 104\ cm^2$
B. $P = 94\ cm^2$
C. $P = 54\ cm^2$
D. përgjigje tjetër

44. Perimetri i rrethit me syprinë $225\pi\ m^2$ është ___________.

45. Dauti ka akuarium me dimensione 1,5 dm; 4dm dhe 5 dm. Sa litra ujë nevojiten që të mbushet akuariumi?

A. 45 l.
B. 60 l.
C. 30 l.
D. përgjigje tjetër

46. Syprina e paralelogramit me brinjë 18 dm dhe lartësi përkatëse 10 dm është ________.

47. Syprina e rrethit është 625π m^2. Sa është diametri i tij?

A. 25 m.
B. 40 m.
C. 50 m.
D. përgjigje tjetër

48. Perimetri i paralelogramit me brinjë 16 m dhe 8 m është __________.

49. Liqeni në formë rrethore në një kopsht ka diametër 40 m. Sa është gjatësia e shtegut përreth liqenit?

A. 138,5 m.
B. 125,6 m.
C. 125,6π m.
D. përgjigje tjetër

50. Sa është lartësia e kuadrit me vëllim 24000 m^3, gjatësi 20 m dhe gjerësi 30 m?

A. 40 m.
B. 35 m.
C. 45 m.
D. përgjigje tjetër

51. Trapezi me baza 16 cm dhe 10 cm dhe syprinë 104 cm^2 ka lartësi ________.

52. Sa qelq është e nevojshme që të mbyllet dritarja me dimensione 60 cm dhe 0,3 m?

A. 1600 cm^2.
B. 1800 cm^2.
C. 1520 cm^2.
D. përgjigje tjetër

53. Pishina me dimensione 32 m dhe 16 m, i thellë 2 m zë _______ l.

54. Ngjarja: Gjatë hedhjes së kubit me 6 anë të bie 7 është:

A. Ngjarje e sigurt.
B. Ngjarje e pamundur.
C. Ngjarje shumë me gjasë.
D. Përgjigje tjetër

55. Gjatë hedhjes së dy kubeve gjasa që shuma e pikave të jetë dy është ________.

56. Shuma e gjasave të një ngjarje të rastit dhe ngjarjes së kundërt është:

A. 0,7
B. 1,2
C. 1
D. Përgjigje tjetër

57. Gjasa e ngjarjes: Gjatë hedhjes së kubit të bie ndonjëri nga numrat nga njëshi deri te gjashta është ______.

58. Sa është gjasa Sara dhe Tina që mos të takohen, nëse gjasa që ato të takohen është 0,7?

59. Sa është gjasa p në ngjarje të dhënë, nëse gjasa e ngjarjes së kundërt është $\frac{5}{7}$?

60. Anila do të bëjë hulumtim për atë se sa nxënës e duan lëndën e matematikës. Që të fitojë rezultat më të mirë duhet t'i pyesë ________________.

61. Gjasa e ngjarjes: gjatë hedhjes së kubit të bie numër tek i pikave është:

A. $\frac{1}{2}$
B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{4}$
D. përgjigje tjetër

62. Në një fshat jetojnë 5 fëmijë të moshës 7, 5, 6, 8 dhe 9 vjeçare. Cakto medianën e grupit të të dhënave?

63. Moda e të dhënave të dhëna 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 4, 4 është:

A. 4
B. 5
C. 4 dhe 5
D. përgjigje tjetër

64. Gazmendi ka bërë hulumtim për atë se nga sa televizorë kanë nxënësit në shtëpi. Ka bërë tabelë me të dhënat e fituara. Mediana e të dhënave të tilla është:

Numri i televizorëve	Shpeshtësia
1	5
2	6
3	3
4	2
5	0

65. Ngjarja: Gjatë hedhjes së kubit të bie numër treshifrorë është ___________.

66. Është bërë hulumtim që të zbulohet ngjyra e dëshiruar e nxënësve. Tabela I tregon vlerat nga hulumtimi. Sa nxënës kanë marrë pjesë në hulumtim?

Ngjyra e dëshiruar	Shpeshtësia
E zezë	4
E kuqe	5
E kaltër	8
E verdhë	3
E gjelbër	4

67. Sa është gjasa në një ngjarje, nëse gjasa e kundërt është 0,02?
A. 0,8.
B. 0,98.
C. 98.
D. përgjigje tjetër

DETYRA PËR KLASËN E VIII-TË

1. Vlera e prodhimit $\left(-6\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{7}$ është __________.

2. Numri decimal 3,8 i shënuar si thyesë e pathjeshtueshme është:

   A. $\frac{19}{5}$
   B. $\frac{17}{5}$
   C. $\frac{11}{5}$
   D. përgjigje tjetër

3. Sa është $\sqrt[3]{125}-\sqrt[3]{-8}$?

   A. -3
   B. 3
   C. 7
   D. -7

4. Vlera e shprehjes $7\frac{1}{6}-3\frac{1}{12}$ është _________.

5. Përqindja 2,5 % e shënuar si thyesë e pathjeshtueshme është:

   A. $\frac{1}{4}$
   B. $\frac{1}{8}$
   C. $\frac{1}{40}$
   D. $\frac{3}{40}$

6. thyesa $\frac{5}{6}$ e shndërruar në numër decimal periodik është __________.

7. Nga cili numër 30 % është 90?

   A. 900
   B. 9
   C. 90
   D. përgjigje tjetër

8. Numri 500 i shënuar si prodhim i shumëzuesve të tij të thjeshtë është ____________.

9. Shënoje numrin 1001 si prodhim të shumëzuesve të tij të thjeshtë.

A. $1001 = 5 \cdot 11 \cdot 13$
B. $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$
C. $1001 = 3 \cdot 11 \cdot 17$
D. përgjigje tjetër

10. thyesa $\frac{3}{20}$ e shënuar në përqindje është _____________.

11. Sa kube me teh 2 duhet të bashkohen që të konstruktohet kubi më i madh me teh 6?

A. 3
B. 9
C. 27
D. 36

12. Vlera e $\frac{3}{5}$ e ndonjë numri është 36. Cili është ai numër?

A. 45.
B. 60.
C. 30.
D. përgjigje tjetër

13. Dhjetë zhetonë kushtojnë1000 denarë. Tetë zhetonë kushtojnë _______.

14. Eriona zgjedh test prej 30 detyra. Nevojiten të zgjidhen më së paku 40 % nga detyrat që të llogaritet se testi është kaluar me sukses. Sa më së paku detyra duhet të zgjidhen saktë që të kalojë testin Eriona?

A. 11
B. 13
C. 10
D. 12

15. Jona ka fituar 28000 denarë në muaj. Ajo ka fituar 3 % rritje të pagesës mujore. Paga e saj pas rritjes është _______ denarë.

16. Në një klub noti ka pasë 120 anëtarë. Djem kanë qenë 72. Sa për qind kanë qenë vajza?

A. 35 %
B. 40 %
C. 45 %
D. përgjigje tjetër

17. Vlera e shprehjes $-9^2 + 76 \cdot ((84 - 10 \cdot \sqrt{25}) : (-3) + 2^3)$ është:

A. –82
B. –81
C. –80
D. përgjigje tjetër

18. Vlera e shprehjes numerike $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} : \frac{3}{2} - 1$ është ________.

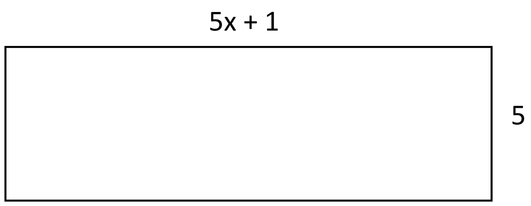
19. Tri shoqe kanë ndarë kuti me ëmbëlsira në raport 1 : 2 : 3. Pjesa më e madhe është:

A. $\frac{1}{2}$
B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{3}{4}$
D. përgjigje tjetër

20. Sa kushtojnë10 kg banane, nëse 13 kg banane kushtojnë 520 denarë?

A. 400 denarë.
B. 500 denarë.
C. 460 denarë.
D. përgjigje tjetër

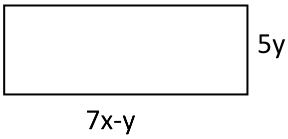
21. Syprina e drejtkëndëshit në vizatim njehsohet me formulën ________.



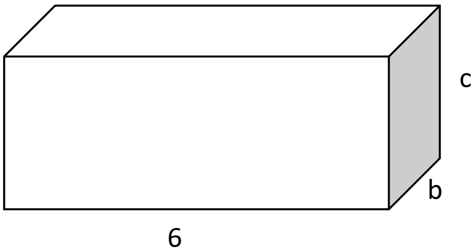
22. Pas shprehjes $3a(a - 5) - 5(a + 2)$ fitohet:

A. $3a^2 - 20a - 10$
B. $3a^2 - 20a + 10$
C. $3a^2 + 20a - 10$
D. përgjigje tjetër

23. Perimetri i paralelogramit nga vizatimi njehsohet me formulën ____________________.



24. Perimetri i kuadrit nga vizatimi njehsohet me formulën ______________________.



25. Është dhënë formula $y = 3x - 10$. Nëse $y = 50$ vlera e x është:

A. 30
B. 50
C. 20
D. përgjigje tjetër

26. Është dhënë formula $mn - 2m = n^2$. Nëse $n = 4$, vlera e m është ________.

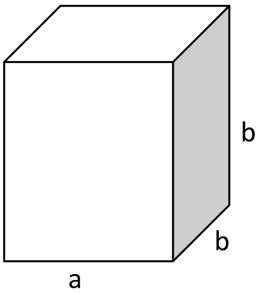
27. Vargu 2, 5, 8, 11... ka anëtarin e n-të:

A. 2n-1
B. 3n+1
C. 3n-1
D. përgjigje tjetër

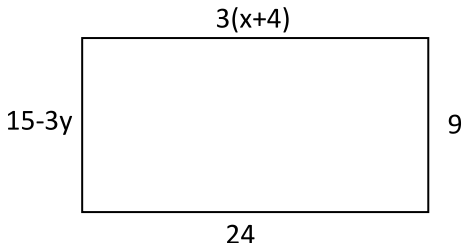
28. Vargu aritmetik 9, 5, 1, –3,... ka anëtarin e n-të _________.

29. Anëtari i pesëmbëdhjetë i vargut: 106, 100, 94,... është ____.

30. Nëse $P = 144\ cm^2$ dhe $b = 6$ cm, vlera e a është _______.



31. Vlerat e x dhe y sipas të dhënave në vizatim janë ________.



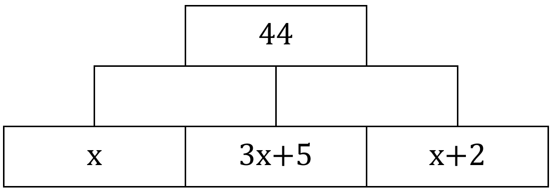
32. Denisi ka x vjet. Babai i tij është 20 vjet më i vjetër se ai. Vitin e ardhshëm babi i tij do të jetë tre herë më i vjetër se ai. Sa vjet ka Denisi?

A. 12.
B. 9.
C. 8.
D. përgjigje tjetër

33. Eliza ka bibliotekë të madhe me libra. Deri tani ka lexuar saktë $\frac{1}{4}$ e librave, e kanë mbetur edhe 120 libra të palexuara. Sa gjithsej libra ka Eliza?

A. 160.
B. 140.
C. 150.
D. përgjigje tjetër

34. Në murin e treguar në vizatimin, shuma e shprehjeve në dy fusha fqinje është e barabartë me shprehjen e fushës mbi to. Vlera e x është ___________.



35. Funksioni linearë e treguar në tabelë është paraqitur me formulën:

X	1	2	3	4
Y	8	13	18	23

36. Këndi i brendshëm në trekëndëshin barakrahës është 110°. Dy këndet tjerë fqinjë janë nga _________°.

37. Këndi i jashtëm në kulmin e trekëndëshit barakrahës është 100°. Dy këndet tjera të brendshëm janë:

A. 80° dhe 80°
B. 45° dhe 45°
C. 50° dhe 50°
D. 55° dhe 55°

38. Këndet në një trekëndësh janë $\alpha = 60°$ dhe $\beta = 65°$. Këndi i jashtëm γ_1 është:

A. 135°
B. 125°
C. 105°
D. 95°

39. Këndet e brendshme β dhe γ në një trekëndësh janë 40° dhe 70°. Këndet përkatëse të jashtëm janë ______ dhe _____.

40. Është dhënë segmenti AB koordinatat e pikave të skajshme të të cilit janë A(2,5) dhe B(4,7). Koordinatat e pikës së mesme janë ________.

41. Shuma e dy këndeve të jashtme në trekëndësh është 220°. Shuma e këndeve të brendshme përkatëse është:

A. 150°
B. 130°
C. 120°
D. 140°

42. Segmenti ka koordinata të pikave të skajshme $(5,-7)$, e të pikës së mesme $(1,-2)$. Koordinatat e pikës tjetër të skajshme janë ________.

43. Dy kulme të kundërta të paralelogramit kanë koordinata $(-1,-5)$ dhe $(1,5)$. Pikëprerja e diagonaleve ka koordinata:

A. $(0,-5)$
B. $(-5,0)$
C. $(0,0)$
D. $(0,5)$

44. Koordinatat e tre kulmeve të paralelogramit ABCD janë $A(-2,5)$, $B(4,4)$ dhe $C(6,7)$. Koordinatat e kulmit D janë _______.

45. Lartësia e paralelogramit me syprinë $P = 1600\ m^2$ dhe brinjë $a = 80$ m është _______ m.

46. Rrethi me syprinë $P = 225\pi\ m^2$ ka rreze:

A. $r = 16$ cm
B. $r = 15$ cm
C. $r = 14$ dm
D. $r = 15$ dm

47. Syprina e trekëndëshit barabrinjës me perimetër 36 cm, krah 13 cm dhe lartësi 12 cm është __________ cm^2.

48. Perimetri i rrethit me syprinë $625\pi\ m^2$ është __________ m^2.

49. Esra ka akuarium me dimensione 2,5 dm; 4 dm dhe 3 dm. Sa litra ujë nevoiten që të mbushet akuariumi?

A. 60 l
B. 30 l
C. 32 l
D. 24 l

50. Syprina e rrethit është $256\pi\ cm^2$. Diametri i tij është:

A. 42 cm
B. 18 m
C. 32 m
D. 30 m

51. Lartësia e kuadrit me vëllim 60 m^3 me gjatësi 5 m dhe gjerësi 4 m është _______ m.

52. Trapezi me baza 20 cm dhe 10 cm dhe syprinë 60 cm^2 ka lartësi:

A. 4 cm
B. 5 cm
C. 8 cm
D. 2 cm

53. Tringa ka kuti e cila zë 600 cm^3 sheqer. Ajo do ta derdh sheqerin në kuti tjera më të vogla të cilat kanë forma të kuadrit me dimensione 4 cm, 5 cm dhe 6 cm. Sa kuti i nevojiten?

A. 7
B. 4
C. 5
D. 6

54. Ara në formë të paralelogramit me brinjë më të gjatë 50 m, e largesa ndërmjet brinjëve më të mëdha është 8 m ka syprinë _______ m^2.

55. Brinjët e paralelogramit janë 10 dm dhe 8 dm. Lartësia më e madhe 5 dm. Sa është lartësia më e vogël?

A. 4 dm
B. 3 dm
C. 3 cm
D. 6 cm

56. Rrota e automobilit ka diametër 100 cm. Sa herë është rrotulluar kur ka kaluar rrugë prej 31400 cm?

A. 150
B. 200
C. 140
D. 100

57. Në katrorë me brinjë 30 cm është brendashkruar rreth. Syprina e rrethit është _________ cm^2.

58. Paralelogrami me brinjë 10 m dhe lartësi të lëshuar në brinjën tjetër 5 m ka perimetër 44 m. Syprina e paralelogramit është:

A. 55 m^2
B. 80 m^2
C. 60 m^2
D. 75 m^2

59. Sa është gjasa p të një ngjarje të dhënë, nëse gjasa e ngjarjes së kundërt është $\frac{3}{8}$?

A. $\frac{5}{8}$
B. $\frac{2}{8}$
C. $\frac{6}{8}$
D. përgjigje tjetër

60. Gjasa e ngjarjes: Gjatë hedhjes së kubit për lojë gjasa të bie numër tek i pikave është _____________.

61. Në një rrugë jetojnë 7 fëmijë të moshës 2, 5, 7, 12, 5, 6 dhe 8 vjet. Cila është mediana e këtij grupi të dhënash?

A. 5.
B. 6.
C. 12.
D. përgjigje tjetër

62. Numri i golave që i ka shënuar një ekip futbolli gjatë ndeshjeve të caktuara ka qenë: 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3. Mediana e të dhënave është _______.

63. Numri i kafeve që për 22 ditë në një kafene janë shitur është treguar në tabelën e dhënë të frekuencave. Klasa modale është _________.

Kafetë	0 – 19	20 – 39	40 – 59	60 – 79	80 – 99
Shpeshtësia	2	4	8	5	3

64. Hedhen dy monedha. Mundësitë e mundshme janë ______________.

65. Në një kuti ka patur 4 toptha të bardhë, 5 të kaltër dhe 6 të kuq. Sa është gjasa të tërhiqet topthi i kuq?

A. $\frac{4}{15}$
B. $\frac{3}{5}$
C. $\frac{2}{5}$
D. përgjigje tjetër

66. Në një shportë ka20 fletë ku janë shënuar numrat natyrorë nga 1 deri 20. Cakto gjasën se numri rastësisht i tërhequr do të jetë i pjesëtueshëm me 3.

67. Tërhiqet një letër nga grumbulli me 32 letra. Cili nga përfundimet do të ketë gjasë më të madhe të tërhiqet dhjetëshja, të tërhiqet dymbëdhjetëshja ose të tërhiqet trembëdhjetëshja?

A. të tërhiqet dymbëdhjetëshja.
B. Gjasa të njëjta.
C. të tërhiqet dhjetëshja.
D. përgjigje tjetër

68. Gjatë sjelljes së një numri telefonik Sara e ka harruar shifrën e fundit. Gjasa që ta qëllojë rastësisht shifrën e fundit është __________.

69. Gjasa që të qëllosh në cilin muaj është lindur ndonjë njeri është _________.

70. Nga fjala „SOFRAT" zgjidhet rastësisht një shkronjë. Gjasa shkronja e zgjedhur të jetë zanore është:

A. $\frac{1}{5}$
B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{2}{3}$
D. përgjigje tjetër

71. Shuma e të dhënave është 48, e mesi aritmetik është4. Numri I të dhënave është ________.

72. Gjasa që gjatë hedhjes së dy kubeve për lojë do të bien dy numra të njëjtë është:

A. $\frac{5}{6}$
B. $\frac{1}{6}$
C. $\frac{7}{36}$
D. përgjigje tjetër

DETYRA PËR KLASËN E IX-TË

1. Prodhimi i dy numrave është –18, e shuma e tyre është 3. Numrat janë ______.

2. Sa është $5\frac{1}{2}$ % nga 200?

   A. 11.
   B. 22.
   C. 110.
   D. përgjigje tjetër.

3. Numri decimal 2,25 i shndërruar në thyesë është _________.

4. Sa fitohet gjatë pjesëtimit të 0,75 me $\frac{4}{3}$?

   A. 1.
   B. 0,1.
   C. 0,5.
   D. përgjigje tjetër

5. Çmimi i zvogëluar 20 % është paguar 120 denarë. Çmimi para zvogëlimit ka qenë _______.

6. Sa është një e katërta e 2^{98}?

   A. 2^{96}.
   B. 2^{100}.
   C. 1^{49}.
   D. përgjigje tjetër.

7. **Largesa ndërmjet dy qyteteve** A dhe B është 300 km. Në hartë kjo largesë është 60 cm. Përpjesa është e barabartë me _________.

8. Shuma e thyesave $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}$ është _________.

   A. $\frac{1111}{1000}$.
   B. $\frac{1111}{10000}$.
   C. $\frac{101}{1000}$.
   D. përgjigje tjetër.

9. Njehso: $\frac{2{,}5\cdot 10^5}{25\cdot 10^8}$.

A. $10\cdot 10^{-3}$
B. $10\cdot 10^{3}$
C. 10^{-4}
D. përgjigje tjetër.

10. Përpjesa $\frac{2}{5}:\frac{7}{25}$ i shprehur nëpërmjet numrave natyrorë është ________.

11. Cili numër duhet të jetë në katrorë që të jetë i saktë barazimi $2\frac{\square}{5}\cdot 2\frac{1}{2}=6$?

A. 2.
B. 6.
C. 3.
D. përgjigje tjetër

12. Njehso: $\frac{2\frac{1}{7}}{1\frac{1}{7}-\frac{1}{14}}$.

A. 14
B. $\frac{1}{7}$
C. 2
D. përgjigje tjetër

13. çmimi i një automobili ka qenë 300 000 denarë. Sa do të paguan Fatoni për automjetin nëse tatimi është 15 % ?

14. Sa është $\left(\frac{4}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)^0\right)^{-2}$?

A. 0.
B. 9.
C. –2.
D. përgjigje tjetër

15. Numri decimal 0,125 i shënuar si thyesë e pathjeshtueshme është ________.

16. Është shënuar prodhimi i të gjithë numrave natyrorë tek ndërmjet 1 dhe 2018. Shifra e njësheve është:

A. 5.
B. 1.
C. 0.
D. përgjigje tjetër.

17. Numri i nxënësve në një shkollë është më i vogël se 500. Nëse nxënësit grumbullohen në grupe me nga 36 nxënës, ose në grupe me nga 60 nxënës, ose në grupe me nga 24 nxënës, në të gjitha rastet do të ngelin 7 nxënës jashtë grupeve. Sa nxënës ka në shkollë?

18. çmimi i palltos është zvogëluar 20 %, e më pas është zvogëluar edhe 25 % dhe shitet për 600 denarë. Çmimi para zvogëlimit të çmimit është:

A. 800 denarë.
B. 1200 denarë.
C. 1000 denarë.
D. përgjigje tjetër

19. Një e treta e një të shtatës nga 441 është ___________.

20. Deri te numri treshifrorë është shënuar numri i njëjtë. Sa është herësi i numrit të fituar me numrin e parë?

A. 11.
B. 1001.
C. 1111.
D. përgjigje tjetër

21. Njeri i lartë 2 m hedhë hije prej 1 m. Sa është i lartë druri, i cili në të njëjtin moment dhe në vend të njëjtë hedhë hije prej 6 m?

22. Njehso: $\frac{\sqrt{25}+2\cdot 8}{\sqrt{625}-2\sqrt{4}}$.

A. 1.
B. 5.
C. 2.
D. përgjigje tjetër

23. Në restorant është porositur ushqim me lirim prej 10 % dhe pije 15 %. Llogaria para zbritjes ka qenë 2000 denarë, e pija ka qenë 1000 denarë. Sa të holla është paguar llogaria?

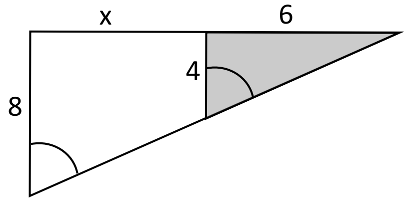
24. Numri djemve dhe vajzave në paralele qëndron 7 : 9. Sa prej tyre janë djem nëse në paralele ka 32 nxënës?

A. 18 djem.
B. 14 djem.
C. 12 djem.
D. përgjigje tjetër

25. Sa është 12 % nga $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$?

26. Sa për qind e sipërfaqes të trekëndëshit të ngjyrosur është treguar në vizatim?

A. 15 %
B. 20 %
C. 25 %
D. përgjigje tjetër.



27. Sa vite ka nëna e cila është 21 vjet më e vjetër se e bija e saj, e 21 vjet është më e re se nëna e saj nëse së bashku kanë120 vjet?

28. Përpjesa: 25 % : 0,7 : $2\frac{1}{5}$ shënoje në formën e vet të thjeshtë.

A. 6 : 7
B. 6 : 5
C. 5 : 14 : 44
D. përgjigje tjetër

29. Për shpallje të informatës në gazetë, është shfrytëzuar formula vijuese $S = 15n + 100$, ku S është çmimi në denarë e n numri i fjalëve. Sa është çmimi i informatës e cila ka 20 fjalë?

A. 500 denarë.
B. 400 denarë.
C. 450 denarë.
D. përgjigje tjetër

30. Për cilën vlerë të k, barazimi $kx = 12 + k$ ka zgjidhje $x = 5$?

31. Numrat me shumë 120 dhe ndryshim 40 janë:

A. 80 dhe 40
B. 80 dhe 20
C. 70 dhe 50
D. përgjigje tjetër

32. Parametri$m$në barazimin $x^2 - x + m = 0$ me zgjidhje $x = 1$ është ________.

33. Shprehe x në formulën e dhënë $A = ax - 5$, nëpërmjet $A\ dhe\ a$.

34. Shënoi të gjithë numrat e plotë pozitiv të cilët janë zgjidhje të jobarazimit për $x \leq 4$.

A. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
B. $\{1, 2, 3, 4\}$
C. $\{1,2, 3\}$
D. përgjigje tjetër

35. Shënoi të gjithë numrat e plotë pozitiv të cilët janë zgjidhje të $x - 1 \geq 4$.

36. Barazimi $2x - 3y = 6$ të shënohet në formën $y = mx + c$.

A. $y = -\frac{2}{3}x - 2$
B. $y = \frac{2}{3}x - 2$
C. $y = \frac{2}{3}x + 2$
D. përgjigje tjetër

37. Sa është pjerrtësia (devijimi) i drejtëzës $4x = 5 - 7y$?

38. Zbërthe në shumëzues: $x^2 - 4x + 3$.

A. $(x - 1)(x - 3)$
B. $(x - 1)(x + 3)$
C. $(x + 1)(x - 3)$
D. përgjigje tjetër

39. Për cilën vlerë të$n$është i saktë barazimi $\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{81}{625}$?

40. Pas thjeshtimit të thyesës $\frac{49-x^2}{7-x}$ fitohet:

A. $7 - x$
B. 1
C. $7 + x$
D. përgjigje tjetër

41. Sistemi i barazimeve $\begin{cases} x - y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$ ________ zgjidhje.

42. Shprehja pas thjeshtimit $\frac{((n^2 \cdot n^3)^7)^5}{(n^3 \cdot n^7)^{12}}$ është:

A. n^{85}
B. n^{55}
C. n^{105}
D. përgjigje tjetër.

43. Shënoje funksionin invers të funksionit $y = x - 3$.

44. Garuesi atlet në cak ka mbërri i 203-ti. Është konstatuar se secili i pesti është diskualifikuar. Plasmani i garuesit është:

A. 198- ti.
B. 177- ti.
C. 163- ti.
D. përgjigje tjetër.

45. Kamioneta lëviz me shpejtësi mesatare 60 km/h. Dy orë më vonë nga vendi i njëjtë është nisur një automobil, i cili ka lëvizur në drejtim të njëjtë me shpejtësi mesatare 80 km/h. Pas sa orëve automobili e mbërrin kamionetën?

46. Zgjidhje e barazimit $(x - 3) \cdot (x + 3) - x^2 + 3x = 3$ është:

A. $x = 4$
B. $x = 3$
C. $x = 0$
D. përgjigje tjetër.

47. Thjeshto thyesën $\frac{x^2-y^2}{ax-ay}$.

48. Nëse $y = 5 + 3x$, atëherë sa është $f^{-1}(17)$?

A. – 4.
B. 4.
C. 18.
D. përgjigje tjetër

49. Syprina e trekëndëshit ndërmjet boshteve koordinative dhe drejtëzës $6x + 7y - 42 = 0$ është:

A. 21
B. 31
C. 23
D. përgjigje tjetër.

50. Anija nga porti lundron 3 km në veri, e pastaj 4 km në perëndim. Sa km anija është larg nga porti?

A. 7 km
B. 5 km
C. 3,5 km
D. përgjigje tjetër.

51. Njehso gjatësinë e brinjës më të shkurtë të trekëndëshit kënddrejtë nëse dy brinjët kanë gjatësi 40 cm dhe 41 cm.

52. **Kulmet** e trekëndëshave barakrahës me bazë të përbashkët i takojnë:
A. boshtit të simetrisë.
B. drejtëzës që e përmban baza.
C. drejtëza normal me bazën.
D. përgjigje tjetër

53. Radhiti nga madhësia brinjët e trekëndëshit ABC $(AB = c,\ BC = a,\ AC = b)$, duke filluar nga më e vogla, nëse $\measuredangle A = 60$ dhe $\measuredangle B = 30$.

54. Sa është këndi i gjerë ndërmjet simetraleve të këndeve të ngushtë të trekëndëshit kënddrejtë?

55. Nëse në trekëndëshin ABC ka një kënd $42°$, e dy tjerët qëndrojnë si $5 : 1$, atëherë ai trekëndësh në raport me brinjët është:
A. kënddrejtë.
B. këndgjerë.
C. këndngushtë.
D. përgjigje tjetër.

56. Në trekëndëshin barakrahës, këndi i gjerë i formuar nga simetralet e dy këndeve të barabartë është tre herë më i madh se këndi në kulm. Këndi në kulm të trekëndëshit është ________.

57. Në trekëndëshinABC, këndi i jashtëm në kulmin Aështë $\alpha_1 = 120°$, e këndi i brendshëm në kulmin C është $\gamma = 60°$. Çfarë është trekëndëshi sipas brinjëve?

58. Syprina e katrorit është 25 cm^2. Syprina e rrethit të brendashkruar në katrorë është ________.

59. Syprina e kubit është 150 cm^2. Sa është vëllimi i kubit?
A. 75 cm^3.
B. 150 cm^3.
C. 125 cm^3.
D. përgjigje tjetër.

60. Njehso rrugën e kaluar të automobilit gjatë lëvizjes me shpejtësi mesatare 72 km në orë për kohë prej 120 minuta:

A. 192 km.
B. 144 km.
C. 72 km.
D. përgjigje tjetër.

61. Ena cilindrike ka rreze prej 3 m dhe lartësi prej 3 m. Syprina e enës është ________.

62. Rezervuari për ujë në formë cilindri ka rreze prej 4 m dhe lartësi prej 6 m. Sa litra ujë i zë rezervuari?

A. 75360 l.
B. 25420 l.
C. 95580 l.
D. përgjigje tjetër.

63. Vlera numerike e vëllimit të cilindrit me lartësi $2\,m$është e barabartë me vlerën numerike të perimetrit të bazës. Sa është rrezja e bazës së atij cilindri?

64. Kopshti në formë të drejtkëndëshit me dimensione 16 m dhe 8 m është mbështjellë me lehë të luleve të gjerë 2 m. Sa është syprina e lehës së luleve?

A. 112 m^2.
B. 192 m^2.
C. 82 m^2.
D. përgjigje tjetër.

65. Dimensionet e kuadrit qëndrojnë 5 : 6 : 7, e shuma e tyre është 36 dm. Vëllimi i kuadrit është _________________.

66. Nëse në katrorë është brendashkruar rrethi, atëherë raporti i syprinave të tyre është:

67. Nëse rrezja e një rrethi rritet për 2, atëherë gjatësia e vijës rrethore do të rritet për:

A. 4π.
B. 4.
C. 2π.
D. përgjigje tjetër.

68. Cilindri me lartësi 4 cm ka vëllim 100π cm^3. Sa është syprina e tij?

69. Sa litra ujë zë ena cilindrike me diametër të bazës 10 dm dhe lartësi 300 cm?

A.122π l.
B. 223,5 l.
C. 2355 l.
D. përgjigje tjetër.

70. Sa është mediana e shembullit: 27, 31, 33, 35, 37, 37, 40?

A. 37.
B. 35.
C. 13.
D. përgjigje tjetër.

71. Në një kuti ka toptha të kuq dhe të zi. Gjasa që të tërhiqet topi i kuq është $\frac{2}{5}$. Sa janë gjasat që të tërhiqet topthi i zi?

72. Irma ka luajtur katër ndeshje tenisi. Në tre ndeshje ka patur nga 10 pikë, e në një ndeshje ka marrë 2 pikë. Sa mesatarisht pika ka fituar nga katër ndeshjet e saja?

A. 9 pikë
B. 8 pikë.
C.7 pikë.
D. përgjigje tjetër.

73. Hedhen dy kube. Gjasa që njëra pas tjetrës të bien numrat 6 është __________________.

74. Rastësisht është zgjedhur numër nga bashkësia $\{1,2,3,\ldots,20\}$. Cila është gjasa që numri i zgjedhur gjatë pjesëtimit me 4 të jep mbetje 2?

A. $\frac{3}{20}$.
B. $\frac{1}{5}$.
C. $\frac{1}{4}$.
D. përgjigje tjetër.

75. Nëse në kuti ka 25 toptha të bardhë, 15 të kuq dhe 10 të gjelbër, dhe nga ajo tërhiqet një topth, atëherë gjasa që topthi nuk është i bardhë është:

76. Gjasat nga konvertimi i 52 letrave të tërhiqet , dhjetëshe e kuqe" është:

A. $\frac{1}{26}$.
B. $\frac{1}{13}$.
C. $\frac{4}{13}$.
D. përgjigje tjetër.

77. Sa është vlera e x, ashtu që mesi aritmetik i numrave 7, 8, 15 dhe x të jetë 13?

78. Në kuti ka kube të kuqe dhe të verdhë. Gjasa që të tërhiqet kubi i kuq është $\frac{3}{5}$. Cili është numri më i vogël i kubeve të verdha në kuti?

A. 3.
B. 4.
C. 2.
D. përgjigje tjetër

79. Një person e ka harruar shifrën e fundit të numrit telefonik të shokut të tij. Sa është gjasa që ta qëlloj saktë numrin telefonik të shokut të tij?

80. Në një kuti ka kube të kaltër, të gjelbër dhe të verdhë. Numri i kubeve në të është 20. Gjasa që të tërhiqet kubi i kaltër është $\frac{2}{5}$. Cili është numri më i madh i kubeve të kaltër në kuti?

A. 8.
B. 10.
C. 12.
D. përgjigje tjetër

81. Nëse secili anëtarë i vargut të numrave: 1, 5, 9, 13 rritet për 14, atëherë mesi aritmetik i numrave do të zmadhohet për ___________.

82. Sa është anëtari i panjohur në vargun: 3, 5, 7, 20, 10, 13, x, nëse mesi aritmetik i numrave të vargut është 11?

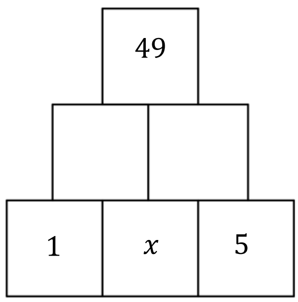
A. 11.
B. 19.
C. 22.
D. përgjigje tjetër

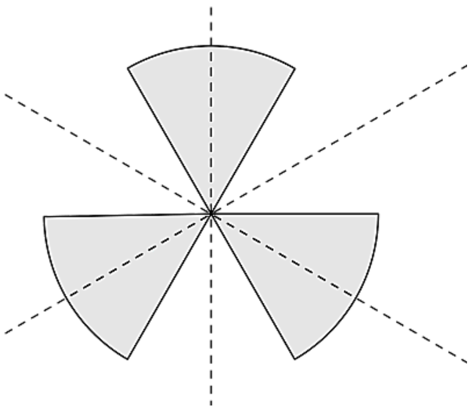
83. Hedhen monedha dhe kubi. Sa është gjasa që monedha të tregojë anën -shkrimi, e kubi të paraqitet numri tek?

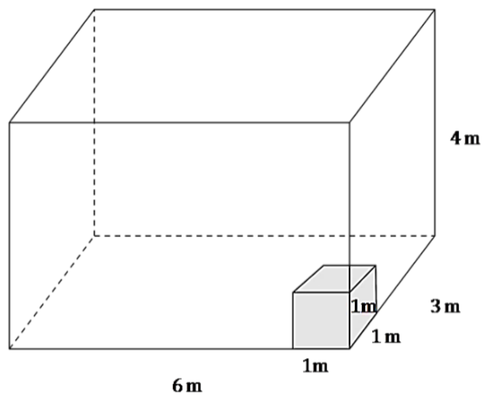
84. Raporti i trëndafilave të kuq dhe të bardhë në një shportë është 3 : 5. Në shportë ka 80 trëndafila. Sa janë gjasat të tërhiqet trëndafili I kuq?

A. $\frac{7}{8}$.
B. $\frac{5}{8}$.
C. $\frac{3}{8}$.
D. përgjigje tjetër.

ZGJIDHJE







ZGJIDHJE PËR KLASËN E VII-TË

1. $2\frac{2}{3}$
2. C.16
3. B. 64
4. 9 cm
5. A. 5 m
6. C. 75 %
7. 1800 denarë
8. B. 180
9. –5
10. A. –5
11. B. 324 km
12. 0
13. G. Përgjigje tjetër
14. C. 26
15. 7 A + 5 B
16. A. 8 x + 20 y.
17. Secili anëtarë i ardhshëm rritet për 8
18. B. 11
19. $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$
20. B. 104.
21. –35 x + 25 y + 10
22. A. 179
23. x = 5
24. Një bosht të simetrisë.
25. Nuk ka boshte të simetrisë.
26. A. 5
27. 50° dhe 80°.
28. C. 80°
29. 35° dhe 35°.
30. B. (4,1)
31. C. 2
32. 6.
33. A. Katër boshte të simetrisë.
34. B. P=20 m^2

35. $P = 1400\ mm^2$
36. C. $h = 4$ m.
37. $r = 12$ dm.
38. B. $P = 3600\pi\ cm^2$.
39. B. 9 cm.
40. 6 km
41. A.150 m^3
42. 36 cm^2
43. B. $P = 94\ cm^2$
44. 30π m.
45. C. 30 l.
46. $P = 180\ dm^2$.
47. C. 50 m.
48. 48 m.
49. B. 125,6 m.
50. A. 40 m.
51. 8 cm.
52. B. 1800 cm^2.
53. 1024000 l.
54. B. ngjarje e pamundur.
55. $\frac{1}{36}$.
56. C. 1
57. 1.
58. 0,3
59. $\frac{2}{7}$
60. të gjithë nxënësit.
61. A. $\frac{1}{2}$
62. 7
63. C. 4 dhe 5
64. 3
65. ngjarje e pamundur.
66. 24
67. B. 0,98.

ZGJIDHJE PËR KLASËN E VIII-TË

1. $-\frac{19}{7}$.
2. A. $\frac{19}{5}$
3. C. 7
4. $4\frac{1}{12}$.
5. C. $\frac{1}{40}$
6. 0,8(3).
7. C. 90
8. $500 = 2^2 \cdot 5^3$.
9. B. $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$
10. 15 %
11. C. 27
12. B. 60.
13. 800 denarë.
14. D. 12
15. 28840 denarë.
16. B. 40 %
17. B. –81
18. $\frac{1}{6}$.
19. A. $\frac{1}{2}$
20. A. 400 denarë.
21. $P = 25x + 5$.
22. A. $3a^2 - 20a - 10$
23. $L = 14x + 8y$.
24. $P = 12b + 12c + 2bc$.
25. C. 20
26. 8.
27. C. $3n - 1$
28. $13 - 4n$.
29. 22.
30. 3 cm.
31. $x = 4, y = 3$.

32. B. 9
33. A. 160
34. 4.
35. $y = 5x + 3$
36. 35°.
37. C. 50° dhe 50°
38. B. 125°
39. 140° dhe 110°.
40. (3,6).
41. D. 140°
42. (–3,3).
43. C. (0,0)
44. (0,8).
45. 20 m.
46. D. $r = 15$ dm
47. 60 cm^2.
48. 50π m.
49. B. 30 l
50. C. 32 m
51. 3 m.
52. A. 4 cm
53. C. 5
54. 400 m^2
55. A. 4 dm
56. D. 100
57. 225π cm^2.
58. C. 60 m^2
59. A. $\frac{5}{8}$.
60. 0,5.
61. B. 6.
62. 1,5
63. $40 - 59$
64. GG, GF, FG,FF. Sqarim G-germat ose shkrimi i monedhës, F-Fotografia në monedhë
65. C. $\frac{2}{5}$.
66. $\frac{3}{10}$

67. B. Gjasa të barabarta.
68. $\frac{1}{10}$.
69. $\frac{1}{12}$
70. B. $\frac{1}{3}$
71. 12.
72. B. $\frac{1}{6}$

ZGJIDHJE PËR KLASËN E IX-TË

1. 6 dhe 3.
2. A. 11.
3. $\frac{9}{4}$.
4. A. 1.
5. 150 denarë.
6. A. 2^{96}.
7. 1: 5000 000.
8. B. $\frac{1111}{10000}$
9. C. 10^{-4}
10. 10 : 7.
11. B. 6.
12. C. 2
13. 345 000 denarë.
14. B. 9.
15. $\frac{1}{8}$.
16. A. 5
17. 367 nxënës.
18. C. 1000 denarë.
19. 21.
20. B. 1001.
21. 12 m
22. A. 1

23. 2650 denarë
24. B. 14 djem.
25. 0,07
26. C. 25 %.
27. 40 vjet
28. C. 5 : 14 : 44
29. B. 400 denarë.
30. $k = 3$
31. A. 80 dhe 40.
32. $m = 0$.
33. $x = \frac{A+5}{a}$
34. B. $\{1, 2, 3, 4\}$
35. 5,6,7,...
36. B. $y = \frac{2}{3}x - 2$
37. $-\frac{4}{7}$
38. A. $(x - 1)(x - 3)$
39. $n = 4$
40. C. $7 + x$
41. nuk ka zgjidhje.
42. B. n^{55}
43. $y = x + 3$
44. C. 163- ti.
45. 8 orë.
46. A. $x = 4$
47. $\frac{x+y}{a}$
48. B. 4.
49. A. 21
50. B. 5 km.
51. 9 cm
52. A. Boshti i simetrisë.
53. c, a, b.
54. 135°
55. B. këndgjerë.
56. 36°.

57. barabrinjës
58. $6{,}25\,\pi\ \mathrm{cm}^2$.
59. C. $125\ \mathrm{cm}^3$.
60. B. 144 km
61. $36\pi\ \mathrm{m}^2$.
62. A. 75360 l.
63. 1 m
64. A. $112\ \mathrm{m}^2$.
65. $1680\ \mathrm{dm}^3$
66. $\frac{4}{\pi}$
67. A. 4π
68. $P = 90\pi\ \mathrm{cm}^2$
69. C. 2355 l.
70. B. 35.
71. $\frac{3}{5}$
72. B. 8 pikë.
73. $\frac{1}{36}$.
74. C. $\frac{1}{4}$.
75. $\frac{1}{2}$
76. A. $\frac{1}{26}$
77. $x = 22$
78. C. 2.
79. $\frac{1}{10}$
80. A. 8.
81. 14.
82. B. 19.
83. $\frac{1}{4}$
84. C. $\frac{3}{8}$.

TEMA 4

Induksioni matematikorë

Principi i induksionit matematikor është metodë e vlefshme për përdëftimin e disa pohimeve matematikore: barazime të caktuar, jobarazime, pjesëtueshmëri, etj. Në temë janë dhënë disa formulime të këtij principi dhe të njëjtat janë ilustruar nëpërmjet të shembujve.

$$1+q+q^2+\ \dots +q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}$$

$$(1+q+q^2+\ \dots +q^{n-1})+q^n=\frac{q^{n-1}-1}{q-1}+q^n=$$

$$=\frac{q^n-1+q^{n+1}-q^n}{q-1}=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Pohim: Le të jetë q numër real ashtu që $q \neq 1$. Atëherë për çdo $n \in \mathbb{N}$ vlen

$$1 + q + q^2 + \ \dots \ + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Përdëftim: (induksioni) Përcaktojmë gjykim I_n: $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}$ ku $n \in \mathbb{N}$.

(1) (baza e induksionit) I_1 është: $1 = \frac{q-1}{q-1}$, që paraqet gjykim të saktë.

(2) (hap induktiv) Gjykimi I_{n+1} është: $1 + q + q^2 + \ \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q-1}$. Të theksojmë se ana e majtë e I_{n+1} është shuma (ana e majtë e I_n) + q^n . Nga këtu sipas tezës së induktivitetit, sipas hipotezës induktive,

$$(1 + q + q^2 + \ \dots \ + q^{n-1}) + q^n = \frac{q^{n-1} - 1}{q-1} + q^n = \frac{q^n - 1 + q^{n+1} - q^n}{q-1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q-1}.$$

Me këtë përdëftuam se për çdo numër natyrorë n vlen implikacioni $\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1}$. Sipas principit të induksionit matematikor, për çdo $n \in \mathbb{N}$ gjykimi I_n është i saktë.

Induksioni matematikorë paraqet teknikë të fuqishme për përdëftim të gjykimeve që I takojnë numrave natyrorë. Ideja në të cilën bazohet kjo metodë është mjaft e thjeshtë:

Secili numër natyrorën > 1 ka (paraardhës të drejtpërdrejtë) $n - 1$ dhe me numër të kufizuar „kthim kah paraardhësi“ arrijmë deri te numri 1 gjegjësisht. Deri te numri më i vogël natyrorë.

Pohimet që përdëftohen me induksionin matematikorë (në vazhdim do të përdorim vetëm termin induksion), më së shpeshti janë të formës vijuese: për çdo numër natyrorë n, le të jetë I_n është gjykim që i takon n. Për pohim të llojit:

Pohim: Gjykimet $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \dots$ janë të sakta.

Procedura për përdëftim me induksion është sa vijon:

Përdëftim: (induksioni)

Hapi 1: Tregojmë se gjykimi I_1 е вистинит.

Hapi 2: Tregojmë se për çdo numër natyrorë n, $\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1}$.

Me fjalë tjera, nëse gjykimi I_n është gjykim i saktë atëherë edhe I_{n+1} është i saktë.

Nga principi i induksionit matematikorë rrjedh se gjykimet I_1, I_2, I_3, ... janë të sakta.

Gjatë kësaj, hapi 1 quhet baza *e induksionit;* hapi 2 quhet *hap induktiv:* duke supozuar saktësinë e I_n e përdëftojmë saktësinë e I_{n+1} ku n është numër natyrorë i çfarëdoshëm; supozimi „le të jetë I_n gjykim i saktë“ quhet *hipotezë induktive.*

Shembulli 1: Shuma e n numrave të parë natyrorë tek është n^2. Me fjalë tjera,

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

Perdëftim: (induksioni) Shënojmë gjykim I_n: $1+3+5+\ldots+(2n-1)= n^2$ ku $n\in\mathbb{N}$.

(1) (baza e induksionit) Gjykimi I_1 është: $1=1^2$, që qartë vërehet se plotësohet.

(2) (hapi induktiv) Supozojmë se I_n është i saktë, gjegjësisht se vlen barazimi $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$. Qëllimi ynë është të tregojmë se gjykimi I_{n+1} është i saktë. Fillimisht, si është gjykimi I_{n+1}?

$$\mathrm{I}_{n+1}:\ 1+3+5+\ldots+(2(n+1)-1)=(n+1)^2,$$

gjegjësisht

$$\mathrm{I}_{n+1}:\ 1+3+5+\ldots+(2n+1)=(n+1)^2.$$

Të shënojmë se ana e majtë e I_{n+1} është shuma: (ana e majtë e I_n) + $(2n+1)$. Sipas hipotezës induktive, kjo shumë është e barabartë me $n^2+(2n+1)$, a.ë. $(n+1)^2$.
Me fjalë tjera, treguam se vlen implikacioni $\mathrm{I}_n\Rightarrow\mathrm{I}_{n+1}$.
Nga principi i induksionit matematikorë, rrjedh se të gjitha gjykimet I_1, I_2, I_3, ... janë të sakta, gjegjësisht për çdo $n\in\mathbb{N}$ vlen barazimi

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

Shembulli 2: Shuma e n numrave të parë natyrorë është $\frac{n(n+1)}{2}$.

Me fjalë tjera,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Përdëftim: (induksioni) Le të jetë I_n: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ku $n \in \mathbb{N}$.

(1) (baza e induksionit) Gjykimi I_1 është: $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$, që vërehet se është plotësuar.

(2) (hapi induktiv) Supozojmë se I_n është i saktë. Gjykimi I_{n+1} do të jetë kështu:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Të shënojmë se ana e majtë e I_{n+1} është shuma: (ana e majtë e I_n) + $(n + 1)$. Sipas hipotezës induktive, kjo shumë është e barabartë me

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = (n + 1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Metoda e induksionit zbatohet lehtë në përdëftim të pohimeve si ato në dy shembujt e mëparshëm ku secili nga gjykimet i takon ndonjë shume (ose prodhim), ku shuma (prodhimi) i theksuar në I_n paraqet pjesë të shumës (prodhimit) të theksuar në I_{n+1}.

Ja edhe dy shembuj të ngjashëm.

Shembulli 3: Nëse q është numër real ashtu që $q \neq 1$. Atëherë për çdo $n \in \mathbb{N}$ vlen

$$1 + q + q^2 + \ \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Përdëftim: (induksioni) Nëse I_n: $1 + q + q^2 + \ \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1}$ ku $n \in \mathbb{N}$.

(1) (baza e induksionit) Gjykimi I_1 është: $1 = \frac{q-1}{q-1}$, që vërehet se paraqet gjykim të saktë.

(2) (hap induktiv) Gjykimi I_{n+1} është: $1 + q + q^2 + \ \ldots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$. Ana e majtë e I_{n+1} është shuma (ana e majtë e I_n) $+ q^n$. Nga këtu, sipas hipotezës induktive,

$$(1 + q + q^2 + \ \ldots + q^{n-1}) + q^n \, \frac{q^{n-1}-1}{q-1} + q^n = \frac{q^n-1+q^{n+1}-q^n}{q-1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Me këtë treguam se për çdo numër natyrorë n vlen implikacioni $\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1}$. Sipas principit të induksionit matematikorë, për çdo $n \in \mathbb{N}$gjykimi I_n është i saktë.

Shembull 4: Për çdo numër natyrorë n vlen $2^{n-1} \geq n$.

Përdëftim: (induksioni) Nëse I_n: $2^{n-1} \geq n$ ku $n \in \mathbb{N}$.
(1) (baza e induksionit) Gjykimi I_1 është: $2^0 \geq 1$, që është qartë e saktë.

(2) (hapi induktiv) Gjykimi I_{n+1} është $2^n \geq n+1$. Ana e majtë e I_n „fshihet“ në anën e majtë të I_{n+1} (gjegjësisht, $2^n = 2^{n-1} \cdot 2$). Sipas hipotezës induktive

$$2^n = 2^{n-1} \cdot 2 \geq n \cdot 2 = n + n > n + 1.$$

Treguam se për çdo numër natyrorë n vlen implikacioni $\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1}$.

Vërejtje: Procesi i përdëftimit induktiv mund të vizualizohet në këtë mënyrë: paramendoni rend të pafund të dominove, nga një për çdo numër natyrorë, në largesë të tillë ashtu që nëse cilado domino bie nga e djathta atëherë ajo e shtyn tjetrën fqinje (nga e djathta). (Kjo është hapi induktiv.) Në këtë kontekst, principi i induksionit matematikorë tregon se nëse edhe e para, gjegjësisht edhe dominoja më në të majtë rrëzohet (baza e induksionit), atëherë të gjitha domino do të rrëzohen. Kuptohet, Secila domino e rrëzuar simbolizon se gjykimi përkatës nga vargu I_1, I_2, I_3, ... është i saktë. Përdëftimi se dominoja e parë bie, nuk duhet të mungojë!

Shembulli 5: Për ço numër natyrorë n vlen barazimi $n = n + 1$.

Hapi induktiv $\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1}$ nënkupton përdëftim të implikacionit „nëse I_n, atëherë I_{n+1}“. Implikacioni i këtillë nuk është plotësuar vetëm në rast kur I_n është i saktë, e I_{n+1} gjykim jo i saktë. Nga hipoteza $n = n + 1$ lehtë nxirret se $n + 1 = n + 2$, por kjo nuk don të thotë se me induksion kemi treguar se për çdo $n \in \mathbb{N}$ vlen $n = n + 1$, sepse harruam në bazën e indukcionit $1 = 2$, e cila qartazi është gjykim jo i saktë.
Nga shkaqet e njëjta (gjegjësisht nëse e injorojmë bazën e induksionit), i gabuar do të jetë „përdëftimi“ induktiv i pohimit se për çdo $n \in \mathbb{N}$, numri $2n + 1$ është çift.

Vlen të theksohet edhe ajo se hapi induktiv realizon përdëftim të implikacionit $\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1}$ për çfarëdo (gjegjësisht për çdo) numër natyrorë n. Një gabim më suptil është ilustruar me shembullin vijues.

Shembulli 6: Të gjithë kuajt në planetin tokë kanë ngjyrë të njëjtë.

„Përdëftim “: (induksioni) Pohimi mund të parafrazohet në këtë mënyrë:
Për çdo $n \in \mathbb{N}$, të zgjedhur të çfarëdoshëm n kuaj kanë ngjyrë të njëjtë. Le të jetë ky gjykimi I_n. Duam të tregojmë se gjykimet $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \ldots$ janë të saktë.

(1) (baza e induksionit) Gjykimi I_1 është qartë i saktë.

(2) (hapi induktiv) Duke supozuar se I_n është gjykim i saktë, të tregojmë saktësinë e I_{n+1}. Për atë shkak, shqyrtojmë $n+1$ kuaj të çfarëdoshëm dhe të marrim se janë në një rend $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \ldots, \mathrm{K}_{n+1}$. Kuajt e parë n (gjegjësisht. $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \ldots, \mathrm{K}_n$) kanë ngjyrë të njëjtë, të themi të zezë, sipas hipotezës induktive. Nga arsyet e njëjta, n kuajt e fundit (gjegjësisht. $\mathrm{K}_2, \ldots, \mathrm{K}_{n+1}$) kanë ngjyrë të njëjtë, dhe pasi që K_2 është i zi, patjetër edhe ata n kuajt të jenë të zi. Me këtë „përdëftuam“ se kuajt $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \ldots, \mathrm{K}_{n+1}$ janë të zi.

A e vërejtët gabimin gjatë përfundimit në hapin induktiv?

Për implikacionin $\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1}$ nevoitet të përforcohet validiteti për çdo$n \in \mathbb{N}$, e në„përdëftimin “e mësipërm ajo nuk plotësohet, gjegjësisht ka një përjashtim: $n = 1$. Gjegjësisht, në atë rast bashkësitë $\{\mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_n\}$ dhe $\{\mathrm{K}_2, \ldots, \mathrm{K}_{n+1}\}$ nuk kanë prerje (gjegjësisht prerja e tyre është bashkësi e zbrazët), prandaj asgjë nuk kushtëzon ngjyra e grupit të parë të kuajve të përputhet me ngjyrën e grupit të dytë të kuajve.

Përfundim: Hapi induktiv duhet të jetë korrekt për çdo vlerë të n e cila është më e madhe ose e barabartë me vlerën e n në bazën e induksionit.

Do të vazhdojmë me dy shembuj në të cilat përdëftimi me induksion nuk është ashtu „drejtvizorë“ si në ata paraprak.

Shembulli 7: Për çdo numër natyrorë n vlen $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$.

zgjidhje: Natyrisht është të bëjmë përpjekje duke definuar gjykim I_n:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Kështu gjykimi I_1 është Qartë i saktë dhe ana e majtë e I_n „fshihet“ në anën e majtë të I_{n+1}. Por, duke pasur parasysh se jobarazimi $2 + \frac{1}{n^2} < 2$ nuk është plotësuar, nuk jemi në mundësi të kompletojmë hapin induktiv.

Ky shembull është ilustrimi i parë në atë se ndonjëherë është më thjeshtë të tregohet më shumë se ajo që pohohet. Gjegjësisht, të realizojmë përdëftim induktiv të pohimit më të fuqishëm ku gjykimi i n-të është:

$$\mathrm{I}_n\colon\ \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ \dots+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n}.$$

(1) (baza e induksionit) Gjykimi I_1 është $\frac{1}{1^2}\leq 2-\frac{1}{1}$, gjë që është e qartë se është plotësuar.

(2) (hapi induktiv) Nëse për numër të dhënë natyrorë n, gjykimi I_n është i saktë gjykimi i radhës I_{n+1} pohon se:

$$\mathrm{I}_{n+1}\colon\ \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ \dots+\frac{1}{(n+1)^2}\leq 2-\frac{1}{n+1}$$

Sipas hipotezës induktive, $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{(n+1)^2}$

$$\begin{aligned}
&\leq 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\\
&=2-\frac{(n+1)^2-n}{n(n+1)^2}\\
&=2-\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}\\
&\leq 2-\frac{n^2+n}{n(n+1)^2}\\
&=2-\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

D.m.th, $\mathrm{I}_n \Rightarrow\ \mathrm{I}_{n+1}$.

<u>Shembull 8:</u> Për çdo $n\in\mathbb{N}$ vlen $\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}<2$.

<u>zgjidhje:</u> Kjo është edhe një shembull për atë se ndonjëherë është më thjeshtë të tregohet diç më shumë se ajo që pohohet. Le të jetë gjykimi i n-të:

$$\mathrm{I}_n\text{: për çdo } k\in\mathbb{N} \text{ vlen } \sqrt{k+\sqrt{k+1+\cdots+\sqrt{k+n}}}<k+1.$$

Do të tregojmë se gjykimet $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \dots$ janë të saktë, nga çka do të del qartazi edhe saktësia e jobarazimit të dhënë në shembullin.

(1) (baza e induksionit) gjykimi I_1 është $\sqrt{k+\sqrt{k+1}}<k+1$, që me fuqizim në katrorë të dy anëve do të shndërrohet në, gjegjësisht në $\sqrt{k+1}<k+1+k^2$.
D.m.th, I_1 është gjykim i saktë.

(2) (hapi induktiv) Për shkak të shënimit më të thjeshtë, të shënojmë:

$$S_{k,n} = \sqrt{k + \sqrt{k + 1 + \cdots + \sqrt{k + n}}}$$

Duke supozuar se I_n është gjykim i saktë, kemi se $S_{k,n} < k + 1$. Ngelë të vërejmë se është plotësuar barazimi $S_{k,n+1} = \sqrt{k + S_{k+1,n}}$. Me të vërtetë,

$$\sqrt{k + \sqrt{k + 1 + \cdots + \sqrt{k + n + 1}}} = \sqrt{k + \sqrt{k + 1 + \cdots + \sqrt{k + 1 + n}}},$$

Dhe mbledhësi i theksuar është saktë $S_{k+1,n}$. Kështu sipas hipotezës+ induktive,

$$S_{k,n+1} = \sqrt{k + S_{k+1,n}} < \sqrt{k + (k + 2)} = \sqrt{2k + 2},$$

Dhe ngelë të vërehet se $\sqrt{2k + 2} \leq k + 1$.

Përfundim: Ndonjëherë është më thjeshtë, me anë të induksionit matematikorë, të tregohet më shumë se kjo që pohohet. Kjo është ashtu për shkak se hapi induktiv nënkupton përdëftim të implikacionit $I_n \Rightarrow I_{n+1}$ dhe (ndonjëherë) hipotezë më të fuqishme induktive tërheq përfundim më të fuqishëm!

Në secilin nga shembujt e mëparshëm, gjatë përdëftimit të implikacionit na hapin induktiv, lehtësim ishte ajo që I_n nuk ishte „mirë e fshehur“ në I_{n+1}. Në vazhdim japim dy shembuj nga pjesëtueshmëria, ku „fshehja“ është (me sa duket) më mirë.

Shembulli 9: Për çdo $n \in \mathbb{N}$ vlen $9|(4^n + 15n - 1)$.

Zgjidhje: Të shënojmë se gjykimi I_n: $9|(4^n + 15n - 1)$ mund të shënohet në formën

$$I_n\colon 4^n = 9a_n - 15n + 1, \text{ për ndonjë } a_n \in \mathbb{Z}.$$

Ky shënim është i përshtatshëm për përdorim në hapin induktiv.

(1) (baza e induksionit) I_1: $4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 9 \cdot 2$, gjegjësisht $a_1 = 2 \in \mathbb{Z}$.

(2) (hapi induktiv) Me supozim se I_n është gjykim i saktë, gjegjësisht se vlen $4^n = 9a_n - 15n + 1$, kemi:

$$\begin{aligned} 4^{n+1} = 4 \cdot 4^n = 4 \cdot (9a_n - 15n + 1) &= 9 \cdot 4a_n - 60n + 4 \\ &= 9 \cdot 4a_n - 15(n+1) - 45n + 18 + 1 \\ &= 9 \cdot (4a_n - 5n + 2) - 15(n+1) + 1, \end{aligned}$$

gjegjësisht $a_{n+1} = 4a_n - 5n + 2 \in \mathbb{Z}$.

<u>Shembulli 10:</u> Për çdo $n \in \mathbb{N}$ vlen $5|(n^5 - n)$.

<u>Zgjidhje:</u> Gjykimi I_n: $5|(n^5 - n)$ e shënojmë në formën

$$\mathrm{I}_n: n^5 - n = 5a_n, \text{ për ndonjë } a_n \in \mathbb{Z}.$$

(1) (baza e induksionit) I_1: $1^5 - 1 = 5 \cdot 0$, gjegjësisht $a_1 = 0 \in \mathbb{Z}$.

(2) (hap induktiv) Nën supozim se I_n është gjykim i saktë, kemi

$$\begin{aligned} (n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 \\ &= (n^5 - n) + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n \\ &= 5(a_n + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n), \end{aligned}$$

gjegjësisht $a_{n+1} = a_n + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n \in \mathbb{Z}$.

Vetia e numrave natyrorë e cila është ilustruar me shembullin vijues quhet *radhitje e mirë e numrave natyrorë.*

<u>Shembulli 11:</u> Secila nënbashkësi jo e zbrazët e $\mathbb{N}$ ka element më të vogël.

<u>Zgjidhje:</u> Nëse I_n është gjykimi: „Secila nënbashkësi e $\mathbb{N}$e cila përmban element më të vogël ose të barabartë me n ka element më të vogël." Me ndihmën e induksionit do të tregojmë se gjykimet I_1, I_2, I_3, ... janë të sakta.

(1) (baza e induksionit) Pasi që1 është numri më i vogël natyrorë, gjykimi I_1 është i saktë.

(2) (hapi induktiv) Nën supozimin se I_n është gjykim i saktë, nëse $S \subseteq \mathbb{N}$ përmban element më të vogël ose të barabartë me $n + 1$. Nëse Spërmban element më të vogël ose të barabartë me n, atëherë sipas hipotezës induktive, bashkësia S ka element më të vogël. Nga ana tjetër, nëse ajo nënbashkësi S nuk përmban element më të vogël ose të barabartë me n, atëherë $n + 1$është elementi i saj më i vogël.

Treguam se $\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{I}_{n+1}$, që e kompleton përdëftimin induktiv.
Nëse $S \subseteq \mathbb{N}$ dhe S^c është komplementi i saj relative, gjegjësisht $S^c = \mathbb{N} \setminus S$. Derisa $S \neq \mathbb{N}$, nënbashkësia S^c është e zbrazët dhe (sipas shembullit 11) ekziston elementi më i vogël i S^c.

Përfundim: Nëse $S \subseteq \mathbb{N}$ dhe $S \neq \mathbb{N}$, atëherë ekziston numër më i vogël natyrorë që nuk i takon S.

Përfundimi I fundit na dërgon kah një variant të metodës së induksionit matematikorë, e quajtur *metoda e rënies së pafundme:*

Gjykimet $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \ldots$ janë të sakta, derisa nuk ekziston n më i vogël për të cilën gjykimi I_n nuk është i saktë.

Metoda e rënies së pafundme rrjedhë nga matematicienti i njohur francez Pjer Ferma (1601-1665). Ai ka shfrytëzuar këtë metodë që të tregojë se barazime të caktuara konkrete nuk kanë zgjidhje në bashkësinë e numrave natyrorë. Këtë temë e mbyllim me dy ilustrime të metodës së rënies së pafundme.

Shembulli 12: Numri $\sqrt{2}$ është iracional.

Zgjidhje: Nëse I_n: Nuk ekziston $m \in \mathbb{N}$ për të cilin $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Mjafton të përdëftojmë se gjykimet I_1, I_2, I_3, ... janë të sakta. Do të bëjmë këtë me ndihmën e metodës së rënies së pafundme. Gjegjësisht, të supozojmë se I_1, I_2, I_3, ... nuk janë të gjitha të sakta, dhe le të jetë$n$numri natyrorë më i vogël për të cilin gjykim I_n është i pasaktë, gjegjësisht n është numri natyrorë më i vogël për të cilin ekziston shënimi

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}.$$

Pasi që$1 < \sqrt{2} < 2$, kemi se $n < m < 2n$. Nga këtu, $0 < m - n < n$gjegjësisht$m - n$është numër më i vogël natyrorë nga numri n. Do të tregojmë se gjykimi I_{m-n} është jo i saktë me çka do të demonstrojmë barazimin:

$$\frac{2n-m}{m-n} = \frac{m}{n}.$$

Me të vërtetë, $\frac{2n-m}{m-n} = \frac{n(2n-m)}{n(m-n)} = \frac{2n^2-mn}{n(m-n)} = \frac{m^2-mn}{n(m-n)} = \frac{m(m-n)}{n(m-n)} = \frac{m}{n}$. Por kjo tërheqë se $\sqrt{2} = \frac{2n-m}{m-n}$, gjegjësisht se $n$nuk është numri më i vogël natyrorë për të cilin I_n është gjykim jo i saktë. Kjo është kundërthënia e dëshiruar. Sipas metodës së rënies së pafundme, secili nga gjykimet I_1, I_2, I_3, ... është I saktë, gjegjësisht $\sqrt{2}$ është numër irracional.

Shembulli i radhës (I fundit) e përgjithëson të mëparshmin.

Shembulli 13: Nëse $a \in \mathbb{N}$, por $\sqrt{a} \notin \mathbb{N}$. Atëherë, $\sqrt{a}$ është numër irracional.

Zgjidhje: Numri $\sqrt{a}$ shtrihet ndërmjet dy numrave natyrorë, le të jenë k dhe $k+1$, gjegjësisht le të jenë
$k < \sqrt{a} < k+1$.

Për çdo $n \in \mathbb{N}$, shqyrtojmë gjykim I_n: Nuk ekziston $m \in \mathbb{N}$ për të cilin $\sqrt{a} = \frac{m}{n}$. Me ndihmën e metodës së rënies së pafundme do të tregojmë se gjykimet I_1, I_2, I_3, ... janë të saktë.

Duke e supozuar të kundërtën, ekziston numër natyrorë më i vogël n për të cilin gjykimi I_n nuk është i saktë, gjegjësisht ekziston më i vogli $n \in \mathbb{N}$ ashtu që $\sqrt{a} = \frac{m}{n}$, për ndonjë $m \in \mathbb{N}$.

Nga $k < \sqrt{a} < k+1$ fitohet se $kn < m < kn+n$, gjegjësisht $0 < m-kn < n$. D.m.th, $m-kn \in \mathbb{N}$ dhe $m-kn < n$. Port ë shënojmë se $\frac{an-km}{m-kn} = \frac{m}{n}$. Me të vërtetë,

$$\frac{an-km}{m-kn} = \frac{n(an-km)}{n(m-kn)} = \frac{an^2-kmn}{n(m-kn)} = \frac{m^2-mkn}{n(m-kn)} = \frac{m(m-kn)}{n(m-kn)}.$$

D.m.th, $\sqrt{a} = \frac{an-km}{m-kn}$ dhe $an-km \in \mathbb{Z}$, që tërheqë se $an-km \in \mathbb{N}$. Por, atëherë n nuk është numri më i vogël natyrorë për të cilin gjykimi I_n është i pasaktë. Kjo është kundërthënia e dëshiruar.

TEMA 5

Hyrje në jobarazime

Në këtë temë janë përfshirë kuptimet themelore për jobarazimet ndërmjet numrave real dhe janë shqyrtuar disa jobarazime të përgjithshme elementare. Janë përfshirë edhe kuptimet për mes aritmetik, gjeometrik, harmonik dhe mes katrorë dhe janë përdëftuar jobarazimet themelore ndërmjet meseve. Janë dhënë numër i mjaftueshëm i shembujve të zgjidhur nga të cilët mund të vërehen teknikat themelore për përdëftim të jobarazimeve.

$$\sqrt{6} < \sqrt{6+3}$$

$$\Longrightarrow$$

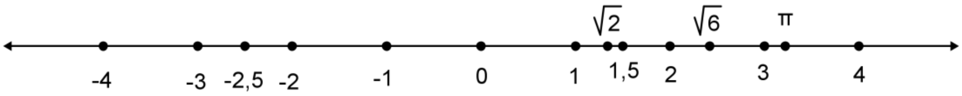
$$\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}} < \sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6+3}}} = 3$$

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

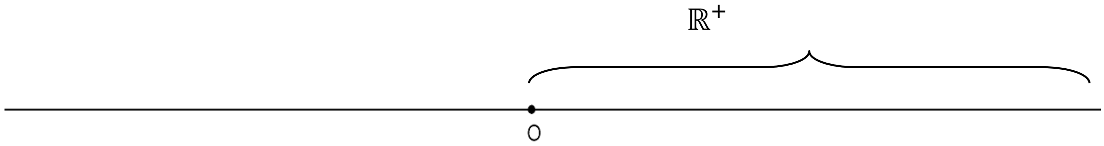
0. Rradhitja e numrave real (joformale)

Bashkësia $\mathbb{R}$ nga të gjithë numrat real, shkuar gjeometrikisht, paraqet drejtëz; me fjalë tjera, secila pikë e drejtëzës „përgjigjet " numrit real të vetëm dhe e kundërta:



Më saktë thënë, nëse në drejtëz zgjedhim dy pika dhe i emërojmë me 0 dhe 1, atëherë ekziston bijeksion „natyrorë" ndërmjet bashkësisë së numrave real dhe tërësisë së pikave të drejtëzës: çdo pike i bashkëngjitet numër i vetëm real dhe gjatë kësaj për çfarëdo $a, b \in \mathbb{R}$ pikat e bashkangjitura të a dhe b janë në largesë $|a - b|$.

Paraqitja e këtillë gjeometrike në bashkësinë $\mathbb{R}$ quhet *bosht numerik*. Në këtë kontekst, në boshtin numerik dallojmë kahe „djathtas nga" dhe „majtas nga e" në përputhje me: djathtas nga 0gjendet numri 1, e majtas numri-1. Gjatë kësaj të gjithë numrat të cilët (si pika)gjenden djathtas nga zero i quajmë numra real pozitiv; tërësia e tyre shënohet me $\mathbb{R}^+$.



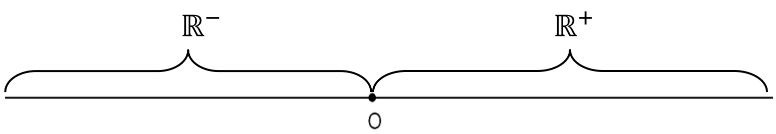
Tri vetitë themelore të cilat i posedon bashkësia e numrave pozitiv real $\mathbb{R}^+$ janë:

(П1) për çdo $x, y \in \mathbb{R}^+$, shuma $x + y \in \mathbb{R}^+$;
(П2) për çdo $x, y \in \mathbb{R}^+$, prodhimi $xy \in \mathbb{R}^+$;
(П3) për çdo numër real $x \neq 0$, saktë njëri nga numrat x dhe $-x$ është pozitiv.

<u>Pyetje</u>: Ku në bosht numerik ndodhen numrat $-x: x \in \mathbb{R}^+$?

<u>Përgjigje</u>: Majtas nga zero.

Numrat real majtas nga zero quhen numra negativ real dhe tërësia e tyre shënohet *me* $\mathbb{R}^-$.
D.m.th, $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$.



Pyetje: Cilat nga vetitë (Π1)-(Π3) i posedon bashkësia $\mathbb{R}^{-}$?

Përgjigje: Vetëm (Π1) dhe (Π3); vetia (Π2) nuk vlen, sepse prodhimi i çdo dy numrave negative real është numër real pozitiv.
Për numrat real a dhe b themi se *a është më i vogël se b*, e shënuar me $a < b$, gjersa në boshtin numerik pika b qëndron djathtas nga pika a. Me fjalë tjera:

Vetia themelore e radhitjes së numrave real: Për numrat real a dhe b,

$$a < b, \text{ nëse dhe vetëm nëse } b - a \in \mathbb{R}^{+}.$$

Pyetje: çka mund të thuhet për bashkësitë $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$ dhe $\mathbb{R}^{+}$?

Përgjigje: Këto dy bashkësi janë të barabarta

Vetit që janë nxjerrë nga ato themeloret:
(C1) $a < b$ dhe $b < c \;\Rightarrow\; a < c$;
(C2) $a < b$ dhe $0 < c \;\Rightarrow\; ac < bc$;
(C3) $a<b$ dhe $c < 0 \;\Rightarrow\; bc < ac$;
(C4) $0 < a < b \;\Leftrightarrow\; 0 < 1/b < 1/a$;
(C5) $a < b \;\Leftrightarrow\; a + c < b + c$;
(C6) $0 < a < b \;\Leftrightarrow$ për çdo $n \in \mathbb{N}$, $0 < a^n < b^n$;
(C7) $0 < a < b \;\Leftrightarrow$ për çdo $n \in \mathbb{N}$, $0 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Skica e përdëftimit: çdo njëra nga (C1)-(C7) shndërrohet në vetinë themelore për radhitje dhe në ndonjërën nga (Π1)-(Π3). Si shembull, do ta demonstrojmë (C1):

$$a < b \;\Leftrightarrow\; b - a \in \mathbb{R}^{+};\; b < c \;\Leftrightarrow\; c - b \in \mathbb{R}^{+}.$$

Sipas (Π1), $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}^{+}$, gjegjësisht $c - a \in \mathbb{R}^{+}$, që b është ekuivalente me $a < c$.

Një shënim ekuivalent I jobarazimit $a < b$ është $b > a$. Të shënojmë se vetia (Π3) për bashkësinë $\mathbb{R}^{+}$mund të tregohet edhe me ndihmën e radhitjes:

Për çdo $a, b \in \mathbb{R}$, është plotësuar saktë një nga tri pohimet vijuese:
$(1)\, a < b$ *ose* $(2)\, a = b$ *ose* $(3)\, a > b$

Me kombinim (union) të relacioneve $<$ dhe $=$ fitohet relacioni „më e vogël ose e barabartë“, e shënuar me $\leq$. Gjegjësisht, për çfarëdo numra real a dhe b, shënimi $a \leq b$ shënon se $a < b$ ose $a = b$, gjegjësisht se a *është më e vogël ose e barabartë me* b.

Pyetje: çka tregon dhe si lexohet shenja $a \geq b$?

Pyetje: Cilat nga (C1)-(C7)vlejnë derisa $<$ zëvendësohet me $\leq$?

Pyetje: Shëno veti analoge të (П1) dhe (П2) për numra $x, y \geq 0$.

Për ço numër real $a \geq 0$ themi edhe se është numër jonegativ. Ngjashëm, për çdo numër real$a \leq 0$ themi se është numër *jopozitiv*. Këtë paragraf e mbarojmë me tre shembuj.

Shembull 0.1: Për çfarëdo $a, b \geq 0$, vlen jobarazimi

$$a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + a^2b^3,$$

Me barazimin nëse dhe vetëm nëse $a = b$.

Mjafton ta shqyrtojmë shënimin ekuivalent $a^5 + b^5 - a^3b^2 - a^2b^3 \geq 0$ dhe për të të shënojmë se ana e majtë mund të shënohet në formë $(a^3 - b^3)(a^2 - b^2)$. Nga shkaqet e simetrisë, mund të supozojmë se $a \geq b$. Por atëherë, sipas (C6), vlen $(a^3 - b^3)(a^2 - b^2) \geq 0$.

Vërejtje: Nuk ka asgjë specifike të numrat 2, 3 dhe 5 të cilët lajmërohen si eksponentë në shembullin e mëparshëm. Me rëndësi të veçantë është që $5 = 2 + 3$. Gjegjësisht, për çfardo numra natyrorë$m$dhe$n$dhe çdo $a, b \geq 0$ vlen

$$a^{m+n} + b^{m+n} \geq a^m b^n + a^n b^m,$$

Me barazimin nëse dhe vetëm nëse $a = b$. Si përdëftim, mjafton të vërehet se jobarazimi i fundit është ekuivalente me jobarazimin $(a^m - b^m)(a^n - b^n) \geq 0$.

Shembulli 0.2: Për $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, për të cilët $a \geq b$ dhe $c \geq d$ vlen jobarazimi

$$ac + bd \geq ad + bc,$$

Me barazimin nëse dhe vetëm nëse $a = b$ ose $c = d$.

Shfrytëzojmë se $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$ dhe $c \geq d \Leftrightarrow c - d \geq 0$. Nga këtu, sipas vetisë analoge të (Π2) për numra jonegativ, kemi se $(a-b)(c-d) \geq 0$, me barazimin nëse dhe vetëm nëse $a = b$ ose $c = d$. Ngel të shënojmë se vlen

$$(a-b)(c-d) = (ac+bd) - (ad+bc).$$

<u>Shembulli 0.3:</u> Për çfarëdo $x, y \in \mathbb{R}^+$, vlen barazimi

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

Me barazimin nëse dhe vetëm nëse $x = y$.

Nga shkaqet e simetrisë, mund të supozojmë se $x \geq y$. Atëherë sipas (C4) dhe (C6), $\frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Jobarazime i këtij shembulli tani rrjedh nga jobarazimi në shembullin paraprak të $a = x, b = y, c = \frac{1}{\sqrt{y}}, d = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

1. Katrori i secilit numër real është numër jonegativ

Duke pasur parasysh (Π2) dhe atë që e treguam në kontekst të (Π2) për numrat real negative, jobarazimi vijues është i qartë; quhet *jobarazim fundamental:*

Për çdo $a \in \mathbb{R}$ vlen $a^2 \geq 0$, me barazimin nëse dhe vetëm nëse $a = 0$.

Me disa shembuj do ta ilustrojmë zbatimin e jobarazimit të mësipërm.

<u>Shembulli 1.1:</u> Për çfarëdo $a, b \in \mathbb{R}$, vlen jobarazimi

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

Me barazimin nëse dhe vetëm nëse $a = b$.

Kjartë, $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Nga këto shkaqe, mjafton të shënojmë se identiteti është i saktë $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

Shembulli 1.2: Për çfarëdo $a, b, c \in \mathbb{R}$, vlen jobarazimi

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

Me barazimin nëse dhe vetëm nëse $a = b = c$.

Gjegjësisht, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) \geq 0$. Për atë shkak, mjafton të vërejmë se identiteti është i saktë

$$(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) = \frac{1}{2}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2).$$

Shembulli 1.3: Për çfarëdo $a, b, c \in \mathbb{R}$, vlen jobarazimi

$$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2,$$

Me barazimin nëse dhe vetëm nëse $a = b$.

mjafton të vërejmë se $2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = (a - b)^2$.

Me ndihmën e shembullit 1.3, jobarazimi nga shembulli 1.2 mund të përmirësohet:

Shembulli 1.4: Për çfarëdo $a, b, c \in \mathbb{R}$, vlen jobarazimi

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca + \frac{3}{4}(a - b)^2.$$

Duke shfrytëzuar se $(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) = \frac{1}{2}((a - b)^2 + (b - c)^2 +$ $+(c - a)^2)$, jobarazimi i mësipërm fiton formën

$$2((b - c)^2 + (c - a)^2) \geq (b - a)^2.$$

Nga ana tjetër, jobarazimi i fundit nuk është asgjë tjetër përveç asaj në shembullin 1.3. Saktë, duke vënë $x = b - c$ dhe $y = c - a$, kemi se $x + y = b - a$.

Pyetje: Kur arrihet barazimi në shembullin 1.4?

Përgjigje: Nëse dhe vetëm nëse $a + b = 2c$.

Shembulli 1.5: Për çfarëdo $a \in \mathbb{R}^+$vlen jobarazimi

$$a + \frac{1}{a} \geq 2\,,$$

Me barazimin nëse dhe vetëm nëse $a = 1$.

Drejtpërdrejtë rrjedh se nga shembulli 1.1, ose nëse shfrytëzojmë se $a + \frac{1}{a} - 2 =$
$= (\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})^2$.

2. Funksioni katrorë $x \mapsto ax^2 + bx + c$

Nëse$a, b, c \in \mathbb{R}$ dhe$a \neq 0$. Rifigurimi (pasqyrimi)$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$i dhënë me з $x \mapsto ax^2 + bx + c$ është shembull i përgjithshëm për të ashtuquajturën *funksion katrorë*. Dy shembujt themelorë për funksion katrorë janë: $x \mapsto x^2$ dhe $x \mapsto -x^2$. Në kontekst të funksioneve katrore, jobarazimi fundamental nga paragrafi I mëparshëm tregon se funksioni katrorë$x \mapsto x^2$merr vetëm vlera jonegative, minimum i saj (vlera më e vogël e mundshme)është0dhe arrihet vetëm për $x = 0$. Nga ana e tjetër, funksioni katrorë $x \mapsto -x^2$ merr vetëm vlera jopozitive, maksimumi i saj (vlera më e madhe e mundshme) është 0 dhe arrihet vetëm për $x = 0$.

Teorema 2.1: Për çdo $a \in \mathbb{R}^+$, funksioni katrorë $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ka minimum

$c - \frac{b^2}{4a}$, i cili arrihet vetëm për $x = -\frac{b}{2a}$.

Teorema 2.2: Për çdo $a \in \mathbb{R}^-$, funksioni katrorë $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ka maksimum

$c - \frac{b^2}{4a}$, i cili arrihet vetëm për $x = -\frac{b}{2a}$.

Përdëftim: Mjafton të vërejmë se $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$. Me këtë shënim, Jobarazimi bazë i zbatuar mbi $(x + \frac{b}{2a})^2$ i jep teoremat 2.1 dhe 2.2.

Në vazhdim, dy teoremat e mësipërme do ti ilustrojmë me disa shembuj.

Shembulli 2.3: Nëse $x, y \in \mathbb{R}$ kanë shumë $x + y = C$, atëherë për prodhimin e tyre vlen

$$xy \leq \frac{C^2}{4},$$

Dhe barazim do të arrihet nëse dhe vetëm nëse $x = y$.

Gjegjësisht, shembulli rrjedh nga teorema 2.2 sepse $xy = x(C - x) = -x^2 + Cx$.

Vërejtje: Me fjalë tjera, gjatë mbledhjes konstante të ndryshoreve mbledhës, prodhimi i tyre maksimizohet derisa shumëzuesit (mbledhësit) janë të barabartë. Ky princip lejon interpretim gjeometrik interesant: nga të gjithë drejtkëndëshit me perimetër të dhënë konstant, syprinë më të madhe ka katrori përkatës.

Shembulli 2.4: Nëse $a, b \geq 0$, atëherë së paku njëri nga $a(1 - b)$ dhe $b(1 - a)$ nuk është më i madh se $\frac{1}{4}$.

Me të vërtetë, të supozojmë se $a(1 - b) > \frac{1}{4}$ dhe $b(1 - a) > \frac{1}{4}$. Atëherë $a, b < 1$ dhe vlen $a(1 - b)b(1 - a) > \frac{1}{16}$. Nga ana tjetër, sipas shembullit të mëparshëm, për çdo $0 \leq x \leq 1$ vlen $x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$. Prandaj $a(1 - a)b(1 - b) \leq \frac{1}{16}$, që është kundërthënëse me supozimin. Nga kjo përfundojmë se supozimi fillestarë është i gabuar, gjegjësisht së paku njëra nga $a(1 - b)$ dhe $b(1 - a)$ nuk është më i madh se $\frac{1}{4}$.

Për numra real pozitiv, në shembullin 2.3 dual është shembulli vijues.

Shembulli 2.5: Nëse $x, y \in \mathbb{R}^+$ kanë prodhim $xy = C$, atëherë për shumën e tyre vlen

$$x + y \geq 2\sqrt{C},$$

Ku barazimi arrihet nëse dhe vetëm nëse $x = y$.

Gjegjësisht,sipas Shembullit 1.1, $x + y = x + \frac{C}{x} = \sqrt{x}^{\,2} + \sqrt{\frac{C}{x}}^{\,2} \geq 2\sqrt{x}\sqrt{\frac{C}{x}} = 2\sqrt{C}$, me barazimin nëse dhe vetëm nëse $x = y = \sqrt{C}$.

Pyetje: Pse është me rëndësi x dhe y të jenë pozitive?

<u>Vërejtje</u>: Me fjalë tjera, gjatë prodhimit konstant dhe ndryshore shumëzues pozitiv, shuma e tyre minimizohet derisa mbledhësit (shumëzuesit) janë të barabartë. Ky princip lejon interpretim gjeometrik interesant: nga të gjithë drejtkëndëshat me syprinë të dhënë konstante, perimetër më të vogël ka katrori përkatës (gjegjës).

3. Jobarazimet ndërmjet meseve

Në këtë pjesë do të kufizohemi në numra real pozitiv $a_1, a_2, \dots, a_n$ ku $n \in \mathbb{N}$. Numrat:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \quad , \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots\ a_n} \quad , \quad \frac{a_1+a_2+\cdots+\ a_n}{n} \quad , \quad \sqrt{\frac{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+\ {a_n}^2}{n}}$$

anë quajtur, rrjedhimisht në radhitje, mes harmonik, mes gjeometrik, mes aritmetik, dhe mes katror i numrave $a_1, a_2, \dots, a_n$.
Shenjat përkatëse për këto mese janë HM $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (anglisht. *harmonik mean*), GM$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (ang. *geometric mean*), AM$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (ang. *aritmetic mean*), dhe QM$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (ang. *quadratic mean*). Do të tregojmë se vlen:

Teorema 3.1: Për çdo $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ plotësohet jobarazimi:

$$\mathrm{HM}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \mathrm{GM}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \mathrm{AM}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \mathrm{QM}(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

ku së paku në njërën arrihet barayimi nëse dhe vetëm nëse $a_1 = a_2 = \cdots = \ a_n$.

Si përgatitje për përdëftim të Teoremës 3.1, fillimisht do ta shqyrtojmë rastin $n = 2$. Gjatë kësaj, në vend a_1 dhe a_2 do të përdorim shenja a dhe b (për dy numra real pozitiv), dhe do të tregojmë se për to vlejnë tre jobarazimet vijuese:

$$\text{(I)}\ \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}, \quad \text{(II)}\ \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad \text{(III)}\ \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

Ku së paku njëra nga (I) до (III) arrihet barazimi nëse dhe vetëm nëse $a = b$.

Në të vërtetë(S4) tregon se (I) është ekuivalente me (II) në kuptimin:

(I) vlen për të gjitha $a, b \in \mathbb{R}^+$, me barazimin nëse dhe vetëm nëse $a = b$

$$\Updownarrow$$

(II) vlen për çdo $a, b \in \mathbb{R}^+$, me barazimin nëse dhe vetëm nëse $a = b$

Saktë, $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \ \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ \Leftrightarrow \ \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \leq \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$.

Në vazhdim, do të japim përdëftim algjebrik të (II) dhe (III).

Për çdo $a, b \in \mathbb{R}^+$ vlen

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

me barayim nëse $a = b$. (**)

Përdëftim: Të fillojmë nga jobarazimi bazë:

p: $(a-b)^2 \geq 0$

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$

$(a+b)^2 \geq 4ab$

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$

q: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ $/\cdot 2$

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ $/\,^2$

$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$(a-b)^2 \geq 0$

Për çdo $a, b \in \mathbb{R}^+$ vlen

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

me barayim nëse $a = b$. (***)

Përdëftim: Të fillojmë nga jobarazimi bazë:

p: $(a-b)^2 \geq 0$

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2 - 2ab \geq 0$

$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$

q: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$ $/\,^2$

$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$ $/\cdot 4$

$2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2 - 2ab \geq 0$

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$(a-b)^2 \geq 0$

Me këtë e treguam teoremën 3.1 në rastin $n = 2$. Ta shqyrtojmë rastin $n = 4$.

<u>Shembulli 3.1:</u> Për çdo $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, vlejnë jobarazimet:

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}},$$

Me barazim së paku në njërën prej tyre nëse dhe vetëm nëse $a = b = c = d$.

Së pari do ta tregojmë jobarazimin e majtë:

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \overset{(**)}{\leq} \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \overset{(**)}{\leq} \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

Si është theksuar, në dy raste është shfrytëzuar (**).Lehtë përfundohet se në dy $\overset{(**)}{\leq}$ njëkohësisht vlen barazimi nëse dhe vetëm nëse $a = b = c = d$.

Në mënyrë analoge tregohet edhe jobarazimi i djathtë, me atë që në vend të (**) në dy hera shfrytëzohet (***):

$$\frac{a+b+c+d}{4} \leq \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \overset{(***)}{\leq} \frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+d^2}{2}}}{2} \overset{(***)}{\leq} \sqrt{\frac{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{c^2+d^2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}.$$

Me këtë e treguam teoremën 3.1 në rastin $n = 4$. Të përgatitur jemi të tregojmë teoremën në rast se $n = 3$.

<u>Shembulli 3.2:</u> Për çdo $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ vlejnë jobarazimet:

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}},$$

Me barazimin së paku në njërën prej tyre nëse dhe vetëm nëse $a = b = c$.

Që të tregojmë jobarazimin në të majtë, shfrytëzojmë se

$$\mathrm{GM}\big(a, b, c, \mathrm{GM}(a, b, c)\big) = \mathrm{GM}(a, b, c).$$

Kështu, $\sqrt[3]{abc} = \mathrm{GM}\big(a, b, c, \sqrt[3]{abc}\big) \leq \mathrm{AM}\big(a, b, c, \sqrt[3]{abc}\big) = \sqrt[3]{abc} + \frac{3}{4}\Big(\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc}\Big)$.

Që të tregojmë jobarazimin në të djathtë, shfrytëzojmë se

$$\mathrm{QM}\big(a,b,c,\mathrm{QM}(a,b,c)\big)=\mathrm{QM}(a,b,c).$$

Kështu, $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}=\mathrm{QM}\left(a,b,c,\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)\geq \mathrm{AM}\left(a,b,c,\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)=$

$$=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}-\frac{3}{4}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}-\frac{a+b+c}{3}\right).$$

Përdëftimi i teoremës 3.1: Për kompletim të përdëftimit ngel të vërejmë katër fakte:

Fakti 1. Jobarazimin $\mathrm{HM}(a_1,a_2,\dots,a_n)\leq \mathrm{GM}(a_1,a_2,\dots,a_n)$ është ekuivalent me jobarazimin

$\mathrm{GM}\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\dots,\frac{1}{a_n}\right)\leq \mathrm{AM}\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\dots,\frac{1}{a_n}\right)$, dhe sipas kësaj (*) shndërrohet në

$$\mathrm{GM}(a_1,a_2,\dots,a_n)\leq \mathrm{AM}(a_1,a_2,\dots,a_n)\leq \mathrm{QM}(a_1,a_2,\dots,a_n) \qquad (****)$$

Fakti 2. Shembulli 3.1 thjeshtë përgjithësohet për 8, për 16, e kështu me radhë, për 2^k numra real pozitiv $a_1,a_2,\dots,a_{2^k}$. Saktë do të shndërrohet në atë se:

$$\mathrm{GM}(a_1,a_2,\dots,a_{2^k})=\mathrm{GM}\left(\mathrm{GM}(a_1,\dots,a_{2^{k-1}}),\mathrm{GM}(a_{2^{k-1}+1},\dots,a_{2^k})\right),$$

$$\mathrm{AM}(a_1,a_2,\dots,a_{2^k})=\mathrm{AM}\left(\mathrm{AM}(a_1,\dots,a_{2^{k-1}}),\mathrm{AM}(a_{2^{k-1}+1},\dots,a_{2^k})\right),\text{ dhe}$$

$$\mathrm{QM}(a_1,a_2,\dots,a_{2^k})=\mathrm{QM}\left(\mathrm{QM}(a_1,\dots,a_{2^{k-1}}),\mathrm{QM}(a_{2^{k-1}+1},\dots,a_{2^k})\right).$$

Me fjalë tjera (****) vlen nëse n është fuqi e numrit 2; gjatë kësaj, në së paku një nga dy jobarazimet arrihet barazim nëse dhe vetëm nëse $a_1=a_2=\dots=a_n$.

Fakti 3. Për çdo $n\in\mathbb{N}$ ekziston fuqi e numrit 2 gjegjësisht ndonjë 2^k ashtu që $n\leq 2^k$. (Për shembull, me induksion matematikorë thjeshtë tregohet se $n\leq 2^{n-1}$.)

Fakti 4. Me ndihmën e fakteve 2 dhe 3, Shembulli 3.2 përgjithësohet për çdo numër natyrorë n. Gjegjësisht, le të jetë $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$dhe k është i tillë që$n \leq 2^k$. Atëherë jobarazimi

$\mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n) \leq \mathrm{AM}(a_1, \dots, a_n)$ rrjedh nga:

$$\mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{GM}\big(a_1, \dots, a_n, \underbrace{\mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n), \mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n), \dots, \mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n)}_{2^k - n}\big)$$
$$\leq \mathrm{AM}\big(a_1, \dots, a_n, \underbrace{\mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n), \mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n), \dots, \mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n)}_{2^k - n}\big)$$
$$= \mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n) + \frac{n}{2^k}\big(\mathrm{AM}(a_1, \dots, a_n) - \mathrm{GM}(a_1, \dots, a_n)\big).$$

Në mënyrë analoge, jobarazimi $\mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n) \geq \mathrm{AM}(a_1, \dots, a_n)$ rrjedh nga

$$\mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{QM}\big(a_1, \dots, a_n, \underbrace{\mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n), \mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n), \dots, \mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n)}_{2^k - n}\big)$$
$$\geq \mathrm{AM}\big(a_1, \dots, a_n, \underbrace{\mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n), \mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n), \dots, \mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n)}_{2^k - n}\big)$$
$$= \mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n) + \frac{n}{2^k}\big(\mathrm{QM}(a_1, \dots, a_n) - \mathrm{AM}(a_1, \dots, a_n)\big).$$

Disa zbatime të teoremës 3.1 do të ilustrojmë nëpërmjet shembujve vijuese.

<u>Shembulli 3.3:</u> Nëse $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ dhe $b_1, b_2, \dots, b_n$ quhet permutacion. Atëherë

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq n,$$

Me barazimin nëse dhe vetëm nëse $b_1 = a_1,\ b_2 = a_2, \dots,\ b_n = a_n$.

Mjafton të shfrytëzojmë se $\mathrm{GM}\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}\right) = 1$ dhe jobarazimin $\mathrm{AM} \geq \mathrm{GM}$.

<u>Shembulli 3.4:</u> Për çdo $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ vlen jobarazimi

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz,$$

Me barazimin nëse dhe vetëm nëse $x = y = z$.

Në tre raste e shfrytëzojmë (**): njëherë për x dhe y, njëherë për y dhe z, dhe njëherë për z dhe x. Kështu të fituara tre barazimet i shumëzojmë.

Shembulli 3.5: Për çdo $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ vlen jobarazimi

$$xy + yz + zx \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}\,,$$

Me barazimin nëse dhe vetëm nëse $x = y = z$.

Në tre raste e shfrytëzojmë (**): njëherë për xy dhe zx, njëherë për xy dhe yz, dhe njëherë për yz dhe zx. Kështu tre jobarazimet të fituar i mbledhim.

Shembulli 3.6: Për çdo $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ vlen jobarazimi

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z,$$

Me barazimin nëse dhe vetëm nëse $x = y = z$.

Në tre raste e shfrytëzojmë (**): njëherë për $\frac{xy}{z}$ dhe $\frac{zx}{y}$, njëherë për $\frac{xy}{z}$ dhe $\frac{yz}{x}$, dhe njëherë për $\frac{yz}{x}$ dhe $\frac{zx}{y}$. Kështu tre jobarazimet të fituar i mbledhim.

Shembulli 3.7: Për çdo $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, vlen jobarazimi

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq xy + yz + zx,$$

Me barazimin nëse dhe vetëm nëse $x = y = z$.

Nga AM $\geq$ GM rrjedh se $\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + yz \geq 3xy$, $\frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} + zx \geq 3yz$, $\frac{z^3}{x} + \frac{x^3}{y} + xy \geq 3zx$. Me mbledhje të këtyre tre jobarazimeve e fitojmë jobarazimin nga shembulli.

Shembulli 3.8: Për çdo $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ vlen jobarazimi $x^4 + y^4 + z^2 \geq \sqrt{8}xyz$.

Rrjedh nga AM $\geq$ GM për numrat x^4, y^4, $\frac{z^2}{2}$, $\frac{z^2}{2}$.

Pyetje: Kur në shembullin e mëparshëm arrihet barazimi?

Përgjigje: Nëse dhe vetëm nëse $x = y = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{2}}$.

Shembulli 3.9: Le të jetë për $x, y \in \mathbb{R}^+$ vlen $x + y = 3$. Atëherë është plotësuar jobarazimi

$$xy^2 \leq 4,$$

Me barazimin nëse dhe vetëm nëse $x = 1, y = 2$.

Gjegjësisht, $3 = x + y = x + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \geq 3\sqrt[3]{x\frac{y}{2}\frac{y}{2}}$ tërheqë se $xy^2 \leq 4$ me barazimin nëse dhe vetëm nëse $x = \frac{y}{2} = 1$.

Shembulli 3.10: Nëse për $x, y \in \mathbb{R}^+$vlen $x + y = 5$. Atëherë është plotësuar jobarazimi

$$x^2y^3 \leq 108,$$

Me barazimin nëse dhe vetëm nëse $x = 2, y = 3$.

Në mënyrë të analoge në shembullin e mëparshëm shfrytëzo se $x + y = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{y}{3} +$ $+ \frac{y}{3}$.

TEMA 6

Kongruencat në $\mathbb{Z}$

Kongruencat paraqesin vegël e fuqishme që shfrytëzohet në teorinë e numrave dhe merret me mbetjet gjatë pjesëtimit. Me këtë teknikë mundet të përdëftohen indicet për pjesëtueshmëri, si dhe pjesëtueshmëri të shprehjeve me fuqi e polinome. Në tekst janë dhënë disa zbatime të kongruencave.

$$a \equiv b(mod\ m) \Leftrightarrow m|a-b$$

$$2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 0(mod7)$$

$$19|a \ \Leftrightarrow 19|(\overline{a_1a_0} + 5 \cdot \overline{a_3a_2} + 5^2 \cdot \overline{a_5a_4} + 5^3 \cdot \overline{a_7a_6} + \cdots)$$

Definicioni 1: Le të jetë $m \in \mathbb{N}$ dhe $a, b \in \mathbb{Z}$. Nëse $m|a-b$, atëherë themi se numri a është *Kongruent me numrin* b sipas modulit m dhe shënojmë

$$a \equiv b (\text{mod } m).$$

Nëse $m \nmid a-b$, atëherë themi se numri a nuk është kongruent me numrin b sipas modulit m.

Shembulli 1: Nëse $a = 17, b = 11$ dhe $m = 3$. Pasi që $3|(17-11)$, $17 \equiv 11 (\text{mod } 3)$.

Teorema 1: Kongruenca $a \equiv b (\text{mod } m)$ vlen nëse dhe vetëm nëse gjatë pjesëtimit me m numrat a dhe b japin mbetje të njëjtë.

Përdëftim: Duke pasur parasysh se pohimi i teoremës është dhënë në formë të ekuivalencës, veçmas do t'i përdëftojmë dy implikacionet.

$\boxed{\Rightarrow}$ **Duke supozuar se** $a \equiv b (\text{mod } m)$, nëse $a = mp + r$ dhe $b = mq + s$ janë pjesëtimet me mbetjet e a dhe b me m. Me fjalë tjera, p, q, r dhe s janë numra jonegativ të plotë dhe $r, s < m$. Atëherë,

$$m|(mp + r) - (mq + s) \text{ т.е. } m|m(p-q) + (r-s).$$

D.m.th, $m|r-s$. Nga ana tjetër, $-m < r - s < m$ (pasi që $0 \leq r, s < m$), që tërheqë se $r - s = 0$, gjegjësisht $r = s$.

$\boxed{\Leftarrow}$ **Le të jetë gjatë pjesëtimit me** $m$numrat a dhe b japin mbetje të njëjtë: për shembull, le të jetë $a = mp + r$ dhe $b = mq + r$. Atëherë,

$$a - b = (mp + r) - (mq + r) = m(p - q).$$

D.m.th, $m|a-b$, gjegjësisht $a \equiv b$ (mod m).

Shembulli 2: Nga $33 = 4 \cdot 8 + 1$ dhe $25 = 3 \cdot 8 + 1$ kemi se $33 \equiv 25 (\text{mod } 8)$.

Shembulli 3: $21 \equiv 49 (\text{mod } 4)$, sepse $21 = 4 \cdot 5 + 1$ dhe $49 = 4 \cdot 12 + 1$.

$29 \equiv -3 (\text{mod } 4)$, sepse $29 = 4 \cdot 7 + 1$ dhe $-3 = 4 \cdot (-1) + 1$.

$37 \equiv 9 (\text{mod} 7)$, sepse $37 = 7 \cdot 5 + 2$ dhe $9 = 7 \cdot 1 + 2$.

Teorema 2: $a \equiv b(\text{mod } m)$ nëse dhe vetëm ekziston $k \in \mathbb{Z}$ ashtu që $a = b + km$.

Përdëftim: $\boxed{\Rightarrow}$ Le të jetë $a \equiv b(\text{mod } m)$, gjegjësisht $m|a - b$. Atëherë ekziston $k \in \mathbb{Z}$ ashtu që $a - b = km$, gjegjësisht $a = b + km$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Nëse $a = b + km$. Nga $a - b = km$ rrjedh se $m|a - b$, gjegjësisht $a \equiv b(\text{mod } m)$.

Pasoja: Nëse $a = km + r$ dhe $0 \leq r < m$, atëherë $a \equiv r(\text{mod } m)$.

Përdëftim: Barazimi $a - r = km$ tërheqë se $m|a - r$ gjegjësisht $a \equiv r(\text{mod } m)$.

Përfundimi: $a \equiv 0(\text{mod } m)$ nëse dhe vetëm nëse $m|a$.

Teorema vijuese tregon se secila kongruencë paraqet relacion të ekuivalencës në bashkësinë e numrave të plotë. Me fjalë tjera, secila kongruencë është refleksive, operacion simetrik dhe tranzitiv.

Teorema 3: Për të gjithë numrat e plotë a, b dhe c dhe relacionin $\equiv (\text{mod } m)$ vlen:

(refleksiviteti) $\quad a \equiv a(\text{mod } m)$,

(simetria) $\quad a \equiv b(\text{mod } m) \Rightarrow b \equiv a(\text{mod } m)$,

(transitiviteti) $\quad a \equiv b(\text{mod } m)$ dhe $b \equiv c(\text{mod } m) \Rightarrow a \equiv c(\text{mod } m)$.

Relacioni $\equiv (\text{mod } m)$ është ekuivalencë në bashkësinë $\mathbb{Z}$.

Përdëftim: Nga $a - a = 0$ rrjedh $m|a - a$, gjegjësisht $a \equiv a(\text{mod } m)$, me çka e treguam refleksivitetin. Le të jetë $a \equiv b(\text{mod } m)$, gjegjësisht $m|a - b$. Pasi që $b - a = -(a - b)$, rrjedh se $m|b - a$, gjegjësisht $b \equiv a(\text{mod } m)$, me çka e treguam simetrinë. Ngel ta tregojmë tranzitivitetin. Le të jetë $a \equiv b(\text{mod } m)$ dhe $b \equiv c(\text{mod } m)$, gjegjësisht $m|a - b$ dhe $m|b - c$. Atëherë $m|a - b + b - c$ gjegjësisht, $m|a - c$. D.m.th $a \equiv c$ $(\text{mod } m)$.

Teorema në vijim tregon se kongruencat nuk janë ekuivalenca „të zakonshme“ në bashkësinë e numrave të plotë, por janë ekuivalenca të pëlqyeshme me operacionet mbledhje dhe shumëzim.

Teorema 4: Nëse $a \equiv b(\text{mod } m)$ dhe $c \equiv d(\text{mod } m)$, atëherë:

$a + c \equiv (b + d)(\text{mod } m)$,

$a - c \equiv (b - d)(\text{mod } m)$,

$ac \equiv bd(\text{mod } m)$.

Përdëftim 1: Nëse $a \equiv b(\text{mod } m)$ dhe $c \equiv d(\text{mod } m)$, gjegjësisht $m|a-b$ dhe $m|c-d$. Duke I mbledhur dy pjestueshmëritë e fundit, fitojmë se $m|a-b+c-d$, gjegjësisht $m|a+c-(b+d)$. Me këtë treguam se $a+c \equiv (b+d)(\text{mod } m)$.

Ngjashëm, duke i zbritur pjestueshmëritë njëra nga tjetra $m|a-b$ dhe $m|c-d$, fitojmë se $m|(a-c)-(b-d)$, gjegjësisht $a-c \equiv (b-d)(\text{mod } m)$.

Nga $m|a-b$ dhe $m|c-d$ rrjedh edhe pjesëtueshmëria $m|(a-b)\cdot c+(c-d)\cdot b$, që me rregullim jep $m|ac-bc+bc-bd$, gjegjësisht $m|ac-bd$. Kështu treguam se $ac \equiv bd(\text{mod } m)$.

Përdëftim 2: Pasi që $a \equiv b(\text{mod } m)$, kemi se $a = mp_1 + r_1$ dhe $b = mq_1 + r_1$. Ngjashëm nga $c \equiv d(\text{mod } m)$ rrjedh se $c = mp_2 + r_2$ dhe $d = mq_2 + r_2$. Nga këtu

$$a + c = mp_1 + r_1 + mp_2 + r_2 = m(p_1 + p_2) + r_1 + r_2 = mp_3 + r_3,$$

$$b + d = mq_1 + r_1 + mq_2 + r_2 = m(q_1 + q_2) + r_1 + r_2 = mq_3 + r_3.$$

Me këtë treguam se $a+c \equiv (b+d)(\text{mod } m)$. Ngjashëm përdëftohen edhe dy pohimet tjerë.

Pasoja 1: Nëse $a \equiv b(\text{mod } m)$, atëherë për çdo $c \in \mathbb{Z}$ janë plotësuar kongruencat:

$$a + c \equiv (b + c)(\text{mod } m),$$

$$a - c \equiv (b - c)(\text{mod } m),$$

$$ac \equiv bc(\text{mod } m).$$

Përdëftim: Duke shfrytëzuar se $c \equiv c(\text{mod } m)$, pasoja rrjedh nga teorema e mëparshme.

Pasoja 2: Nëse $a \equiv b(\text{mod } m)$ dhe $n \in \mathbb{N}$, atëherë $a^n \equiv b^n(\text{mod } m)$.

Skica e përdëftimit: Nga $a \equiv b(\text{mod } m)$ dhe $a \equiv b(\text{mod } m)$, duke e shfrytëzuar teoremën 4, përfundojmë se $a^2 \equiv b^2(\text{mod } m)$. Ngjajshëm nga $a \equiv b(\text{mod } m)$ dhe $a^2 \equiv b^2(\text{mod } m)$, rrjedh se $a^3 \equiv b^3(\text{mod } m)$ e kështu me radhë., gjegjësisht

$$\begin{gathered} a^2 \equiv b^2(\text{mod } m), \\ a^3 \equiv b^2(\text{mod } m), \\ \vdots \\ a^n \equiv b^n(\text{mod } m). \end{gathered}$$

Pohimi $a^n \equiv b^n(\text{mod } m)$ është fituar me induksion empirik, e përdëftohet me principin e induksionit matematikorë.

Pasoja 3: Nëse $a \equiv b(\text{mod } m)$ dhe $k, s \in \mathbb{Z}$, atëherë:

$$a \equiv (b + km)(\text{mod } m)$$

$$a + sm \equiv b(\text{mod } m)$$

$$a + sm \equiv (b + km)(\text{mod } m).$$

Përdëftim: Nëse $a \equiv b(\text{mod } m)$, gjegjësisht $m|a - b$. Atëherë $m|a - b - km$, gjegjësisht $m|a - (b + km)$.
Me këtë treguam se $a \equiv (b + km)(\text{mod } m)$. Ngjashëm përdëftohen edhe dy pohimet vijuese.

ZBATIMI I KONGRUENCAVE NË $\mathbb{Z}$

A) PËRCAKTIMI I MBETJES GJATË PJESTIMIT ME NDONJË NUMËR

Shembulli 1: Përcakto mbetjen gjatë pjesëtimit të numrit 6^{1990}me 7.

Mënyra e parë:

$6 \equiv 6(\text{mod } 7)$

$6^2 \equiv 36(\text{mod } 7)$

$6^2 \equiv 1(\text{mod } 7)/\ ^{995}$ $\qquad (1990 = 2 \cdot 995)$

$6^{1990} \equiv 1(\text{mod } 7)$

D.m.th, mbetja gjatë pjesëtimit të numrit 6^{1990} me 7 është 1.

Mënyra e dytë:

$6 \equiv 6(\text{mod } 7)$

$6 \equiv -1(\text{mod } 7)/\ ^{1990}$

$6^{1990} \equiv 1(\text{mod } 7)$

D.m.th, mbetja gjatë pjesëtimit të numrit 6^{1990} me 7 është 1.

Mënyra e tretë:

$6 \equiv 6(\text{mod } 7)$

$6 \equiv -1(\text{mod } 7)/\ ^{2}$

$6^2 \equiv 1(\text{mod } 7)/\ ^{995}$ $\qquad (1990 = 2 \cdot 995)$

$6^{1990} \equiv 1(\text{mod } 7)$

D.m.th, mbetja gjatë pjesëtimit të numrit6^{1990} me 7 është 1.

Shembulli 2: Cakto mbetjen gjatë pjesëtimit të numrit 3^{555} me 10.

$3 \equiv 3(\text{mod } 10)$

$3^2 \equiv 9(\text{mod } 10)$

$3^2 \equiv -1(\text{mod } 10)/\ ^{277}$ $\qquad (354 = 2 \cdot 277)$

$3^{554} \equiv -1(\text{mod} 10)$

Me shumëzim të kongruencave $3 \equiv 3(\text{mod}10)$ dhe $3^{554} \equiv -1(\text{mod}10)$ fitohet:
$3^{555} \equiv -3(\text{mod}10)$, gjegjësisht $3^{555} \equiv\ 7(\text{mod}10)$.
D.m.th, mbetja gjatë pjesëtimit të numrit 3^{555} me 10 është 7.

Shembulli 3: Cakto mbetjen gjatë pjesëtimit të numrit $222^{555}+555^{222}$ me 7.

$222 \equiv 5(\bmod 7)/\ ^{2}$ $\quad (222 = 31 \cdot 7 + 5)$

$222^2 \equiv 4(\bmod 7)$

$222^3 \equiv -1(\bmod 7)\ /\ ^{185}$ $\quad (555 = 3 \cdot 185)$

$222^{555} \equiv -1(\bmod 7)$

$555 \equiv 2(\bmod 7)/\ ^{2}$ $\quad (555 = 79 \cdot 7 + 2)$

$555^2 \equiv 4(\bmod 7)$

$555^3 \equiv 1(\bmod 7)\ /\ ^{74} 222 = 3 \cdot 74$

$555^{222} \equiv 1(\bmod 7)$

Me mbledhje të kongruencave $222^{555} \equiv -1(\bmod 7)$ dhe $555^{222} \equiv 1(\bmod 7)$ fitohet $222^{555}+555^{222} \equiv (-1+1)(\bmod 7)$, gjegjësisht $222^{555}+555^{222} \equiv 0(\bmod 7)$. D.m.th, mbetja gjatë pjesëtimit të numrit $222^{555}+555^{222}$ me 7 është 0.

Shembulli 4: Cakto mbetjen gjatë pjesëtimit të numrit $(5^{100}+55)^{100}$ me 24.

$5 \equiv 5(\bmod 24)$

$5^2 \equiv 1(\bmod 24)/\ ^{50}$

$5^{100} \equiv 1(\bmod 24)$

$5^{100}+55 \equiv 56(\bmod 24)$

$5^{100}+55 \equiv 8(\bmod 24)/\ ^{2}$

$(5^{100}+55)^2 \equiv 16(\bmod 24)$

$(5^{100}+55)^3 \equiv 8(\bmod 24)$

$(5^{100}+55)^4 \equiv 16(\bmod 24)$

Përfundojmë se shprehja $5^{100}+55$ çdoherë kur është fuqizuar në tregues të fuqisë numër çift është kongruent me 16, e çdoherë kur është fuqizuar në tregues të fuqisë numër tek është kongruent me 8. D.m.th, $(5^{100}+55)^{100} \equiv 16(\bmod\ 24)$, D.m.th, mbetja gjatë pjesëtimit të $(5^{100}+55)^{100}$ me 24 është 16.

Detyra:

Cakto mbetjen gjatë pjesëtimit të:

1) 8^{42} me 5

2) $2222^{5555} + 5555^{2222}$ me 7

3) 14^{256} me 17

Zgjidhje:

1) $8 \equiv 3(\text{mod } 5)$

$8^2 \equiv 4(\text{mod } 5)$

$8^3 \equiv 2(\text{mod } 5)$

$8^4 \equiv 1(\text{mod } 5)/ \ ^{10}$

$8^{40} \equiv 1(\text{mod}5)$

Me shumzim të kongruencave $8^{40} \equiv 1(\text{mod } 5)$ dhe $8^2 \equiv 4(\text{mod } 5)$ fitohet:

$8^{42} \equiv 4(\text{mod } 5)$.

D.m.th, mbetja gjatë pjesëtimit të numrit 8^{42} me 5 është 4.

2) $2222 \equiv 3(\text{mod } 7)$ $\quad (2222 = 317 \cdot 7 + 3)$

$2222^2 \equiv 2(\text{mod } 7)$

$2222^3 \equiv -1(\text{mod } 7) \ / \ ^{2}$

$2222^6 \equiv 1(\text{mod } 7)/ \ ^{925}$ $\quad (5555 = 6 \cdot 925 + 5)$

$2222^{5550} \equiv 1(\text{mod } 7)$

Me shumëzim të kongruencave $2222^{5550} \equiv 1(\text{mod } 7)$ dhe $2222^5 \equiv -2(\text{mod } 7)$ fitohet:

$2222^{5555} \equiv -2(\text{mod } 7)$

$5555 \equiv 4(\text{mod } 7)$ $\quad (5555 = 793 \cdot 7 + 4)$

$5555^2 \equiv 2(\text{mod } 7)$

$5555^3 \equiv 1(\text{mod } 7) \ / \ ^{740}$ $\quad (2222 = 3 \cdot 740 + 2)$

$5555^{2220} \equiv 1(\text{mod } 7)$

Me shumzim të kongruencave $5555^{2220} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7)$ dhe $5555^{2} \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7)$ fitohet: $5555^{2222} \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7)$.

Tani, Me mbledhje të kongruencave $2222^{5555} \equiv -2 (\mathrm{mod} 7)$ dhe $5555^{2222} \equiv 2 (\mathrm{mod} 7)$ fitohet $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv (-2 + 2) (\mathrm{mod}\ \ 7)$, gjegjësisht $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7)$.

D.m.th, mbetja gjatë pjesëtimit të numrit $2222^{5555} + 5555^{2222}$ me 7 është 0.

3) $14 \equiv 14 (\mathrm{mod}\ 17)$
$14^2 \equiv 9 (\mathrm{mod}\ 17)$
$14^3 \equiv 7 (\mathrm{mod}\ 17)$
$14^4 \equiv 13 (\mathrm{mod}\ 17)$
$14^5 \equiv 12 (\mathrm{mod}\ 17)$
$14^6 \equiv 15 (\mathrm{mod}\ 17)$
$14^7 \equiv 6 (\mathrm{mod}\ 17)$
$14^8 \equiv 16 (\mathrm{mod}\ 17)$
$14^8 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 17) /\ ^2$
$14^{16} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 17) /\ ^{16}$
$14^{256} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 17)$

D.m.th, mbetja gjatë pjesëtimit të numrit 14^{256} me 17 është 1.

B) PËRCAKTIMI I SHIFRËS NË TË CILËN PËRFUNDON FUQIA E DHËNË

Pasi që $a = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2 a_1 a_0} =$

$$= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 =$$

$$= 10A + a_0,$$

D.m.th se numri a përfundon në shifrën e cila është mbetje gjatë pjesëtimit të a me 10.

Shembulli 1: Cakto në cilën shifër përfundon fuqia 6^{811}.

$6 \equiv 6(\text{mod } 10)$

$6^2 \equiv 6(\text{mod } 10)$

$6^3 \equiv 1(\text{mod } 10)$

$6^{811} \equiv 6(\text{mod} 7)$

D.m.th, mbetja gjatë pjesëtimit të numrit 6^{811} me numrin 10 është 6. Me fjalë tjera, fuqia 6^{811} përfundon në shifrën 6.

Detyra:

Cakto në cilën shifër përfundon fuqia:

1) 2^{1000}

2) 3^{9999}

Zgjidhje:

1) $2 \equiv 2(\text{mod } 10)$

$2^2 \equiv 4(\text{mod } 10)$

$2^3 \equiv 8(\text{mod } 10)$

$2^4 \equiv 6(\text{mod } 10)$

$2^5 \equiv 2(\text{mod } 10)$

$2^6 \equiv 4(\text{mod } 10)$

$2^7 \equiv 8(\text{mod } 10)$

$2^8 \equiv 6(\text{mod } 10)$

$2^9 \equiv 2(\text{mod } 10)$

Prej këtu përfundojmë se:

$2^{4k-3} \equiv 2(\text{mod } 10)$

$2^{4k-2} \equiv 4(\text{mod } 10)$

$2^{4k-1} \equiv 8(\text{mod } 10)$

$2^{4k} \equiv 6(\text{mod}10)$

Pasi që $1000 : 4 = 250$, gjegjësisht $1000 = 4k$ për $k = 250$, rrjedh se $2^{1000} \equiv 6(\text{mod } 10)$.
D.m.th, fuqia 2^{1000} përfundon në shifrën 6.

2) $3 \equiv 3(\text{mod } 10)$

$3^2 \equiv 9(\text{mod } 10)$

$3^3 \equiv 7(\text{mod } 10)$

$3^4 \equiv 1(\text{mod } 10)$ $\qquad (9999 = 4 \cdot 2499 + 3)$

$3^{9996} \equiv 1(\text{mod}10)$

Me shumëzim të kongruencave $3^{9996} \equiv 1(\text{mod}10)$ dhe $3^3 \equiv 7(\text{mod}10)$ fitohet:

$3^{9999} \equiv 7(\text{mod}10)$.

D.m.th, fuqia 3^{9999} përfundon në shifrën 7.

C) PROVA E PJESTUESHMËRISË TË SHPREHJES NUMERIKE ME NUMËR

Shembulli 1: Provo shprehja $7^{100} + 11^{100} + 17$ është e pjesëtueshme me 13.

$7 \equiv 7(\text{mod } 13)$

$7^2 \equiv 10(\text{mod } 13)$

$7^3 \equiv 5(\text{mod } 13)$

$7^4 \equiv 9(\text{mod } 13)$

$7^5 \equiv 11(\text{mod } 13)$

$7^6 \equiv -1(\text{mod } 13)/\ ^{16}$ $\qquad\qquad (100 = 6 \cdot 16 + 4)$

$7^{96} \equiv 1(\text{mod}13)$

Me shumëzim të kongruencave $7^{96} \equiv 1(\text{mod } 13)$ dhe $7^4 \equiv 9(\text{mod } 13)$ fitohet:
$7^{100} \equiv 9(\text{mod } 13)$

$11 \equiv 11(\text{mod } 13)$

$11^2 \equiv 4(\text{mod } 13)$

$11^3 \equiv 5(\text{mod } 13)$

$11^4 \equiv 3(\text{mod } 13)$

$11^5 \equiv 7(\text{mod } 13)$

$11^6 \equiv -1(\text{mod } 13)/\ ^{16}$ $\qquad\qquad (100 = 6 \cdot 16 + 4)$

$11^{96} \equiv 1(\text{mod}13)$

Me shumëzim të $11^{96} \equiv 1(\text{mod } 13)$ dhe $11^4 \equiv 3(\text{mod } 13)$ fitohet:
$11^{100} \equiv 3(\text{mod}13)$.

Për shprehjen e dhënë fitojmë: $7^{100} + 11^{100} + 17 \equiv (9 + 3 + 17)(\text{mod } 13)$

$$\equiv 29(\text{mod } 13)$$

$$\equiv 3(\text{mod } 13).$$

D.m.th, shprehja $7^{100} + 11^{100} + 17$ nuk është e pjesëtueshme me numrin 13 (jep mbetje 3).

Detyra:

Provo shprehjen:

1) $13^{101} - 13^{95}$ a është e pjesëtueshme me 7.

2) $3^{103} + 5^{105}$ a është e pjesëtueshme me 7.

Zgjidhje:

1) $13 \equiv 6(\text{mod}7)$

$13^2 \equiv 1(\text{mod}7) \ /\ ^{50}$

$13^{100} \equiv 1(\text{mod } 7)$

$13^{101} \equiv 6(\text{mod } 7)$

$13 \equiv 6(\text{mod } 7)$

$13^2 \equiv 1(\text{mod } 7) \ /\ ^{47}$

$13^{94} \equiv 1(\text{mod}7)$

$13^{95} \equiv 6(\text{mod}7)$

Fitojmë $13^{101} - 13^{95} \equiv (6-6)(\text{mod}7) \equiv 0(\text{mod } 7)$. D.m.th. ndryshimi $13^{101} - 13^{95}$ është i pjesëtueshëm me numrin 7.

2) $3 \equiv 3(\text{mod}7)$

$3^2 \equiv 2(\text{mod}7)$

$3^3 \equiv -1(\text{mod } 7)$

$3^6 \equiv 1(\text{mod } 7)$

$3^{102} \equiv 1(\text{mod } 7)$

$3^{103} \equiv 3(\text{mod } 7)$

$5 \equiv 5(\text{mod } 7)$

$5^2 \equiv 4(\text{mod } 7)$

$5^3 \equiv -1(\text{mod } 7)$

$5^6 \equiv 1(\text{mod } 7)$

$5^{102} \equiv 1(\text{mod}7)$

$5^{105} \equiv -1(\text{mod}7)$

Fitojmë se $3^{103} + 5^{105} \equiv (3-1)(\text{mod } 7) \equiv 2(\text{mod } 7)$. D.m.th. shuma $3^{103} + 5^{105}$ nuk është e pjesëtueshme me numrin 7 (jep mbetje 2).

D) PËRDËFTIM I PJESTUESHMËRISË SË SHPREHJES NUMERIKE ME NUMËR

$n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n)$
$n - k \equiv -k (\mathrm{mod}\ n)$
$(n-k)^n \equiv (-k)^n (\mathrm{mod}\ n)$

Nëse n është tek, atëherë vlen:
$(n-k)^n + k^n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n)$

Shembulli 1: Përdëfto se shuma $1^{1991} + 2^{1991} + \cdots + 1991^{1991}$ është e pjesëtueshme me 1991.

Për $n = 1991$, kemi: $(1991 - k)^{1991} + k^{1991} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 1991)$.

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{- за } k = 0 & 1991^{1991} + 0^{1991} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 1991) \\
\text{- за } k = 1 & 1990^{1991} + 1^{1991} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 1991) \\
\text{- за } k = 2 & 1989^{1991} + 2^{1991} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 1991) \\
\text{- за } k = 3 & 1988^{1991} + 3^{1991} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 1991) \\
 & \vdots \\
\text{- за } k = 994 & 997^{1991} + 994^{1991} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 1991) \\
\text{- за } k = 995 & 996^{1991} + 995^{1991} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 1991)
\end{array}\right\} +$$

Prej këtu

$$1^{1991} + 2^{1991} + \cdots + 994^{1991} + 995^{1991} + 996^{1991} + 997^{1991} + \cdots + 1990^{1991} + 1991^{1991} \equiv 0 (\mathrm{mod} 1991).$$

D.m.th. shuma $1^{1991} + 2^{1991} + \cdots + 1991^{1991}$ është e pjesëtueshme me 1991.

Detyra:

Përdëfto se shprehja numerike:

1) $1^{2007} + 2^{2007} + \cdots + 2007^{2007}$ është e pjesëtueshme me 2007.

2) $19^{91} - 91^{19}$ është e pjesëtueshme me 18.

Zgjidhje:

1) Do të shfrytëzojmë se $(n-k)^n + k^n \equiv 0(\text{mod } n)$ për çdo numër n tek.

Për $n = 2007$ kemi: $(2007-k)^{2007} + k^{2007} \equiv 0(\text{mod } 2007)$.

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{- за } k=0 & 2007^{2007} + 0^{2007} \equiv 0(\text{mod } 2007) \\
\text{- за } k=1 & 2006^{2007} + 1^{2007} \equiv 0(\text{mod } 2007) \\
\text{- за } k=2 & 2005^{2007} + 2^{2007} \equiv 0(\text{mod } 2007) \\
\text{- за } k=3 & 2004^{2007} + 3^{2007} \equiv 0(\text{mod } 2007) \\
 & \vdots \\
\text{- за } k=1002 & 1005^{2007} + 1002^{2007} \equiv 0(\text{mod } 2007) \\
\text{- за } k=1003 & 1004^{2007} + 1003^{2007} \equiv 0(\text{mod } 2007)
\end{array}\right\} +$$

Prej këtu

$$1^{2007} + 2^{2007} + \cdots + 1002^{2007} + 1003^{2007} + 1004^{2007} + 1005^{2007} + \cdots + \\ + 2006^{2007} + 2007^{2007} \equiv 0(\text{mod } 2007).$$

D.m.th. shprehja numerike $1^{2007} + 2^{2007} + \cdots + 2007^{2007}$ është e pjesëtueshme me 2007.

2) $19 \equiv 1(\text{mod } 18)$

$19^2 \equiv 1(\text{mod } 18) \ /\ ^{45}$

$19^{90} \equiv 1(\text{mod } 18)$

Me shumëzim të kongruencave $19^{90} \equiv 1(\text{mod } 18)$ dhe $19 \equiv 1(\text{mod } 18)$ fitohet: $19^{91} \equiv 1(\text{mod}18)$

$91 \equiv 1(\text{mod } 18)$

$91^2 \equiv 1(\text{mod } 18) \ /\ ^{9}$

$91^{18} \equiv 1(\text{mod } 18)$

Me shumëzim të kongruencave $91^{18} \equiv 1(\text{mod } 18)$ dhe $91 \equiv 1(\text{mod } 18)$ fitohet: $91^{19} \equiv 1(\text{mod } 18)$.

Fitojmë se $19^{91} - 91^{19} \equiv (1-1)(\text{mod}18) \equiv 0(\text{mod}18)$. D.m.th, shprehja $19^{91} - 91^{19}$ është e pjesëtueshme me 18.

E) PËRDËFTIMI I PJESTUESHMËRISË ME NUMËR TË DHËNË NË SHPREHJE QË PËRMBANË VETËM FUQI

Shembulli 1: Përdëfto se shprehja $42^{n+3}+29^{n+1}+9^{2n+1}$ është e pjesëtueshme me 13.

$42 \equiv 3(\bmod 13)$

$42^2 \equiv 9(\bmod 13)$

$42^3 \equiv 1(\bmod 13)$

$42^n \equiv 3^n(\bmod 13)$

Me shumëzim të $42^n \equiv 3^n(\bmod 13)$ dhe $42^3 \equiv 1(\bmod 13)$ fitohet:

$42^{n+3} \equiv 3^n(\bmod 13)$ …………(1)

$29 \equiv 3(\bmod 13)$

$29^n \equiv 3^n(\bmod 13)$

Me shumëzim të $29^n \equiv 3^n(\bmod 13)$ dhe $29 \equiv 3(\bmod 13)$ fitohet:

$29^{n+1} \equiv 3\cdot 3^n(\bmod 13)$ …………(2)

$9 \equiv 9(\bmod 13)$

$9^2 \equiv 3(\bmod 13)$

$9^{2n} \equiv 3^n(\bmod 13)$

Me shumëzim të $9^{2n} \equiv 3^n(\bmod 13)$ dhe $9 \equiv 9(\bmod 13)$ fitohet:

$9^{2n+1} \equiv 9\cdot 3^n(\bmod 13)$ …………(3)

Nga (1), (2) dhe (3) fitohet $42^{n+3}+29^{n+1}+9^{2n+1} \equiv (3^n+3\cdot 3^n+9\cdot 3^n)(\bmod 13)$

$$\equiv 3^n(1+3+9)(\bmod 13)$$

$$\equiv 3^n\cdot 13(\bmod 13)$$

$$\equiv 0(\bmod 13)$$

D.m.th. shprehja $42^{n+3}+29^{n+1}+9^{2n+1}$ është e pjesëtueshme me numrin 13.

Shembulli 2: Përdëfto se shprehja $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ është e pjesëtueshme me 57.

$7 \equiv 7(\text{mod } 57)$

$7^2 \equiv 49(\text{mod } 57)$

$7^n \equiv 7^n(\text{mod } 57)$

Me shumëzim të $7^n \equiv 7^n(\text{mod } 57)$ dhe $7^2 \equiv 49(\text{mod } 57)$ fitohet:

$7^{n+2} \equiv 49 \cdot 7(\text{mod } 57)$ …………(1)

$8 \equiv 8(\text{mod } 57)$

$8^2 \equiv 7(\text{mod } 57)$

$8^{2n} \equiv 7^n(\text{mod } 57)$

Me shumëzim të $8^{2n} \equiv 7^n(\text{mod } 57)$ dhe $8 \equiv 8(\text{mod } 57))$ fitohet:

$8^{2n+1} \equiv 8 \cdot 7^n(\text{mod} 57)$ …………(2)

Nga (1) dhe (2) fitohet $7^{n+2} + 8^{2n+1} \equiv (49 \cdot 7^n + 8 \cdot 7^n)(\text{mod } 57)$

$$\begin{aligned} &\equiv 7^n(49 + 8)(\text{mod } 57) \\ &\equiv 3^n \cdot 57(\text{mod } 57) \\ &\equiv 0(\text{mod } 57) \end{aligned}$$

D.m.th. shprehja $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ është e pjesëtueshme me numrin 57.

Detyra:

Përdëfto se shprehja:

1) $47^{n+3} + 5^{n+2} + 69^n$ është e pjesëtueshme me 11.

2) $8^{n+2} + 9^{2n+1}$ është e pjesëtueshme me 73.

3) $37^{n+2} + 51^{n+1} + 30^n$ është e pjesëtueshme me 7.

Zgjidhje:

1) $47 \equiv 3(\text{mod } 11)$

$47^2 \equiv 9(\text{mod } 11)$

$47^3 \equiv 5(\text{mod } 11)$

$47^n \equiv 3^n(\text{mod } 11)$

Me shumëzim të $47^n \equiv 3^n (\text{mod } 11)$ dhe $47^3 \equiv 5(\text{mod } 11)$ fitohet:

$47^{n+3} \equiv 5 \cdot 3^n (\text{mod } 11)$ ....(1)

$5 \equiv 5(\text{mod } 11)$

$5^2 \equiv 3(\text{mod } 11)$

$5^{2n} \equiv 3^n (\text{mod } 11)$

Me shumëzim të $5^{2n} \equiv 3^n (\text{mod } 11)$ dhe $5 \equiv 5(\text{mod } 11)$ fitohet:

$5^{2n+1} \equiv 5 \cdot 3^n (\text{mod } 11)$ ....(2)

$69 \equiv 3(\text{mod } 11)$

$69^n \equiv 3^n (\text{mod } 11)$ ....(3)

Nga (1), (2) dhe (3) fitohet $47^{n+3} + 5^{n+2} + 69^n \equiv (5 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^n + 3^n)(\text{mod } 11)$

$\equiv 3^n(5 + 5 + 1)(\text{mod } 11)$

$\equiv 3^n \cdot 11(\text{mod } 11)$

$\equiv 0(\text{mod } 11)$

D.m.th. shprehja $47^{n+3} + 5^{n+2} + 69^n$ është e pjesëtueshme me numrin 11.

2) $8 \equiv 8(\text{mod } 73)$

$8^2 \equiv 64(\text{mod } 73)$

$8^n \equiv 8^n (\text{mod } 73)$

Me shumëzim të $8^n \equiv 8^n (\text{mod } 73)$ dhe $8^2 \equiv 64(\text{mod } 73)$ fitohet:

$8^{n+2} \equiv 64 \cdot 8^n (\text{mod } 73)$ ....(1)

$9 \equiv 9(\text{mod } 73)$
$9^2 \equiv 8(\text{mod } 73)$
$9^{2n} \equiv 8^n (\text{mod } 73)$

Me shumëzim të $9^{2n} \equiv 8^n (\text{mod } 73)$ dhe $9 \equiv 9(\text{mod } 73)$ fitohet:

$9^{2n+1} \equiv 9 \cdot 8^n (\text{mod} 73)$ ....(2)

Nga (1) dhe (2) fitohet $8^{n+2} + 9^{2n+1} \equiv (64 \cdot 8^n + 9 \cdot 8^n)(\mathrm{mod}\ 11)$

$$\equiv 8^n(64 + 9)(\mathrm{mod}\ 11)$$

$$\equiv 8^n \cdot 73(\mathrm{mod}\ 11)$$

$$\equiv 0(\mathrm{mod}\ 11)$$

D.m.th. shprehja $8^{n+2} + 9^{2n+1}$ është e pjesëtueshme me numrin 73.

3) $37 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7)$
   $37^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 7)$
   $37^n \equiv 2^n(\mathrm{mod}\ 7)$

Me shumëzim të $37^n \equiv 2^n(\mathrm{mod}\ 7)$ dhe $37^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 7)$ fitohet:

$37^{n+2} \equiv 4 \cdot 2^n(\mathrm{mod}\ 7)$ …………(1)

$51 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7)$

$51^n \equiv 2^n(\mathrm{mod}\ 7)$

Me shumëzim të $51^n \equiv 2^n(\mathrm{mod}\ 7)$ dhe $51 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7)$ fitohet:

$51^{n+1} \equiv 2 \cdot 2^n(\mathrm{mod}\ 7)$ …………(2)

$30 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7)$

$30 \equiv 2^n(\mathrm{mod}\ 7)$ …………(3)

Nga (1), (2) dhe (3) fitohet $37^{n+2} + 51^{n+1} + 30^n \equiv (4 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^n + 2^n)(\mathrm{mod}\ 11)$

$$\equiv 2^n(4 + 2 + 1)(\mathrm{mod}\ 11)$$

$$\equiv 3^n \cdot 7(\mathrm{mod}\ 11)$$

$$\equiv 0(\mathrm{mod}\ 11)$$

D.m.th. shprehja $37^{n+2} + 51^{n+1} + 30^n$ është e pjesëtueshme me numrin 7.

Ë) PËRDËFTIMI I PJESTUESHMËRISË SË SHPREHJES POLINOMIALE ME NUMËR

Shembulli 1: Përdëfto se $4|n^2(n^2+1)$.

Rasti 1: $n = 4k$

$n \equiv 0(\text{mod}4)$

$n^2 \equiv 0(\text{mod } 4)$

$n^2 - 1 \equiv -1(\text{mod } 4)$

$n^2(n^2-1) \equiv 0 \ (\text{mod } 4)$ …………(1).

Rasti 2: $n = 4k + 1$

$n \equiv 1(\text{mod}4)$

$n^2 \equiv 1(\text{mod } 4)$

$n^2 - 1 \equiv 0(\text{mod } 4)$

$n^2(n^2-1) \equiv 0(\text{mod } 4)$ …………(2).

Rasti 3: $n = 4k + 2$

$n \equiv 2(\text{mod}4)$

$n^2 \equiv 0(\text{mod } 4)$

$n^2 - 1 \equiv -1(\text{mod } 4)$

$n^2(n^2-1) \equiv 0 \ (\text{mod } 4)$ …………(3).

Rasti 4: $n = 4k + 3$

$n \equiv 3(\text{mod}4)$

$n^2 \equiv 1(\text{mod } 4)$

$n^2 - 1 \equiv 0(\text{mod } 4)$

$n^2(n^2-1) \equiv 0(\text{mod } 4)$ …………(4).

Nga (1), (2), (3) dhe (4) rrjedh se $4|n^2(n^2+1)$.

Shembulli 2: Përdëfto se $30|n^5 - n$.

Mënyra e parë: $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1) =$

$$= n(n - 1)(n + 1)(n^2 - 4 + 5) =$$

$$= n(n - 1)(n + 1)(n^2 - 4) + 5n(n - 1)(n + 1) =$$

$$= n(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2) + 5n(n - 1)(n + 1) =$$

$= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5(n - 1)n(n + 1)$.

Pasi që, prodhimi i pesë numrave natyrorë të njëpasnjëshëm është i pjesëtueshëm me 2, 3 dhe 5, e prodhimi i tre numrave natyrorë të njëpasnjëshëm është i pjesëtueshëm me 6, rrjedh se:

$n^5 - n = 30 \cdot A + 5 \cdot 6 \cdot B = 30A + 30B = 30(A + B) = 30C$.

D.m.th, $30|n^5 - n$.

Mënyra e dytë: Do të tregojmë pjesëtueshmëri me 2, 3 dhe 5.

Pjesëtueshmëri me 2.

Rasti 1: $n = 2k$

$n \equiv 0(\text{mod } 2)$

$n^2 \equiv 0(\text{mod } 2)$

$n^5 \equiv 0(\text{mod } 2)$

$n^5 - n \equiv 0 \ (\text{mod } 2)$ …………(1).

Rasti 2: $n = 2k + 1$

$n \equiv 1(\text{mod } 2)$

$n^2 \equiv 1(\text{mod } 2)$

$n^5 \equiv 1(\text{mod } 2)$

$n^5 - n \equiv 0 \ (\text{mod } 2)$ …………(2).

Nga (1) dhe (2) rrjedh se $2|n^5 - n$.

Pjesëtueshmëri me 3.

Rasti 1: $n = 3k$

$n \equiv 0(\text{mod } 3)$

$n^2 \equiv 0(\text{mod } 3)$

$n^5 \equiv 0(\text{mod } 3)$

$n^5 - n \equiv 0 \ (\text{mod } 3)$ …………(1).

Rasti 2: $n = 3k + 1$

$n \equiv 1(\text{mod } 3)$

$n^2 \equiv 1(\text{mod } 3)$

$n^5 \equiv 1(\text{mod } 3)$

$n^5 - n \equiv 0 \ (\text{mod } 3)$ …………(2).

Rasti 3: $n = 3k + 2$

$n \equiv 2(\text{mod } 3)$

$n^2 \equiv 1(\text{mod } 3)$

$n^3 \equiv 2(\text{mod } 3)$

$n^4 \equiv 1(\text{mod } 3)$

$n^5 \equiv 2(\text{mod } 3)$

$n^5 - n \equiv 0 \ (\text{mod } 3)$ …………(3).

Nga (1),(2) dhe (3) rrjedh se $3|n^5 - n$.

Pjesëtueshmëri me 5.

Rasti 1: $n = 5k$

$n \equiv 0(\text{mod } 5)$

$n^2 \equiv 0(\text{mod } 5)$

$n^5 \equiv 0(\text{mod } 5)$

$n^5 - n \equiv 0 \ (\text{mod } 5)$ …………(1).

Rasti 2: $n = 5k + 1$

$n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^5 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^5 - n \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$ ....(2).

Rasti 3: $n = 5k + 2$

$n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^3 \equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^5 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^5 - n \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$ ....(3).

Rasti 4: $n = 5k + 3$

$n \equiv 3(\mathrm{mod} 5)$

$n^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^3 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^5 \equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^5 - n \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$ ....(4).

Rasti 5: $n = 5k + 4$

$n \equiv 4(\mathrm{mod} 5)$

$n^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^3 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$

$n^5 \equiv 4(\mathrm{mod} 5)$

$n^5 - n \equiv 0\ (\mathrm{mod} 5)$ ....(5).

Nga (1), (2), (3), (4) dhe (5) rrjedh se $5|n^5 - n$, e nga $2|n^5 - n$, $3|n^5 - n$ dhe $5|n^5 - n$ fitohet $30|n^5 - n$.

Mënyra e tretë: Do të përdëftojmë pjesëtueshmëri me 5 dhe 6.

Në të vërtetë, pjesëtueshmëria me 5 është treguar në mënyrën e dytë.

Pjesëtueshmëri me 6.

Rasti 1: $n = 6k$

$n \equiv 0(\text{mod } 6)$

$n^2 \equiv 0(\text{mod } 6)$

$n^5 \equiv 0(\text{mod } 6)$

$n^5 - n \equiv 0 \ (\text{mod } 6)$ …………(1).

Rasti 2: $n = 6k + 1$

$n \equiv 1(\text{mod } 6)$

$n^2 \equiv 1(\text{mod } 6)$

$n^5 \equiv 1(\text{mod } 6)$

$n^5 - n \equiv 0 \ (\text{mod } 6)$ …………(2).

Rasti 3: $n = 6k + 2$

$n \equiv 2(\text{mod } 6)$

$n^2 \equiv 4(\text{mod } 6)$

$n^3 \equiv 2(\text{mod } 6)$

$n^4 \equiv 4(\text{mod } 6)$

$n^5 \equiv 2(\text{mod } 6)$

$n^5 - n \equiv 0 \ (\text{mod } 6)$ …………(3).

Rasti 4: $n = 6k + 3$

$n \equiv 3(\text{mod } 6)$

$n^2 \equiv 3(\text{mod } 6)$

$n^3 \equiv 3(\text{mod } 6)$

$n^4 \equiv 3(\text{mod } 6)$

$n^5 \equiv 3(\text{mod } 6)$

$n^5 - n \equiv 0 \ (\text{mod } 6)$ …………(4).

Rasti 5: $n = 6k + 4$

$n \equiv 4(\text{mod } 6)$

$n^2 \equiv 4(\text{mod } 6)$

$n^3 \equiv 4(\text{mod } 6)$

$n^4 \equiv 4(\text{mod } 6)$

$n^5 \equiv 4(\text{mod } 6)$

$n^5 - n \equiv 0\ (\text{mod } 6)$ ....(5).

Rasti 6: $n = 6k + 5$

$n \equiv 5(\text{mod } 6)$

$n^2 \equiv 1(\text{mod } 6)$

$n^3 \equiv 5(\text{mod } 6)$

$n^4 \equiv 1(\text{mod } 6)$

$n^5 \equiv 5(\text{mod } 6)$

$n^5 - n \equiv 0\ (\text{mod } 6)$ ....(6).

Nga (1), (2), (3), (4), (5) dhe (6) rrjedh se $6|n^5 - n$, e nga $5|n^5 - n$ dhe $6|n^5 - n$, fitohet $30|n^5 - n$.

Detyra

1. Përdëfto se $6|n^3 + 17n$.

Zgjidhje: Do të përdëftojmë pjesëtueshmëri me 2 dhe 3.

Pjesëtueshmëri me 2.

Rasti 1: $n = 2k$

$n \equiv 0(\text{mod } 2)/\cdot 17$

$17n \equiv 0(\text{mod } 2)$

$n^2 \equiv 0(\text{mod } 2)$

$n^3 \equiv 0(\text{mod } 2)$

$n^3 + 17n \equiv 0\ (\text{mod} 2)$ ....(1).

Rasti 2: $n = 2k + 1$

$n \equiv 1(\text{mod } 2) / \cdot 17$

$17n \equiv 17(\text{mod } 2)$

$17n \equiv 1(\text{mod } 2)$

$n^2 \equiv 1(\text{mod } 2)$

$n^3 \equiv 1(\text{mod } 2)$

$n^3 + 17n \equiv 0 \ (\text{mod } 2)$ ....(2).

Nga (1) dhe(2) rrjedh se $2|n^3 + 17n$.
Ngjashëm, tregohet pjesëtueshmëria e $n^3 + 17n$ me 3. Nga këtu, pasi që $n^3 + 17n$ është i pjesëtueshëm me 2 dhe me 3, rrjedh se është i pjesëtueshëm me 6.

F) PËRDËFTIMI I PJESTUESHMËRISË SË SHPREHJES SË PËRZIER ME NUMËR TË DHËNË

Shembulli 1: Përdëfto $9|7^n + 3n + 8$ për çdo $n \in \mathbb{N}$.

$7 \equiv 7(\text{mod } 9)$

$7^2 \equiv 4(\text{mod } 9)$

$7^3 \equiv 1(\text{mod } 9)$

$7^4 \equiv 7(\text{mod } 9)$

$7^5 \equiv 4(\text{mod } 9)$

$7^6 \equiv 1(\text{mod } 9)$

$7^7 \equiv 7(\text{mod } 9)$

$\vdots$

$7^{3k} \equiv 1(\text{mod } 9)$

$7^{3k+1} \equiv 7(\text{mod } 9)$

$7^{3k+2} \equiv 4(\text{mod} 9)$.

Do të shqyrtojmë tri raste.

Rasti 1: Për $n = 3k$ fitohet se $7^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 9)$.

$$7^n + 3n + 8 \equiv (1 + 3 \cdot 3k + 8)(\mathrm{mod}\ 9)$$
$$\equiv (9 + 9k)(\mathrm{mod}\ 9)$$
$$\equiv 9(1 + k)(\mathrm{mod}\ 9)$$
$$\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 9)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Për $n = 3k + 1$ fitohet se $7^n \equiv 7(\mathrm{mod}\ 9)$.

$$7^n + 3n + 8 \equiv (7 + 3 \cdot (3k + 1) + 8)(\mathrm{mod}\ 9)$$
$$\equiv (18 + 9k)(\mathrm{mod}\ 9)$$
$$\equiv 9(2 + k)(\mathrm{mod}\ 9)$$
$$\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 9)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Për $n = 3k + 2$ fitohet se $7^n \equiv 4(\mathrm{mod}\ 9)$.

$$7^n + 3n + 8 \equiv (4 + 3 \cdot (3k + 2) + 8)(\mathrm{mod}\ 9)$$
$$\equiv (18 + 9k)(\mathrm{mod}\ 9)$$
$$\equiv 9(2 + k)(\mathrm{mod}\ 9)$$
$$\equiv 0\ (\mathrm{mod} 9)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Nga (1), (2) dhe (3) rrjedh se $9|7^n + 3n + 8$ për çdo $n \in \mathbb{N}$.

Detyra:

Përdëfto se për çdo $n \in \mathbb{N}$:

1) $9|4^n + 15n - 1$

2) $49|8^n - 7n - 1$

3) $54|2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$

Zgjidhje:

1) $4 \equiv 4 (\text{mod } 9)$

$4^2 \equiv 7 (\text{mod } 9)$

$4^3 \equiv 1 (\text{mod } 9)$

$4^4 \equiv 4 (\text{mod } 9)$

$4^5 \equiv 7 (\text{mod } 9)$

$4^6 \equiv 1 (\text{mod } 9)$

$\vdots$

$4^{3k} \equiv 1 (\text{mod } 9)$

$4^{3k+1} \equiv 4 (\text{mod } 9)$

$4^{3k+2} \equiv 7 (\text{mod } 9).$

Do të shqyrtojmë tre raste:

Rasti 1: Për $n = 3k$ fitohet se $4^n \equiv 1 (\text{mod } 9)$.

$$\begin{aligned} 4^n + 15n - 1 &\equiv (1 + 15 \cdot 3k - 1) (\text{mod } 9) \\ &\equiv 45k (\text{mod } 9) \\ &\equiv 5 \cdot 9k (\text{mod } 9) \\ &\equiv 0 \ (\text{mod } 9) \ \ldots\ldots\ldots\ldots (1). \end{aligned}$$

Rasti 2: Për $n = 3k + 1$ fitohet se $4^n \equiv 4 (\text{mod } 9)$.

$$\begin{aligned} 4^n + 15n - 1 &\equiv (4 + 15(3k + 1) - 1) (\text{mod } 9) \\ &\equiv (18 + 45k) (\text{mod } 9) \\ &\equiv 9(2 + 5k) (\text{mod } 9) \\ &\equiv 0 \ (\text{mod } 9) \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2). \end{aligned}$$

Rasti 3: Për $n = 3k + 2$ fitohet se $4^n \equiv 7 (\text{mod } 9)$.

$$\begin{aligned} 4^n + 15n - 1 &\equiv (7 + 15 \cdot (3k + 2) - 1) (\text{mod } 9) \\ &\equiv (36 + 45k) (\text{mod } 9) \\ &\equiv 9(4 + 5k) (\text{mod } 9) \\ &\equiv 0 \ (\text{mod } 9) \ \ldots\ldots\ldots\ldots (3). \end{aligned}$$

Nga (1), (2) dhe (3) rrjedh se $9 | 4^n + 15n - 1$ për çdo $n \in \mathbb{N}$.

2) $8 \equiv 8 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^2 \equiv 15 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^3 \equiv 22 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^4 \equiv 29 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^5 \equiv 36 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^6 \equiv 43 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^7 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^8 \equiv 8 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^9 \equiv 15 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^{10} \equiv 22 (\mathrm{mod}\ 49)$

$\vdots$

$8^{3k} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^{3k+1} \equiv 8 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^{3k+2} \equiv 15 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^{3k+3} \equiv 22 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^{3k+4} \equiv 29 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^{3k+5} \equiv 36 (\mathrm{mod}\ 49)$

$8^{3k+6} \equiv 43 (\mathrm{mod}\ 49)$.

Do të shqyrtojmë 7 raste:

Rasti 1: Për $n = 7k$ fitohet se $8^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 49)$.

$$\begin{aligned} 8^n - 7n - 1 &\equiv (1 - 7 \cdot 7k - 1) (\mathrm{mod}\ 49) \\ &\equiv (-49k) (\mathrm{mod}\ 49) \\ &\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 49)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1). \end{aligned}$$

Rasti 2: Për $n = 7k + 1$ fitohet se $8^n \equiv 8 (\mathrm{mod}\ 49)$.

$$\begin{aligned} 8^n - 7n - 1 &\equiv (8 - 7(7k + 1) - 1) (\mathrm{mod}\ 49) \\ &\equiv (-49k) (\mathrm{mod}\ 49) \\ &\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 49)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2). \end{aligned}$$

Rasti 3: Për $n = 7k + 2$ fitohet se $8^n \equiv 15 (\text{mod } 49)$.

$$8^n - 7n - 1 \equiv (15 - 7(7k + 2) - 1)(\text{mod } 49)$$
$$\equiv (-49k)(\text{mod } 49)$$
$$\equiv 0 \ (\text{mod } 49) \ \ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Rasti 4: Për $n = 7k + 3$ fitohet se $8^n \equiv 22 (\text{mod } 49)$.

$$8^n - 7n - 1 \equiv (22 - 7(7k + 3) - 1)(\text{mod } 49)$$
$$\equiv (-49k)(\text{mod } 49)$$
$$\equiv 0 \ (\text{mod } 49) \ \ldots\ldots\ldots\ldots(4).$$

Rasti 5: Për $n = 7k + 4$ fitohet se $8^n \equiv 29 (\text{mod } 49)$.

$$8^n - 7n - 1 \equiv (29 - 7(7k + 4) - 1)(\text{mod } 49)$$
$$\equiv (-49k)(\text{mod } 49)$$
$$\equiv 0 \ (\text{mod } 49) \ \ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

Rasti 6: Për $n = 7k + 5$ fitohet se $8^n \equiv 36 (\text{mod } 49)$.

$$8^n - 7n - 1 \equiv (36 - 7(7k + 5) - 1)(\text{mod } 49)$$
$$\equiv (36 + 45k)(\text{mod } 49)$$
$$\equiv (-49k)(\text{mod } 49)$$
$$\equiv 0 \ (\text{mod } 49) \ \ldots\ldots\ldots\ldots(6).$$

Rasti 7: Për $n = 7k + 6$ fitohet se $8^n \equiv 43 (\text{mod } 49)$.

$$8^n - 7n - 1 \equiv (43 - 7(7k + 6) - 1)(\text{mod } 49)$$
$$\equiv (36 + 45k)(\text{mod } 49)$$
$$\equiv (-49k)(\text{mod } 49)$$
$$\equiv 0 \ (\text{mod } 49) \ \ldots\ldots\ldots\ldots(7).$$

Nga (1), (2), (3), (4), (5), (6) dhe (7) rrjedh se $49 | 8^n - 7n - 1$ për çdo $n \in \mathbb{N}$.

3) $2 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^3 \equiv 8(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^4 \equiv 16(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^5 \equiv 32(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^6 \equiv 10(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^7 \equiv 20(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^8 \equiv 40(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^9 \equiv 26(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{10} \equiv 2(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{11} \equiv 4(\mathrm{mod}\ 54)$

$\vdots$

$2^{9k} \equiv 26(\mathrm{mod}54)$

$2^{9k+1} \equiv 2(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{9k+2} \equiv 4(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{9k+3} \equiv 8(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{9k+4} \equiv 16(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{9k+5} \equiv 32(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{9k+6} \equiv 10(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{9k+7} \equiv 20(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{9k+8} \equiv 40(\mathrm{mod}\ 54)$.

Duhet të shqyrtojmë 9 raste:

Rasti 1: Për $n = 9k$ fitohet se $2^n \equiv 26(\mathrm{mod}\ 54)\ /^2$

$2^{2n} \equiv 26^2(\mathrm{mod}\ 54) \equiv 28(\mathrm{mod}\ 54)$

$2 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{2n+1} \equiv 2 \cdot 28\ (\mathrm{mod}\ 54) \equiv 2(\mathrm{mod}\ 54)$

fitohet se $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2 \equiv (2 - 9(9k)^2 + 3 \cdot 9k - 2)(\mathrm{mod}\ 54)$

$$\equiv \big(-27k(k-1)\big)(\mathrm{mod}\ 54).$$

Pasi që k dhe $k-1$ janë dy numra të njëpasnjëshëm natyrorë d.m.th se prodhimi i tyre është i pjesëtueshëm me 2. D.m.th., $54|2^{2n+1}-9n^2+3n-2$ за $n=9k$.

Rasti 2: Për $n=9k+1$ fitohet se $2^n \equiv 2(\mathrm{mod} 54)$ $/^2$

$2^{2n} \equiv 4(\mathrm{mod}\ 54)$

$2 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 54)$

$2^{2n+1} \equiv 8\ (\mathrm{mod}\ 54)$

Fitohet se $2^{2n+1}-9n^2+3n-2 \equiv (8-9(9k+1)^2+3\cdot(9k+1)-2)(\mathrm{mod}\ 54)$

$$\equiv (-729k^2+135k)(\mathrm{mod}\ 54)$$

$$\equiv -27k(27k+5)(\mathrm{mod}\ 54).$$

D.m.th, $27|2^{2n+1}-9n^2+3n-2$ ....(1)

Duhet ende të tregojmë se $2|2^{2n+1}-9n^2+3n-2$, gjegjësisht $2|k(27k+5)$

- për $k=2m$ kemi: $2m(27\cdot 2m+5)=2A$, gjegjësisht $2|k(27k+5)$
- për $k=2m+1$ kemi: $(2m+1)(27\cdot(2m+1)+5)=(2m+1)(54m+32)=$ $=2(2m+1)(27m+16)=2B$ gjegjësisht $2|k(27k+5)$

D.m.th, $2|2^{2n+1}-9n^2+3n-2$ ....(2)

Nga (1) dhe (2) fitohet se $54|2^{2n+1}-9n^2+3n-2$ за $n=9k+1$.

Në mënyrë analoge, për $n=9k+2, \dots n=9k+8$.

G) KRITERET PËR PJESTUESHMËRI ME 2, 3, 4, 8, 9, 11, 13 DHE 19

$$a = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0} =$$
$$= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Kriteret për pjesëtueshmëri me 3:

$1 \equiv 1 (\text{mod } 3) \ /\cdot a_0$

$10 \equiv 1 (\text{mod } 3) \ /\cdot a_1$

$10^2 \equiv 1 (\text{mod } 3) /\cdot a_2$

$\vdots$

$10^n \equiv 1 (\text{mod } 3) \ /\cdot a_n$

$a_0 \equiv a_0 (\text{mod } 3)$

$10 a_1 \equiv a_1 (\text{mod } 3)$

$100 a_2 \equiv a_2 (\text{mod } 3)$

$\vdots$

$10^n \cdot a_n \equiv a_n (\text{mod } 3)$

Fitohet se $a \equiv a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$.

D.m.th. $3|a \iff 3|(a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0)$.

Kriteret për pjesëtueshmëri me 9: (Fitohet ngjashëm si kriter për pjesëtueshmëri me 3.)

$$9|a \iff 9|(a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0).$$

Kriteret për pjesëtueshmëri me 2:

$1 \equiv 1 (\text{mod } 2) \ /\cdot a_0$

$10 \equiv 0 (\text{mod } 2) \ /\cdot a_1$

$10^2 \equiv 0 (\text{mod } 2) /\cdot a_2$

$\vdots$

$10^n \equiv 0 (\text{mod } 2) \ /\cdot a_n$

$a_0 \equiv a_0(\text{mod } 2)$

$10a_1 \equiv 0(\text{mod } 2)$

$100a_2 \equiv 0(\text{mod } 2)$

$\vdots$

$10^n \cdot a_n \equiv 0(\text{mod } 2)$

Fitohet se $a \equiv a_0(\text{mod } 2)$.

D.m.th. $2|a \Leftrightarrow 2|a_0$.

Kriteret për pjesëtueshmëri me 4:

$1 \equiv 1(\text{mod}4) \ /\cdot a_0$

$10 \equiv 2(\text{mod } 4) \ /\cdot a_1$

$10^2 \equiv 0(\text{mod } 4)/\cdot a_2$

$\vdots$

$10^n \equiv 0(\text{mod } 4) \ /\cdot a_n$

$a_0 \equiv a_0(\text{mod } 4)$

$10a_1 \equiv 2a_1(\text{mod } 4)$

$100a_2 \equiv 0(\text{mod } 4)$

$\vdots$

$10^n \cdot a_n \equiv 0(\text{mod } 4)$

Fitohet se $a \equiv (a_0 + 2a_1)(\text{mod } 4) \equiv (a_0 + 10a_1)(\text{mod } 4)$.

D.m.th, $4|a \Leftrightarrow 4|(a_0 + 10a_1) \Leftrightarrow 4|\overline{a_1a_0}$.

Kriteret për pjesëtueshmëri me 8:

$1 \equiv 1(\text{mod } 8) \ /\cdot a_0$

$10 \equiv 2(\text{mod } 8) \ /\cdot a_1$

$10^2 \equiv 4(\text{mod } 8)/\cdot a_2$

$10^3 \equiv 0(\text{mod } 8)/\cdot a_3$

$10^4 \equiv 0(\text{mod } 8)/\cdot a_4$

$\vdots$

$10^n \equiv 0(\text{mod } 8) \ /\cdot a_n$

Nga këtu,

$a_0 \equiv a_0 (\mathrm{mod}\, 8)$

$10a_1 \equiv 2a_1 (\mathrm{mod}\, 8)$

$100a_2 \equiv 4a_2 (\mathrm{mod}\, 8)$

$1000a_3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 8)$

$\vdots$

$10^n \cdot a_n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 8)$

Fitohet se $a \equiv (a_0 + 2a_1 + 4a_2)(\mathrm{mod}\, 8) \equiv (a_0 + 10a_1 + 100a_2)(\mathrm{mod}\, 8)$.

D.m.th, $8|a \Leftrightarrow 8|(a_0 + 10a_1 + 100a_2) \Leftrightarrow 8|\overline{a_2a_1a_0}$.

Kriteret për pjesëtueshmëri me 11:

$1 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 11)\ /\cdot a_0$

$10 \equiv -1(\mathrm{mod}\, 11)\ /\cdot a_1$

$10^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 11)/\cdot a_2$

$10^3 \equiv -1(\mathrm{mod}\, 11)/\cdot a_3$

$10^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 11)/\cdot a_4$

$\vdots$

$10^n \equiv (-1)^n\ (\mathrm{mod}\, 11)\ /\cdot a_n$

$a_0 \equiv a_0 (\mathrm{mod}\, 11)$

$10a_1 \equiv -a_1 (\mathrm{mod}\, 11)$

$100a_2 \equiv a_2 (\mathrm{mod}\, 11)$

$1000a_3 \equiv -a_3 (\mathrm{mod}\, 11)$

$10000a_4 \equiv a_4 (\mathrm{mod}\, 11)$

$\vdots$

$10^n \cdot a_n \equiv (-1)^n a_n (\mathrm{mod}\, 11)$

Fitohet se $a \equiv (a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0)(\mathrm{mod}\, 11)$.

D.m.th. $11|a \Leftrightarrow 11|(a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0)$.

Kriteret për pjesëtueshmëri me 13:

Mënyra e parë

$1 \equiv 1(\text{mod}13) \;\; /\cdot a_0$

$10 \equiv 10(\text{mod } 13) \; /\cdot a_1$

$10^2 \equiv 9(\text{mod } 13)/\cdot a_2$

$10^3 \equiv -1(\text{mod } 13)/\cdot a_3$

$10^4 \equiv -10(\text{mod } 13)/\cdot a_4$

$10^5 \equiv -9(\text{mod } 13)/\cdot a_5$

$10^6 \equiv 1(\text{mod } 13)/\cdot a_6$

$10^7 \equiv 10(\text{mod } 13)/\cdot a_7$

$10^8 \equiv 9(\text{mod } 13)/\cdot a_8$

$\vdots$

Nga këtu,

$a_0 \equiv a_0(\text{mod } 13)$

$10a_1 \equiv 10a_1(\text{mod } 13)$

$100a_2 \equiv 9a_2(\text{mod } 13)$

$1000a_3 \equiv -a_3(\text{mod } 13)$

$10000a_4 \equiv -10a_4(\text{mod } 13)$

$100000a_5 \equiv -9a_5(\text{mod } 13)$

$\vdots$

Fitohet se:

$a \equiv (a_0 + 10a_1 + 9a_2 - (a_3 + 10a_4 + 9a_5) + a_6 + 10a_7 + 9a_8 - \cdots)(\text{mod } 13).$

D.m.th. $13|a \;\Leftrightarrow\; 13|(a_0 + 10a_1 + 9a_2 - (a_3 + 10a_4 + 9a_5) + a_6 + 10a_7 + 9a_8 - \cdots).$

Mënyra e dytë

$1 \equiv 1 (\bmod 13)\ \ /\cdot a_0$

$10 \equiv 10 (\bmod 13)\ /\cdot a_1$

$10^2 \equiv 1 \cdot 9 (\bmod 13) /\cdot a_2$

$10^3 \equiv 10 \cdot 9 (\bmod 13) /\cdot a_3$

$10^4 \equiv 1 \cdot 9^2 (\bmod 13) /\cdot a_4$

$10^5 \equiv 10 \cdot 9^2 (\bmod 13) /\cdot a_5$

$10^6 \equiv 1 \cdot 9^3 (\bmod 13) /\cdot a_6$

$10^7 \equiv 10 \cdot 9^3 (\bmod 13) /\cdot a_7$

$\vdots$

Fitohet se:

$$a \equiv (a_0 + 10a_1 + 9a_2 + 10 \cdot 9a_3 + 9^2 a_4 + 10 \cdot 9^2 a_5 + 9^3 a_6 + 10 \cdot 9^3 a_7 + \cdots)(\bmod 13)$$
$$\equiv (\overline{a_1 a_0} + 9 \cdot \overline{a_3 a_2} + 9^2 \cdot \overline{a_5 a_4} + 9^3 \cdot \overline{a_7 a_6} + \cdots)(\bmod 13).$$

D.m.th. $13|a \Leftrightarrow 13|(\overline{a_1 a_0} + 9 \cdot \overline{a_3 a_2} + 9^2 \cdot \overline{a_5 a_4} + 9^3 \cdot \overline{a_7 a_6} + \cdots)$.

Kriteret për pjesëtueshmëri me 19:

$1 \equiv 1 (\bmod 19)\ \ /\cdot a_0$

$10 \equiv 10 (\bmod 19)\ /\cdot a_1$

$10^2 \equiv 5 (\bmod 19) /\cdot a_2$

$10^3 \equiv 10 \cdot 5 (\bmod 19) /\cdot a_3$

$10^4 \equiv 1 \cdot 5^2 (\bmod 19) /\cdot a_4$

$10^5 \equiv 10 \cdot 5^2 (\bmod 19) /\cdot a_5$

$10^6 \equiv 1 \cdot 5^3 (\bmod 19) /\cdot a_6$

$10^7 \equiv 10 \cdot 5^3 (\bmod 19) /\cdot a_7$

$\vdots$

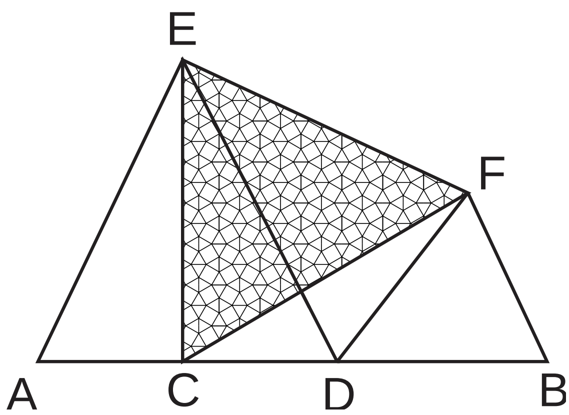
Fitohet se:

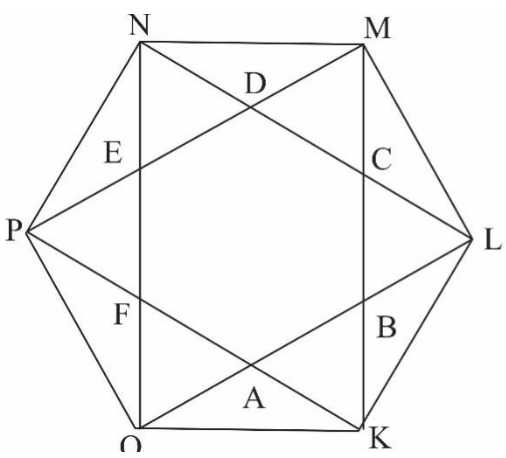
$$a \equiv (a_0 + 10a_1 + 5a_2 + 10 \cdot 5a_3 + 5^2 a_4 + 10 \cdot 5^2 a_5 + 5^3 a_6 + 10 \cdot 5^3 a_7 + \cdots)(\bmod 19)$$
$$\equiv (\overline{a_1 a_0} + 5 \cdot \overline{a_3 a_2} + 5^2 \cdot \overline{a_5 a_4} + 5^3 \cdot \overline{a_7 a_6} + \cdots)(\bmod 19).$$

D.m.th. $19|a \Leftrightarrow 19|(\overline{a_1 a_0} + 5 \cdot \overline{a_3 a_2} + 5^2 \cdot \overline{a_5 a_4} + 5^3 \cdot \overline{a_7 a_6} + \cdots)$.

DETYRA PËR USHTRIME

Në këtë pjesë janë dhënë detyra për ushtrime për nxënësit më solid nga klasa e 7, 8 dhe 9. Për secilën nga detyrat është ofruar përgjigje ose zgjidhje. Këto detyra mund të zgjidhen në kuadër të mësimit shtues me përkrahje të mësimdhënësit.





1. Genci ka pesë herë më shumë të holla se e motra e tij. Nëse Genci ka harxhuar 200 denarë, atëherë ata të dytë do të kenë sasitë të hollash një lloj. Nga sa denarë do të ketë secili prej tyre?

2. Deshifroje (zgjidh) barazimet, nëse dihet se pas secilës shkronjë fshihet nga një shifër dekade:

   a) $A + AB + ABC + ABCD = 1995$

   b) $A + AB + BB + ABBC = 1996$

3. Në një shkollë secilëve dy djem ka nga tre vajza, e në çdo dhjetë djem ka nga një arsimtarë. Sa djem dhe sa vajza ka në shkollë, nëse ka gjithsej 936 nxënës dhe arsimtarë?

4. Një kishë ka dy kambana të ndryshme. Të dytë rrahin njëtrajtësisht, por të rrahurat e kambanës së parë dëgjohen në çdo katër sekonda, e të rrahurat e kambanës së dytë dëgjohen në çdo tre sekonda. Të rrahurat e njëkohësishme të dy kambanave dëgjohen si një e rrahur. Një ditë të dy kambanat kanë filluar njëkohësisht. Dikush me kujdes i ka numëruar të rrahurat dhe ka numëruar gjithsej 20 të rrahura nga kambana. Sa kohë ka kaluar nga e rrahura e parë deri te e rrahura e fundit e kambanave?

5. Përcakto numrat a, b dhe c, nëse dihet se $a < b < c$ dhe të mbledhur nga dy japin shuma 332, 408 dhe 466.

6. Në një kope ka pasur gjithsej 560 kokë kafshë: dhen dhe dhi. Pas një muaji numri i dhive është rritur për 16, pas çka numri i dhenve ka ngelë 15 herë më i madh se numri i dhive. Sa dhenë, dhe sa dhi ka patur në fillim?

7. Gjatë pjesëtimit të ndonjë numri me 48 fitohet herës n dhe mbetje 36. Sa do të jetë herësi, e sa mbetja, gjatë pjesëtimit të njëjtit numër me numrin 16?

8. Shuma e numrit dyshifrorë dhe treshifrorë është numër katërshifrorë. Secili prej atyre numrave njëlloj lexohet nga e majta kah e djathta dhe nga e djathta kah e majta gjegjësishtnë secilin numër shifrat janë të radhitura simetrikisht. Gjeni ata numra.

9. Një ditë nga paralelja kanë munguar $\frac{1}{12}$ e nxënësve. Ditën e ardhshme ka ardhur 1 nxënës më shumë, ashtu që kanë munguar $\frac{1}{18}$ e nxënësve. Sa nxënës ka paralelja?

10. Numri gjashtëshifrorë fillon me shifrën 1. Nëse ajo shifër zhvendoset në vendin e fundit, fitohet numër që është tri herë më i madh se numri fillestarë. Gjeje numrin fillestarë.

11. Përdëfto se numri $10^{1999} - 7$ është i pjesëtueshëm me 3, por nuk është i pjesëtueshëm me 27.

12. Gjej të gjithë numrat natyrorë n për të cilët është $10^{2n} - 1$ është i pjesëtueshëm me 3^4.

13. Në shteg rrethorë të gjatë 120 metra nga vendi i njëjtë në kahe të njëjtë nisen dy biçiklistë. I pari lëviz me shpejtësi 320 m në minutë, kurse i dyti me 250 m në minutë. Pas sa minutave të dy biçiklistët do të gjinden në vend të njëjtë në shteg?

14. Sa numra natyrorë më të vegjël se 100, nuk janë të pjesëtueshëm as me 3 as me 5?

15. Për shëtitje të 46 vizitorëve në një liqen kanë qenë të angazhuar barka me nga 4 dhe barka me nga 6 karrige. Sa barka me nga 4, e sa me nga 6 karrige, nëse gjithsej ka pasur gjithsej 10 barka dhe gjatë lundrimit kanë qenë të gjithë plot me vizitorë të ulur në vende të barkave?

16. Një nxënës ka lexuar një libër për 3 ditë. Ditën e parë ka lexuar 2/5 e librit, ditën e dytë 2/5 nga mbetja, e ditën e tretë 36 faqet e mbetura. Sa faqe ka patur libri?

17. Gjej të gjithë numrat gjashtë shifrorë nga forma $\overline{A1996B}$, të cilët janë të pjesëtueshëm me 36.

18. Cakto shifrat e panjohura në numrin 199AA6B nëse dihet se është i pjesëtueshëm me 12.

19. Shuma e gjatësive të brinjëve të një kuadri është 60 cm. Cakto syprinën dhe vëllimin e atij kuadri, nëse numrat matës të gjatësive të brinjëve (të shprehur në centimetra) janë numra të njëpasnjëshëm natyrorë.

20. Një fshatarë në treg ka shitur qengj, cjap dhe viç. Kur e kanë pyetur nga sa kilogram ka çdonjëra prej tyre, ai është përgjigjur në mënyrë enigmatike: „Qengji dhe cjapi kanë bashkë 32 kg, qengji dhe viçi kanë së bashku 102 kg, e cjapi dhe viçi kanë 100 kg. Cakto sa kilogram ka secila prej tyre.

21. Cakto të gjitha treshifrorë që janë të pjesëtueshëm me 18 dhe shifrat e njësheve dhe të qindësheve i kanë të njëjta.

22. Shuma e shifrave të një numri treshifrorë është e barabartë me numrin më të vogël dyshifrorë. Shifra e dhjetësheve e numrit treshifrorë është 6, e nëse shifrat e njësheve dhe qindësheve i ndërrojnë vendet, fitohet numri i njëjtë. Cili është ai numër?

23. Shuma e shifrave të një numri treshifrorë është 12. Gjatë pjesëtimit të atij numri me 257 fitohet mbetja 47. Cili është ai numër treshifrorë?

24. Shuma e dy numrave është 374. Njëri nga mbledhësit mbaron me 0. Nëse ajo shifër fshihet fitohet mbledhësi tjetër. Cilët janë ata numra?

25. Përcakto shifrat A dhe B, nëse dihet se numri $\overline{A1996B}$ është i pjesëtueshëm me 72.

26. Përcakto më të mëdhenj se 100 dhe më të vegjël se 200, të cilët gjatë pjesëtimit me 2 japin mbetje 1, gjatë pjesëtimit me 3 japin mbetje 2, gjatë pjesëtimit me 4 japin mbetje 3 dhe gjatë pjesëtimit me 5 japin mbetje 4.

27. Gjeje numrin më të madh katërshifrorë i cili gjatë pjesëtimit me 3, 4, 5, 6 dhe 7 jep mbetje 2.

28. Gjeje numrin më të vogël natyrorë i pjesëtueshëm me 33 i cili është shënuar vetëm me njëshe.

29. Zgjidhe barazimin $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)=3024$ në bashkësinë e numrave të plotë.

30. Cakto numrin më të vogël natyrorë me të cilin duhet të shumëzohet numri 8316 që të fitohet katrorë i numrit natyrorë.

31. Prodhimi i dy numrave treshifrorë shënohet vetëm me shifrat 7. Cakto ata numra treshifrorë.

32. Një barkë turistike ka 20 kabina me gjithsej 86 shtretër. Secila nga kabinat ka 2, 3 ose 4 shtretër. Përdëfto se numri i kabinave treshtretërshe është numër çift.

33. Secili njeri, prej ditës kur ka filluar përshëndetja me dhënie të dorës deri sot, është përshëndetur numër të caktuar herë. Përdëfto se numri i njerëzve, të cilët deri në këtë moment kanë bërë përshëndetje tek herë, është çift.

34. Gjyshi dhe babai i Artit tani kanë 63 vjet dhe 37 vjet, përkatësisht. Arti ka 10 vjet, e motra e tij 6 vjet. Pas sa vjet Arti, babai i tij dhe motra e tij do të kenë bashkë gjithsej aq sa do të ketë gjyshi?

35. Në varg të përbërë nga 7 numra natyrorë, duke filluar nga i treti secili anëtarë është shume e të dy anëtarëve paraprak. Cakto vargun nëse anëtari i tretë është 5.

36. Dy traktorë duhet të lëvrojnë arën prej 450 ha. Njëri traktor mund të lëvrojë 15 ha në ditë, e i dyti 20 hanë ditë. Pasi që traktori i parë ka lëvruar 2 ditë, i është bashkangjitur edhe traktori i dytë. Për sa ditë së bashku do ta kryejnë lëvrimin e arës?

37. Gjeje numrin më të vogël natyrorë të pjesëtueshëm me 6, i cili gjatë pjesëtimit me 4 dhe me 5 jep mbetje 2.

38. Cakto numrin më të vogël natyrorë i cili i shumëzuar me 814 jep numër të shënuar vetëm me dyshe?

39. A është e mundur 1999 telefon të jenë të lidhur ndërmjet veti, ashtu që secili prej tyre të ketë lidhje të drejtpërdrejtë saktë me 7 telefona të tjerë? (Përgjigja të sqarohet.)

40. Tri herë në gjatësi të drejtkëndëshit të dhënë është e barabartë me katër herë gjerësinë. Nëse syprina e drejtkëndëshit është 108 cm^2, atëherë sa është perimetri?

41. Një fletë në formë katrori me dy të prera me gërshërë(me dy drejtëza) është ndarë në dy katrorë dhe dy drejtkëndësha. Syprina e njërit katrorë të fituar është 81 cm^2, e syprina e njërit drejtkëndësh të fituar është 63 cm^2. Sa është syprina e fletës së dhënë?

42. Njehso syprinën e trekëndëshit nëse dy brinjët e tij kanë gjatësi 27 cm dhe 29 cm, e vija e rëndimit kah brinja e tretë ka gjatësi 26 cm.

43. Perimetri drejtkëndëshit të dhënë është 2 metra. Nëse gjatësia e drejtkëndëshit zvogëlohet për 10 cm, e gjerësia zmadhohet për 10 cm, atëherë do të fitohet katrorë. Sa është syprina e atij katrori?

44. Perimetri i trekëndëshit barakrahës është 64 cm, e ndryshimi i krahut dhe bazës është 11 cm. Njehso syprinën e trekëndëshit.

45. Një katrorë është ndarë me dy drejtëza në katër drejtkëndësh. Sa është brinja e katrorit të dhënë,nëse syprinat e tre drejtkëndëshave të fituar nga katër drejtkëndëshat janë: 48 cm^2, 96 cm^2 dhe 144 cm^2 ? Prerja është bërë ashtu që dy më të mëdhenjtë nga tre drejtkëndëshat e përmendur në tekst kanë të përbashkët vetëm një brinjë.

46. Në trapez barakrahës $ABCD$ me $\overline{AD} = \overline{BC} = 6$ cm diagonalja e ndanë vijën e mesme në pjesë prej nga 2 cm dhe 5 cm, përkatësisht. Cakto:

a) perimetrin e trapezit

b) këndet e brendshme të trapezit

47. Është dhënë katrori me gjatësi të brinjëve 10 cm është prerë me një drejtëz në dy drejtkëndësh. Njehso perimetrat e atyre drejtkëndëshave, nëse dihet se perimetri i dyfishtë i njërit është i barabartë me trefishin e perimetrit të tjetrit.

48. Në trapezin barakrahës $ABCD$, baza më e madhe është $a = 3{,}7$ dm, krahu $c = 1{,}5$ dm dhe këndi ndërmjet tyre është $\alpha = 60°$. Cakto gjatësinë e vijës së mesme të trapezit.

49. Nëse një çift i brinjëve të kundërta të katrorit janë vazhduar nga 2 cm, e çifti tjetër për nga 5 cm, drejtkëndëshi i fituar do të ketë syprinë e cila është për 45 cm^2 më e madhe se syprina e katrorit të dhënë. Sa është syprina e katrorit?

50. Brinjët e trekëndëshit janë 13 cm, 14 cm dhe 15 cm. Cakto rrezen e vijës rrethore me qendër në brinjën e mesme nga madhësia e cila i prek dy brinjët tjera të trekëndëshit.

51. Si duhet të renditen njëqind katrorë identik me brinjë 3 cm që të fitohet drejtkëndësh:

a) me perimetër më të vogël të mundshëm?

b) me perimetër më të madh të mundshëm?

52. Në një drejtkëndësh prerja e diagonaleve është për 4 cm më afër brinjës më të madhe se sa brinjës më të vogël. Njehso syprinën e drejtkëndëshit, nëse perimetrin e ka 56 cm.

53. Drejtkëndëshi ka perimetër 96 cm është ndarë me një drejtëz në dy katrorë të barabartë. Për sa është më i madh perimetri i drejtkëndëshit se sa perimetri i njërit nga katrorët e fituar?

54. Në ashensor hynë një djalë dhe një vajzë. Ashensori niset nga kati përdhese, e ndërtesa ka 5 kate. Në sa mënyra të ndryshme mundet të zbrazet ashensori?

55. Një gjerdan është bërë nga 20 monistre të njëjtë në formë por të ndryshëm nga ngjyra: ka 5 të bardhë, 5 të verdhë, 5 të kaltër dhe5 të kuq, ashtu që çdo katër monistra të njëpasnjëshëm janë në katër ngjyra të ndryshme.

a) Sa gjerdane të ndryshme mund të bëhen nga këto 20 monistre?

b) Sa gjerdane të ndryshme mund të bëhen nën kushte të njëjtë nga 100 monistre (nga 25 nga secila ngjyrë)?

56. Për shënim të numrave katërshifrorë i shfrytëzojmë vetëm numrat 1, 2 dhe 3. Sa ka numra të tillë të cilët janë të pjesëtueshëm me 9?

57. Nëntë gjësende të ndryshme duhet të ju ndahen tre personave, dhe njërit dy gjësende, të dytit tre gjësende dhe të tretit katër gjësende. Në sa mënyra ajo mund të bëhet?

58. Në shënim të ditëlindjes, Artiola i ka shërbyer mysafirët me ëmbëlsirë. Ema e para ka marrë $\frac{1}{10}$ e ëmbëlsirës, e pas Sara ka marrë $\frac{1}{9}$ e pjesës së mbetur. Pas kësaj Hava ka marrë $\frac{1}{8}$ nga ajo që ka mbetur pas Emës, Ina morri $\frac{1}{7}$ nga mbetja në fund dhe së fundmi Gazi morri $\frac{1}{6}$ nga ajo që ka ngelë nga ëmbëlsira. Sa pjesë e ëmbëlsirës ka ngelë për Artiolën dhe fëmijët e saj?

59. Përcakto numrat *a, b, c* nëse shuma e tyre është më e madhe se numri *a* për $\frac{5}{2}$, nga numri *b* për $\frac{59}{6}$, e nga numri *c* për $\frac{5}{3}$.

60. Në një shitore ka patur gjithsej 180 kilogram mollë dhe dardhë. Janë shitur $\frac{3}{8}$ e mollës dhe $\frac{3}{10}$ e dardhës, që paraqet $\frac{1}{3}$ nga sasia e përgjithshme e mollës dhe dardhës. Sa kilogram mollë ka patur në fillim në shitore?

61. Një anije lëvizë në ujë të qetë me shpejtësi prej 18 km në orë. Sa kilometra do të kalojë anija për 8 orë në lum te i cili uji lëvizë me shpejtësi prej 5 km në orë, nëse lëvizë:

a) në rrjedhë të ujit?

b) në anë të kundërt të rrjedhës së ujit?

62. Dy shirita kanë gjatësi të përgjithshme 4 m 12 cm. Nëse nga shiriti i parë pritet copë shiriti me gjatësi 50 cm dhe ngjitet në shiritin e dytë (në vazhdim), atëherë shiriti i dytë do të jetë tre herë më e gjatë se e para. Sa janë të gjata shiritat?

63. Një nxënës ka blerë4 libra. Tre librat e parë pa të parin kushtojnë 700 denarë, tre librat pa të dytën 740 denarë, tre librat pa librin e tretë 760 denarë dhe tre librat pa të katërtin 800 denarë. Nga sa denarë kushton secili libër?

64. Në një enë ka pasë 420 gram njëzet për qind tretje të kripës dhe ujit. Pas një kohe, për shkak të avullimit, sasia e tretjes është zvogëluar në 300 gram. Sa për qind kripë ka tretja tani?

65. Rrushi i freskët përmban në vete 80 % ujë, e rrushi i thatë përmban 12 % ujë. Sa kilogram rrush të freskët nevojiten që të fitohen 16 kilogram rrush të thatë?

66. Traktoristi e ka lëvruar arën për tre ditë. Ditën e parë ai ka lëvruar 7/10 e arës, ditën e dytë ka lëvruar 3/5 nga mbetja dhe ditën e tretë pjesën e mbetur. Sa është syprina e arës,nëse ditën e tretë traktoristi ka lëvruar për 11,2 ha më pak se ditën e dytë?

67. Që të ndërtohet një digë për 20 ditë janë angazhuar 44 punëtorë. Por, 4 ditë pas fillimit të punës,janë bërë marrëveshjet puna të kryhet 5 ditë më herët se kur është paraparë. Edhe sa punëtorë duhet të angazhohen?

68. Në një shkollë ka më pak se 400 nxënës. Gjashtë klasë kanë numër të njejtë nxënësi dhe në ato gjashtë klasë ka më shumë se 150 nxënës. Në klasët tjera ka gjithsejt për 15 % nxënës më shumë se në këto gjashtë klasë. Sa gjithsej nxënës ka në shkollë?

69. Anika thotë: „Bibi gënjen !“, Bibi pohon: „Sejrani gënjen!“ Sejrani pohon: „Anika dhe Bibi gënjejnë!“ Cili me të vërtetë gënjen?

70. Një vit, 1 janar dhe 1 prill janë qëlluar ditën e enjte. Sa muaj me pesë të premte ka në ate vit?

71. Jolanda e ka kaluar të martën e parë të muajit në Paris, e të martën e parë pas të hënës së parë të muajit të njëjtë ka qenë në Florida. Të mërkurën e parë të muajit të ardhshëm Jolanda ka qenë në Beograd, e të mërkurën e parë pas të martës së parë e ka kaluar në Venedik. Ku Jolanda e ka festuar 8 marsin e atij viti?

72. Katër mace për katër ditë gjuajnë katër mijë. Për sa ditë 100 mace do të gjuajnë 100 mijë?

73. Kemi në disponim dy tenxhere të zbrazëta, nga të cilat njëra ka vëllim 11 litra, e tjetra 7 litra. Si me ndihmën e këtyre tenxhereve, nga çezma në fuqi do të derdhim 6 litra ujë?

74. Këndi α është suplementar me këndin β, e komplementar është me një të tretën e këndit β. Cakto këndet α dhe β.

75. Cakto syprinën e rombit $ABCD$, nëse R dhe r, përkatësisht, janë rrezet e rrathëve të jashtëshkruar rreth trekëndëshave ABC dhe ABD.

76. Pikat A dhe B e ndajnë segmentin MN në tre segmente gjatësitë e të cilëve qëndrojnë si 2 : 3 : 4. Largesa ndërmjet meseve të pjesëve të skajshme është 30 cm. Sa është gjatësia e segmentit MN?

77. Në një drejtëz janë dhënë pika A, B *dhe* C, në atë radhitje, ashtu që gjatësia e segmentit AB është 3 cm, e gjatësia e segmentit BC është 2 cm. Le të jetë M, N dhe P mese të AB, AC dhe BC, përkatësisht. Cilat janë gjatësitë e segmenteve BC, AP *dhe* MN?

78. Është dhënë drejtkëndëshi $ABCD$ me brinjë $AB = 16$ cm dhe $BC = 12$ cm. Pikat E dhe F shtrihen në drejtëzat AB dhe CD, përkatësisht, ashtu që $AECF$ është romb. Cakto gjatësinë e segmentit EF.

79. Ndryshimi i këndit α dhe këndit të tij suplementarë β është $56°$. Njehso këndin γ i cili është komplementarë në këndin β.

80. Mbi katetet e trekëndëshit kënddrejtë janë konstruktuar trekëndësh barabrinjës me syprina $64\sqrt{3}$ cm^2 dhe $36\sqrt{3}$ cm^2, përkatësisht. Cakto syprinën e rrethit të jashtëshkruar në trekëndëshin kënddrejtë.

81. Një lepur ndodhet në livadh. Fillimisht kërcen 4 m në perëndim, pastaj 2 m në jug-lindje dhe në fund kërcen 4 m në jug. Cakto në cilën largesë nga fillimi do të gjendet lepuri pas kërcimit.

82. Një e pesta e këndit α është e barabartë me një të shtatën e këndit të tij suplementarë β. Sa është këndi I cili është komplementar me këndin α?

83. Përdëfto se në secilin shumëkëndësh të drejtë mund të brendashkruhet vijë rrethore.

84. Cili kënd është për $1°$ më i madh se këndi i tij suplementarë?

85. Në vijën e dhënë rrethore, sekantat $\overline{AB} = 6$ cm dhe $\overline{AC} = 8$ cm janë reciprokisht normale. Cakto syprinën e rrethit.

86. Sa është shuma e dy këndeve të cilët janë, përkatësisht, suplement në dy kënde komplementarë?

87. Nga pika e çfarëdoshme A në vijë rrethore janë tërhequr dy sekanta me gjatësi 9 cm dhe 17 cm. Cakto rrezen e vijës rrethore, nëse largesa ndërmjet meseve të sekantave është 5 cm.

88. Këndet α dhe β ce, përkatësisht,komplementare ndaj dy këndeve suplementare φ dhe θ. Njehso ato katër kënde.

89. Në katrorë me brinjë a, është brendashkruar katrorë më i vogël kulmet e të cilit i ndajnë brinjët e katrorit më të madh në raport 2 : 3. Cakto raportin e syprinave të katrorëve.

90. Bazat e trapezit janë $a = 25$ dhe $b = 15$, e njërë nga krahët është $c = 8$. Cakto perimetrin dhe syprinën të trapezit nëse dihet se shuma e këndeve të brendshme në bazën më të madhe është 90°.

91. Cakto këndin α i cili nga këndi i tij suplementar është saktë më i vogël aq herë sa është më i madh se këndi i tij komplementarë.

92. Është dhënë drejtkëndëshi$ABCD$ me dimensione 8 cm dhe 6 cm. Diagonalja AC e ndanë drejtkëndëshin në dy trekëndësh. Cakto largesën ndërmjet qendrave të rrathëve të brendashkruar në ato dy trekëndësh.

93. Përdëfto se trekëndëshi është kënddrejtë nëse dhe vetëm nëse një kënd i tij i brendshëm është i barabartë me shumën ose ndryshimin e dy këndeve tjerë të brendshëm.

94. Në romb është brendashkruar vijë rrethore me rreze r. Shprehe gjatësinë e brinjës të rombit nëpërmjet rrezes r, nëse dihet se ajo është gjashtë herë më e vogël se shuma e diagonaleve.

95. Në brinjën AC të trekëndëshit ABC është dhënë pika K ashtu që drejtëza BK është simetrale e këndit të brendshëm β. Nëse dihet se $\measuredangle BKC = 70°$, njehso ndryshimin e këndev $\measuredangle ACB = \gamma$ dhe $\measuredangle CAB = \alpha$.

96. Njehso syprinën e trapezit me baza 19 cm dhe 2 cm dhe diagonale 17 cm dhe 10 cm.

97. Nëse shuma e dy këndeve të jashtme të trekëndëshit është e barabartë me 270°, Përdëfto se ai trekëndësh është kënddrejtë.

98. Njehso syprinën e trapezit barakrahës me baza 20 cm dhe 12 cm nëse dihet se diagonalet janë reciprokisht normale.

99. Simetralet e dy këndeve të brendshme të trekëndëshit të dhënë priten nën kënd prej 135°. Përdëfto se ai trekëndësh është kënddrejtë.

100. Cakto gjatësinë e diagonales më të gjatë të tridhjetëkëndëshit të rregullt me brinjë $a = 6$ cm.

101. Njëri nga këndet e brendshme të trekëndëshit është 75°. Sa janë dy këndet tjera të brendshme të trekëndëshit,nëse dihet se ekziston drejtëz e cila e përmban kulmin të këndit të dhënë dhe e ndanë trekëndëshin në dy trekëndësh barakrahës?

102. Cakto rrezen R të rrethit të jashtëshkruar rreth trekëndëshit barakrahës ABC me bazë a dhe krah b.

103. Nga gjysmërrethi me rreze $R = 10$ cm janë prerë dy gjysmërrathë me rreze $r_1 = 3$ cm dhe $r_2 = 7$, qendrat e të cilëve shtrihen në diametrin e gjysmërrethit dhe tangohen ndërmjet veti nga pjesa e jashtme. Cakto syprinën e mbetjes.

104. Le të jetë $ABCD$ paralelogram dhe $P \in BC, Q \in AD, K \in AB$ dhe $L \in CD$ janë të tillë që $PQ \parallel AB, KL \parallel BC$ dhe $\{M\} = KL \cap PQ \cap AC$. Përdëfto se paralelogramet $KBPM$ dhe $QMLD$ kanë syprina të barabarta.

105. Përdëfto se rreth secilit drejtkëndësh të rregullt, mund të jashtëshkruhet vijë rrethore.

106. Katrori $ABCD$ ka brinjë me gjatësi 36 cm. Në brinjën AB është zgjedhur pikë E në largesë 12 cm nga kulmi B. Le të jetë mesi I brinjës BC është pika F, e në brinjën CD është zgjedhur pika G në largesë 12 cm nga kulmi C. Cakto syprinën të pjesës që shtrihet në pjesën e brendshme të trekëndëshit EFG dhe në pjesën e jashtme të trekëndëshit AFD.

107. Bazat e trapezit $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ qëndrojnë si 1 : 5, e diagonalet priten në pikën O. Shuma e syprinave të trekëndëshave ABO dhe CDO është 120 cm^2. Gjej syprinat të atyre trekëndëshave.

108. Në ΔABC le të jetë pika D mes i brinjës BC. Për pikën E në segmentin AD vlenë barazimi $4\overline{AE} = 3\overline{AD}$. Drejtëza BE e pret brinjën AC në pikën F. Cakto raportin e syprinave të ΔABF dhe ΔBCF.

109. Në një drejtëz janë bartë segmentet AB, AC, AD dhe AE ashtu që pika B është mes i segmentit AC, C në AD dhe D në AE. Cakto largesën ndërmjet pikave të mesme të segmenteve AB dhe DE, nëse dihet se $\overline{AE} = 16$ cm.

110. Kërmilli ngjitet në drunj të lartë 15 m. Gjatë secilës ditë kërmilli ngjitet 5 m, *e* gjatë secilës natë, për shkak të rrëshqitjes lëshohet, për 4 m. Për sa ditë kërmilli do të ngjitet në majë të drurit?

111. Ara në formë të drejtkëndëshit, për të cilin $\frac{3}{4}$ e gjatësisë janë 90 m dhe gjerësi paraqet $\frac{7}{8}$ e gjatësisë, është mbjellë me misër. Sa kilogram misër do të fitohen nëse nga , 1 ari (100 metër katrorë) fitohen nga 32 kg?

112. Mbi krahun e trekëndëshit barakrahës ABC është konstruktuar trekëndësh barabrinjës. Perimetri i ashtu të fituarës 2D formëështë 26 cm. Cakto brinjët e trekëndëshave, nëse baza e trekëndëshit barakrahës është për 2 cm më e vogël se krahu.

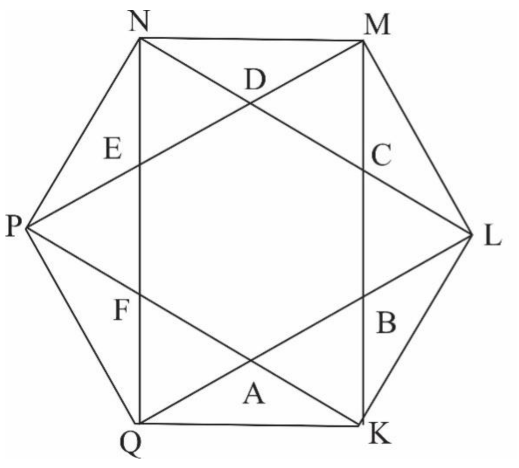
113. Në trekëndëshin barakrahës ABC $(\overleftarrow{AC}=\overleftarrow{BC})$ pika D është mes Ii segmentit AB. Perimetri i $\Delta\, ABC$ është 36 cm, e perimetri i $\Delta\, ADC$ është 24 cm. Cakto gjatësinë e segmentit $\overline{CD}$.

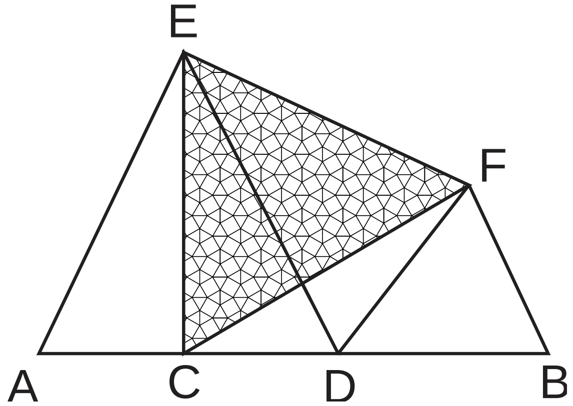
114. Janë dhënë 5 pika në rrafsh, ashtu që asnjëra nga tre pikat nuk shtrihen në të njëjtën drejtëz. Sa trekëndësha të ndryshëm janë formuar nga ato tre pika?

115. Кubi me tehun 1 mështë prerë në kube të vogla me tehe 1 mm. Sa metra do të jetë e lartë shtylla nëse të gjitha kubet e vogla renditen njëra mbi tjetrën?

116. Përdëfto se bisektrisa e këndit të jashtëm në kulmin e trekëndëshit barakrahës është paralele me bazën e saj.

ZGJIDHJE





Zgjidhje 1: Genci ka 250 denarë, e motra e tij ka 50 denarë.

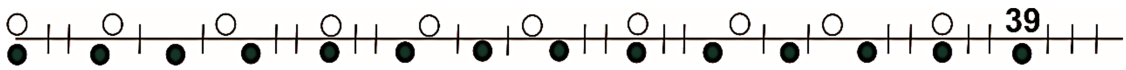
Zgjidhje 2:

a) Të theksojmë së pari se $A = 1$. Prej këtu, $B + BC + BCD = 884$, për shkak se $B = 7$. Kështu, $C + CD = 107$, që tërheq se $C = 9$ dhe $D = 8$. D.m.th deshifrimi jep:
$1 + 17 + 179 + 1798 = 1995$.

b) Përsëri $A = 1$, prej ku fitohet barazimi $B + BB + BBC = 985$. Kjo tërheq se $B = 8$ dhe $C = 9$. D.m.th deshifrimi jep:
$1 + 18 + 88 + 1889 = 1996$.

Zgjidhje 3: Pasi që në çdo dy djem përgjigjen tre vajza, në çdo 10 djem ka nga 15 vajza. Sipas kësaj djem ka 10 herë më shumë se arsimtarë,e vajza ka 15 herë më shumë se arsimtarë. Përfundojmë se nxënës dhe arsimtarë ka 26 herë më shumë se sa arsimtarë. Prej këtu, arsimtarë ka 936 : 26 = 36, djem ka 360, e vajza 540.

Zgjidhje 4: Në drejtëz me rrathë të zbrazët i shënojmë të rrahurat e kambanës së parë, e me rrathë të plotë të rrahura te kambanës së dytë Vërejmë se të rrahurat e parë, të shtatë,trembëdhjetë dhe të nëntëmbëdhjetë janë të njëkohësishme për të dyja kambana dhe ato i numërojmë sit ë rrahura veçmas. Me numërim të drejtpërdrejtë fitojmë se nga e para deri te e njëzeta e rrahur e kambanës kanë kaluar saktë 39 sekonda.



Zgjidhje 5: Me mbledhje të barazimeve $a + b = 332$, $a + c = 408$ dhe $b + c = 466$ fitojmë se $2a + 2b + 2c = 1206$, gjegjësish $a + b + c = 603$. Me zbritje të një të parët nga tre barazimet nga i fundit, përfundojmë se $c = 271$, $b = 195$ dhe $a = 137$.

Zgjidhje: Nëse ka patur x cjapë, atëherë dele ka patur $560 - x$. Sipas kushtit të detyrës, $(x + 16) * 15 = 560 - x$, prej ku fitohet $x = 20$. D.m.th, në kope në fillim ka patur 20 dhi (cjape) dhe 540 dele.

Zgjidhje 7: Të shënojmë të pjesëtueshmin me a. Atëherë, $a = 48n + 36 = 16(4n + 2) + + 4$. Mbetja gjatë pjesëtimit me 16 është 4.

Zgjidhje 8: Kushti i dhënë është $\overline{AA} + \overline{BCB} = \overline{DEED}$. Prej këtu, $D = 1$, $B = 9$ dhe $E = 0$. Pasi që numri katërshifroreështë 1001, fitojmë se $A = 2$, $C = 7$. D.m.th numrat e kërkuar janë: 22, 979 dhe 1001.

Zgjidhje 9: $1 : (\frac{1}{12} - \frac{1}{18}) = 36$ nxënës.

Zgjidhje 10: Është dhënë barazimi i shifruar: $3\cdot 1{*}{*}{*}{*}{*} = {*}{*}{*}{*}{*}1$. Përfundojmë se numri i kërkuar përfundon me numrin 7, por edhe shifra e parafundit në anën e djathtë të barazimit është 7. Kështu fitojmë: $3\cdot 1{*}{*}{*}{*}7 = {*}{*}{*}{*}71$. Prej këtu shifra e parafundit e numrit të kërkuar është5. Tani kemi: $3\cdot 1\,{*}{*}{*}57 = {*}{*}{*}571$. Me të menduar të ngjashëm e zbulojmë shifrën vijuese 8, dhe kemi: $3\cdot 1{*}{*}857 = {*}{*}8571$ e kështu me radhë. Numri i kërkuar është 142857. Me të vërtetë, $3\cdot 142857 = 428571$.

Zgjidhje 11: $10^{1999} - 7 = 1000...00 - 7 = 999...93$, gjatë kësaj rezultati ka gjithsej 1998 shifra 9. Shihet qartë se ky numër është i pjesëtueshëm me 3, dhe gjatë kësaj $999...93 : 3 = 333...31$. Numri i fundit nuk është i pjesëtueshëm me 9 sepse shuma e shifrave të tij nuk është i pjesëtueshëm me 9, prandaj numri i dhënë nuk është i pjesëtueshëm me 27.

Zgjidhje 12: Pasi që $3^4 = 9\cdot 9$, duhet ta vërtetojmë pjesëtueshmërinë me 9, pastaj numrin e dhënë e pjesëtojmë me 9 dhe të vërtetohet kur herësi i dhënë përsëri është i pjesëtueshëm me 9
Të vërejmë se $10^{2n} - 1 = 1000\ldots - 1 = 999\ldots 99$, ku ka gjithsej $2n$ nëntëshe. Pasi që $3^4 = 9\cdot 9$ dhe $(10^{2n} - 1) : 9 = 111\ldots 11$ (saktë $2n$ njëshe), përfundojmë se numrat e kërkuar n janë ata të formës $n = 9k,\ k \in \mathbb{N}$.

Zgjidhje 13: $120 : (320 - 260) = 2$ minuta

Zgjidhje 14: Me 3 janë të pjesëtueshëm 33 numra më të vegjël se 100, me 5 janë të pjesëtueshëm 20 numra më të vegjël se 100, e me 3 dhe 5 (gjegjësisht me 15) janë të pjesëtueshëm 6 numra më të vegjël se 100. Pasi që $100 - (33 + 20 - 6) = 53,\ 53$ përfundojmë se as me 3 as me 5 nuk janë të pjesëtueshëm saktë 53 numra më të vegjël se 100.

Zgjidhje 15: Nga 6 karrige kanë patur $(46 - 4\cdot 10) : 2 = 3$ barka, e nga 4 karrige $10 - 3 = 7$ barka.

Zgjidhje 16: Pasi që 36 : (1− 2/5 − 3/5 − 2/5)=36 : 9/25=36 *25/9=100, përfundojmë se libri ka pasë 100 faqe.

Zgjidhje 17: Ato janë numrat: 219960, 719964 dhe 319668.

Zgjidhje 18: Duke shfrytëzuar se numri është i pjesëtueshëm me 3 dhe me 4. Zgjidhjet janë: 1991160, 1994460, 1997760, 1992264, 1995564, 1998864, 1990068, 1993368, 1996668 dhe 1999968.

Zgjidhje 19: Le të jenë gjatësitë e brinjëve $x - 1$, x dhe $x + 1$. Nga $4(x - 1 + x + x + 1) =$ $= 60$ fitohet $3x = 15$. Brinjët janë të gjata 4 cm, 5 cm dhe 6 cm, përkatësisht. Prej këtu kemi se P = 2(5*6 + 5*4 + 6*4), gjegjësisht P = 148 cm^2, derisa V=4*6*5, gjegjësisht V = 120 cm^3.

Zgjidhje 20: Së bashku të tretë kanë patur gjithsej $(32+102+100):2=117$ kg. D.m.th viçi ka pasë $117-32=85$ kg, cjapi $117-102=15$ kg, e qengji $117-100=17$ kg.

Zgjidhje 21: 252, 414, 666 dhe 828.

Zgjidhje 22: 262.

Zgjidhje 23: Ta shënojmë numrin e kërkuar me $\overline{abc}$ ku a, b dhe c, përkatësisht, janë shifrat e qindësheve, dhjetësheve dhe njësheve. Sipas kushtit, $\overline{abc}=257\cdot q+47$ për ndonjë $q\in\{1,2,3\}$. Kushti plotësuese $a+b+c=12$ tërheq se $q=2$. Numri i kërkuar është $257\cdot 2+47=561$.

Zgjidhje 24: Sipas kushtit të detyrës, njëri nga numrat është10herë më i madh se tjetri. Nga këtu numri më i vogël është i barabartë me $374:(10+1)=34$, e më i madhi është 340.

Zgjidhje 25: Numri $\overline{A1996B}$ është i pjesëtueshëm me 8 dhe 9. Nga pjesëtueshmëria me 8 rrjedh se mbarimi i tij treshifroreështë 960 ose 968. Pjesëtueshmëria me 9 tërheq se numri $\overline{A1996B}$ është 219960 ose 319968. D.m.th zgjidhjet janë: $A=2$, $B=0$ dhe $A=3$, $B=8$.

Zgjidhje 26: Nëse numër të tillë zmadhojmë për 1, numri i fituar është i pjesëtueshëm me 2, me 3, me 4 dhe me 5. Pasi që $\text{SHVP}(2,3,4,5)=60$, numrat e kërkuar janë të llojit $60k-1$ ku $k\in\mathbb{N}_0$.
Jobarazimi plotësues $100<60k-1<200$ është e plotësuar vetëm për $k=2$ dhe $k=3$. Numrat e kërkuar janë 116 dhe 179.

Zgjidhje 27: Pasi që $\text{SHVP}(3,4,5,6,7)=420$, numri i kërkuar është numri katërshifrorë më i madh i formës $420k+2$, ku $k\in\mathbb{N}_0$. Drejtpërdrejtë provojmë se për $k=23$ vlen $420k+2=9662$, derisa për $k=24$ vlen $420k+2=10082$. Sipas kësaj, numri i kërkuar është 9662.

Zgjidhje 28: Nevojë dhe mjaftim për numër të formës 11111.....1 të jetë i pjesëtueshëm me 11 është që të ketë numër çift të shifrave. Nevojë dhe mjaftim për pjesëtueshmëri me 3 është që shuma e shifrave të jetë e pjesëtueshme me 3. Numri më i vogël me vetitë e theksuara është numri 111111.

Zgjidhje 29: Ta zbërthejmë 3024 në shumëzues të thjeshtë: $3024=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7$. Ana e majtë e barazimit është prodhim nga katër numra të njëpasnjëshëm të plotë. Të shënojmë se $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7=6\cdot 7\cdot 8\cdot 9=(-6)\cdot(-7)\cdot(-8)\cdot(-9)$. Dhe kështu, nga shënimet $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)=9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$ dhe $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)=$ $=(-6)\cdot(-7)\cdot(-8)\cdot(-9)$, përkatësisht, i fitojmë zgjidhjet e vetme $x=11$ dhe $x=-4$.

Zgjidhje 30: Nga zbërthimi $8316 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$ përfundojmë se numri i kërkuar është $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$. Kështu që $8316 \cdot 231 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = (2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11)^2 =$ $= 1386^2$.

Zgjidhje 31: Ka dy mundësi për prodhimin: 77777 ose 777777. Në rastin e parë, nga zbërthimi $77777 = 7 \cdot 41 \cdot 271$, përfundojmë se zgjidhje e vetme është $287 \cdot 271 = 77777$. Në rastin e dytë nuk ka zgjidhje.

Zgjidhje 32: Ti shënojmë me m, n dhe p, përkatësisht, numrin e kabinave me 2, 3 dhe 4 shtretër. Atëherë $2m + 3n + 4p = 84$. Prej këtu $3n$ është numër çift. D.m.th, n është numër çif.

Zgjidhje 33: Shtrëngimi i dorës është relacion simetrik. Në çdo shtrëngim dore marrin pjesë dy persona, gjegjësisht çdo shtrëngim dore e shton numrin e përgjithshëm të shtrëngim dore për dy. D,m.th, numri i përgjithshëm i shtrëngim duarve, të cilën e kanë bërë të gjithë njerëzit përherë deri tani në këtë moment, është numër çift. Për shkak të kësaj numri i njerëzve të cilët në numër tek herë janë përshëndetur me dorë shtrëngim, me siguri është numër çift.

Zgjidhje 34: $(63 - 37 - 10 - 6) : 2 = 5$ vjet.

Zgjidhje 35: Ka katër vargje të tilla: 1, 4, 5, 9, 14, 23, 37; 4, 1, 5, 6, 11, 17, 28; 2, 3, 5, 8, 13, 21,34; dhe 3, 2, 7, 9, 16, 25,41.

Zgjidhje 36: $(450 - 2*15) : (15 + 20) = 12$ ditë.

Zgjidhje 37: Nga kushti $a = 4k + 2 = 5s + 2$, ku $k, s \in \mathbb{N}_0$, rrjedh se $4k = 5s$. D.m.th $k = 5n$ për ndonjë $n \in \mathbb{N}_0$. Prej këtu, numri i kërkuar $a$është numri më i vogël i formës $20n + 2$, $n \in \mathbb{N}_0$, i cili është i pjesëtueshëm me 6. Ky është numri 42.

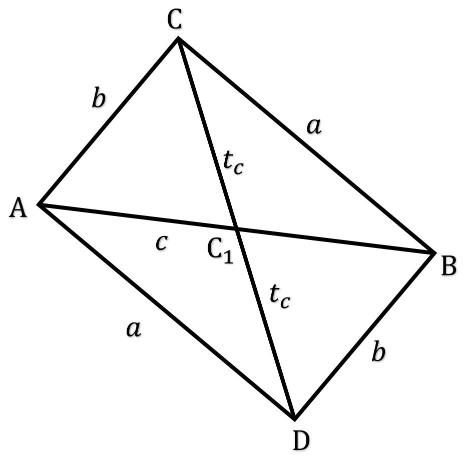
Zgjidhje 38: Drejtpërdrejtë provojmë se numri më i vogël natyrorë i shënuar vetëm me dyshe i cili është shumëfish i 814 është numri 222222. Sepse $222222 : 814 = 273$, numri i kërkuar është 273.

Zgjidhje 39: çdo lidhje e dy telefonave siguron dy lidhje direkte. Sipas kushtit, numri i përgjithshëm i lidhjeve direkte duhet të jetë $1995 \cdot 7$, qëështë numër tek (jo çift). D.m.th lidhja e përshkruar nuk është e mundur.

Zgjidhje 40: Le të jetë gjatësia e drejtkëndëshit $4x$. Atëherë gjerësia është $3x$. Pasi që syprina $P = 4x \cdot 3x = 108$, fitojmë se $12x^2 = 108$, gjegjësisht $x = 3$. D.m.th gjatësia është 12 cm, e gjerësia 9 cm. Perimetri është 42 cm.

Zgjidhje 41: Katrori i prerë ka brinjë të gjatë 9 cm, e brinjët e drejtkëndëshit të prerë janë 9 cm dhe 7 cm (pse?). Prej këtu, brinja e letrës është $(9 + 7)$ cm. Syprina e kërkuar është 256 cm^2.

Zgjidhje 42: Le të jetë $a = 29$ cm, $b = 27$ cm dhe $t_c = \overline{CC_1} = 26$ cm. Le të jetë D pikë kolineare me C dhe C_1, ashtu që $\overline{CD} = 2t_c$. Atëherë $\Delta\, AC_1C \cong BC_1D$ dhe $\Delta\, AC_1D \cong BC_1C$ (pasi që $\overline{AC_1} = \overline{C_1B} = \frac{c}{2}, \overline{CC_1} = \overline{C_1D} = t_c$ dhe $AC_1C = DC_1B$). D.m.th katërkëndëshi $ADBC$ është paralelogram. Për këtë syprina e kërkuar është $P_{\Delta\, ABC} = \frac{P_{\Delta\, ADBC}}{2} = \frac{2P_{\Delta\, ADC}}{2} =$
$= P_{\Delta\, ADC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-2t_c)}$ ku $s = \frac{a+b+2t_c}{2} = 54$ cm.
Fitojmë se$P_{\Delta\, ABC} = \sqrt{54 \cdot 27 \cdot 25 \cdot 2} = 270$ cm^2.



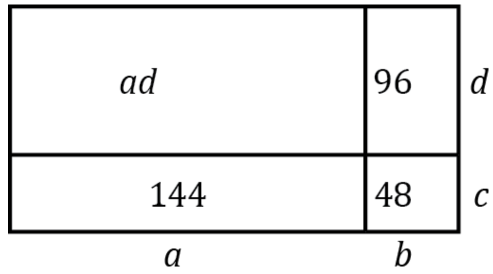
Zgjidhje 43: Pasi që perimetrat e katrorit dhe drejtkëndëshit janë të barabarta, gjatësia e brinjës të katrorit është 50 cm. D.m.th syprina e katrorit 2500 cm^2.

Zgjidhje 44: Nëse a është baza, e b krahu i trekëndëshit. Sipas kushtit $a + 2b = 64$ dhe $b - a = 11$. Me mbledhje të këtyre barazimeve fitojmë $3b = 75$, dhe nga këtu $b = 25$ cm. Rrjedh se $a = 14$ cm. Nga teorema e Pitagorës për lartësinë të lëshuar në bazë fitojmë

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{625 - 49} = 24 \text{ cm},$$

Dhe syprina e trekëndëshit është $P = \frac{ah}{2} = 168$ cm^2.

Zgjidhje 45: Ti shënojmë gjatësitë (në centimetra) të brinjëve të drejtkëndëshave të fituar. Atëherë, $a{\cdot}c = 144$, $b{\cdot}c = 96$ dhe $b{\cdot}d = 96$. Me shumëzim të barazimit të tretë dhe të parë, fitojmë $a{\cdot}c{\cdot}b{\cdot}d = 144 \cdot 96$. Pasi që $b{\cdot}c = 48$, kemi $a{\cdot}d = 288$. D.m.th syprina e katrorit është $144 + 48 + 96 + 288 = 576$ cm^2, e brinja është 24 cm.

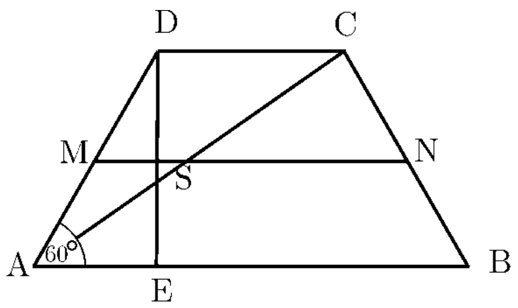


Zgjidhje 46: Ta shënojmë vijën e mesme të trapezit me MN, e prerjen e MN dhe diagonalen AC me S. Sipas kushtit të detyrës, $\overline{MS} = 2$ cm dhe $\overline{SN} = 5$ cm. Pasi që MS është vijë e mesme për trekëndëshin ACD, kemi se $\overline{DC} = 2 \cdot \overline{MS} = 4$ cm. Ngjashëm

$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{SN} = 10$ cm.

a) Perimetri i trapezit është $L = 26$ cm.

b) Le të jetë DE lartësia e trapezit e lëshuar në bazë. Atëherë $\overline{AE} = \frac{10-4}{2} = 3$ cm. D.m.th ΔAED është kënddrejtë me katete 6 cm dhe 3 cm, që tërheq se $EAD = 60°$ dhe $ADC = 180° - 60° = 120°$.



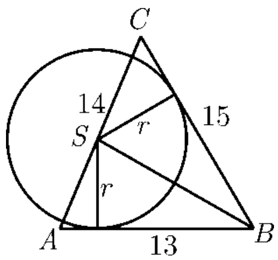
Zgjidhje 47: Me shenjat e foto. 2, perimetri më i vogël i drejtkëndëshit është $20 + 2x$, e perimetri më i madhështë $20 + 20 - 2x$. Nga kushti i detyrës fitojmë barazimin $2(40 - 2x) = 3(20 + 2x)$, zgjidhja e të cilit është $x = 2$ cm. Perimetrat e kërkuar janë 24 cm dhe 36 cm.

Zgjidhje 48: Ta shqyrtojmë trekëndëshin kënddrejtë AED ku E është pika e fundit e lartësisë të lëshuar nga kulmi D. Nga ajo se $EAD = \alpha = 60°$ rrjedh se $AED = 30°$, prandaj $\overline{AE} = \frac{c}{2} = 0{,}75$ dm. Pasi që trapezi është barakrahës, kemi $a = b + 2\overline{AE}$, gjegjësisht $b = 2{,}2$ dm. Kështu fitojmë se $m = \frac{a+b}{2} = \frac{3{,}7+2{,}2}{2} = 2{,}95$ dm.

Zgjidhje 49: $P = 25$ cm^2.

Zgjidhje 50: Le të jetë $a = 15$ cm, $b = 14$ cm dhe $c = 13$ cm. Syprina e trekëndëshit është $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84$ cm^2.

Le të jetë S qendra e vijës rrethore të theksuar dhe r është rrezja e tij. Atëherë $P = P_{\Delta ABS} + P_{\Delta SBC} = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2}$, gjegjësisht $84 = 14r$. Rrjedh se $r = 6$ cm.

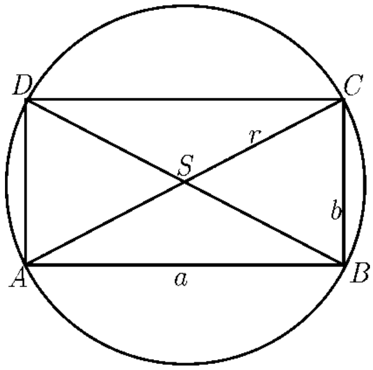


Zgjidhje 51:

a) Perimetër më të vogël të mundshëm ka katrori me brinjë 30 cm.

b) Perimetër më të madh të mundur ka drejtkëndëshi me dimensione 3 cm dhe 300 cm.

Zgjidhje 52: Le të jenë $a > b$ dy brinjë fqinje të drejtkëndëshit. Atëherë $\frac{a}{2} = 4 + \frac{b}{2}$, gjegjësisht $a = 8 + b$. Gjatë kësaj $2a + 2b = 56$, gjegjësisht $a + b = 28$. Prej këtu fitohet $8 + 2b = 28$, prandaj $b = 10$ cm. D.m.th $a = 18$ cm, e syprina është $P = 180$ cm^2.



Zgjidhje 53: Shihet qartë se njëra brinjë e drejtkëndëshit është dy herë më e gjatë se tjetra. Nëse gjatësia e brinjës më të vogël e shënojmë me x, nga kushti i detyrës rrjedh se $x = 16$ cm. D.m.th perimetri i drejtkëndëshit është për 32 cm më i madh se perimetri i njërit nga katrorët.

Zgjidhje 54: Djali dhe vajza mund të dalin në kat të njëjtë ose në kate të ndryshme. Në rastin e parë kemi 5 mënyra të ndryshme. (Djali dhe vajza dalin në njërin nga 5 katet.) Në rastin e dytë ashensori mund të zbrazet në $5 \cdot 4$ mënyra. D.m.th gjithsej ka 25 mënyra.

Zgjidhje 55:

a) Fillimisht i renditim monistrat e bardhë. Ata të gjithë janë identik prandaj ekziston vetëm një radhitje. Ndërmjet dy të zgjedhur monistra të bardhë, radhitja e një të verdhe, një të kaltër dhe një të kuqe mund të bëhet në6 mënyra. Për shkak të kushtit çdo katër monistra të njëpasnjëshëm të jenë me ngjyrë të ndryshme, kjo renditje e zgjedhur është e njëjtë për të gjitha treshet e mbetura nga e verdha, kaltra dhe e kuqja ndërmjet dy monistrave të njëpasnjëshëm të bardhë. Duke e pasur parasysh edhe mundësinë për rrotullimin e gjerdanit për 180°, numri i gjerdaneve të ndryshme është 6 : 2=3.

b) Përgjigja është e njëjtë si nën a), sepse numri i katërsheve të njëpasnjëshme monistra nuk e rrit numrin e mundësive të ndryshme.

Zgjidhje 56: Shuma e shifrave të secilit nga numrat e kërkuar duhet të jetë 9 (sepse $3 + 3 + 3 + 3 < 18$). Numra të këtillë ka 16. Gjegjësisht 12 prej tyre janë shënuar me shifrat: 1, 2, 3 dhe 3 (në ndonjë rend), e 4 prej tyre janë shënuar me shifrat 2, 2, 2 dhe 3 (në ndonjë renditje).

Zgjidhje 57: Personit të parë mund ti japim 2 gjësende në $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$ mënyra. Nga 8 gjësendet e tjera të mbetura, personit të dytë mund të japim 3 gjësende në $\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56$ mënyra. Personi i tretë do ti merr 4 gjësendet e mbetura. Secili nga 45 mënyrave nga ndarja e parë mundet të kombinohet me vullnet me secilin nga 56 mënyrat të ndarjes së dytë, prandaj numri i përgjithshëm i mundësive është: $45 \cdot 56 = 2520$.

Zgjidhje 58: Kur Ema ka marrë $\frac{1}{10}$, ka mbetur $\frac{9}{10}$ e ëmbëlsirës. Sara ka marrë $\frac{1}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$ e ëmbëlsirës, e Hava $\frac{1}{8}$ e $\frac{8}{10}$, gjegjësisht $\frac{1}{10}$ ëmbëlsirës. Në mënyrë të ngjashme përfundojmë se Ina dhe Gazi kanë marrë nga $\frac{1}{10}$ e kulaçit. Për Artiolen dhe fëmijët e saj ka ngelë gjysma e kulaçit.

Zgjidhje 59: Nga kushti i fitojmë barazimet $b + c = \frac{5}{2}$, $a + c = \frac{59}{6}$ dhe $a + b = \frac{5}{3}$. Me mbledhje të këtyre tre barazimeve dhe pjesëtim me 2 fitojmë se $a + b + c = 7$. D.m.th $a = 7 - \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$, $b = 7 - \frac{59}{6} = -\frac{17}{6}$ dhe $c = 7 - \frac{5}{3} = \frac{16}{3}$.

Zgjidhje 60: Pasi që $\frac{3}{8}$ nga molla dhe $\frac{3}{10}$ nga dardhat peshojnë 60 kilogram, kemi se $\frac{9}{8}$ mollë dhe $\frac{9}{10}$ dardha peshojnë 180 kilogram. D.m.th $\frac{1}{8}$ mollë kanë masë të njëjtë me $\frac{1}{10}$ dardha. Prej këtu del se në shitore nga fillimi ka pasë 80 kilogram mollë dhe 100 kilogram dardha.

Zgjidhje 61: a) $8*(18 + 5) = 184$ km B) $8*(18 - 5) = 104$ km

Zgjidhje 62: E para është e gjatë 153 cm, e dyta është e gjatë 259 cm.

Zgjidhje 63: $(700 + 740 + 760 + 800) : 3 = 1000$. Libri i parë kushton $1000 - 700 = 300$ denarë, i dyti $1000 - 740 = 260$ denarë, I treti $1000 - 760 = 240$ denarë dhe i katërti $1000 - 800 = 200$ denarë.

Zgjidhje 64: Në 420 gramë tretje ka patur $420 \cdot 0{,}2 = 84$ gram kripë. Në tretjen e re në 300 gram kjo kripë paraqet pjesë të $84 : 300 = 0{,}28$. D.m.th, tani ka 300 gram tretje me 28 % kripë..

Zgjidhje 65: Rrushi i thatë fitohet me avullim të ujit nga rrushi i freskët. Sasia e të ashtuquajturës „materie e thatë" ngel e pandryshuar. Nga rrushi thatë „materia e thatë" përbëjnë 88 %. D.m.th nevojiten $16 \cdot 0{,}88 : 0{,}20 = 70{,}4$ kilogram rrush të freskët.

Zgjidhje 66: Le të jetë syprina e arës (në hektarë) e shënuar me x. Ditën e parë traktoristi ka lëvruar $7/10\ x$, ditën e dytë ka lëvruar $7/5 * 3/10\ x = 9/50\ x$, e ditën e tretë ka lëvruar $x - 7/10\ x - 9/50\ x = 6/50\ x$. Pasi që $9/50\ x - 6/50\ x = 11{,}2$, fitojmë se $x = 186\ 2/3$.

Zgjidhje 67: Të shënojmë me x numrin e punëtorëve plotësues. Atëherë kemi $x : 44 = (20 - 4) : (20 - 4 - 5)$, prej ku fitohet se $x = 64$.

Zgjidhje 68: Nëse në ato gjashtë klasë ka n nxënës, atëherë në klasat tjera ka për $0{,}15n$ më shumë. Pasi që $0{,}15n$ është numër i plotë, n është i pjesëtueshëm me 20 (gjegjësisht $0{,}15=3/20$). Nga ana tjetër, n është i pjesëtueshëm me 6 (për shkak të numrit të njëjtë të nxënësve në ato gjashtë klasë). D.m.th n është i pjesëtueshëm me 60. Pasi që n është numër më i madh se 150 dhe më i vogël se 200, numri është180. Në shkollë ka 387 nxënës.

Zgjidhje 69: E sigurtë është se Serjani gënjen: gjegjësisht, nëse deklarata e saj është e saktë, atëherë deklarata e Anikës është jo e vërtetë, nga çka do të rrjedhë se Bibi nuk gënjen, dhe atëherë deklarata e Serjanit do të ishte jo e saktë. Pasi Serjani gënjen, Bibi nuk gënjen. D.m.th se deklarata e Anikës është jo e vërtetë.

Zgjidhje 70: Nga 1 janar deri 1 prill ka ose 90 ditë ose 91 ditë, varësisht nga ajo a është viti i veçantë ose jo. Nëse 1 janari dhe 1 prilli kanë qenë të enjten, atëherë numri i numri i ditëve ndërmjet këtyre datave ka qenë i pjesëtueshëm me 7. D.m.th bëhet fjalë për numrin 91, e viti ka qenë jo i rëndomtë. Secili vit jo i rëndomtë ka 52 javë edhe 2 ditë. Pasi që 2 janari ka qenë të premten, kjo do të thotë se në atë vit jo të rëndomtë ka pasë 53 të premte, e secili muaj ka pasë 4 ose 5 të premte. D.m.th 5 muaj kanë patur nga 5 të premte, e 7 muaj kanë patur nga 4 të premte.

Zgjidhje 71: Jolanda ditën e parë të muajit e ka kaluar në Paris, sepse nëse ajo e martë nuk është dita e parë në muaj, atëherë ajo është e marteja e parë pas të hënës së parë. Atëherë Jolanda do të ishte njëkohësisht edhe në Paris edhe në Florida, gjë që nuk është e mundur. Ditën e parë nga muaji i ardhshëm Jolanda ka qenë në Beograd. Dm.th, dy muaj të njëpasnjëshëm fillojnë me të martë gjegjësisht e mërkurë, që është e mundur vetëm nëse i pari nga ata dy muaj ka 29 ditë. Prej këtu përfundojmë se viti ka qenë i përjashtuar, dhe se 1 marsi ka qenë e mërkurë. D.m.th, Jolanda e ka kaluar 8 marsin në Venedik (e mërkura e parë pas të martës së parë).

Zgjidhje 72: 4 mace gjuajnë 4 mijë për 4 ditë, e 25 herë më shumë mace (100 mace) për numër të njëjtë ditësh gjuajnë 25 herë më shumë (gjegjësisht 100) minj. Përgjigje është për 4 ditë.

Zgjidhje 73: E mbushim tenxheren më të vogël (prej 7 litrash) dhe e kthejmë në më të madhen (prej 11 litrash). Përsëri e mbushim tenxheren më të vogël dhe nga ajo e rimbushim tenxheren më të madhe. Kështu në tenxheren e vogël ngelin 3 litra ujë. Atë sasi e derdhim në fuqinë, e zbrazim tenxheren e madhe dhe tërë procedurën e përsërisim edhe një herë.

Zgjidhje 74: Nga kushti rrjedh se $\frac{2}{3}\beta$ është kënd i drejtë, gjegjësisht $\frac{2}{3}\beta = 90°$. Prej këtu $\beta = 135°$, dhe $\alpha = 450°$.

Zgjidhje 75: Le të jetë brinja e rombit $\overline{AB} = \overline{AD} = a$, e diagonalet me $\overline{AC} = d_1$ dhe $\overline{BD} = d_2$. Atëherë vlejnë barazimet $R = \frac{a^2 d_1}{4P_{\Delta ABC}}$ dhe $r = \frac{a^2 d_2}{4P_{\Delta ABD}}$. Nëse me P e shënojmë syprinën e rombit, atëherë $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}P$ dhe $P_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}P$, prandaj $R = \frac{a^2 d_1}{2P}$ dhe $r = \frac{a^2 d_2}{2P}$, prej ku fitohet se $d_1 = \frac{2PR}{a^2}$ dhe $d_2 = \frac{2Pr}{a^2}$. Me zëvendësim të dy barazimeve të fundit në $P = \frac{d_1 d_2}{2}$ fitohet $P = \frac{4P^2 Rr}{2a^4}$, gjegjësisht $a^4 = 2PRr$. Kështu $a^2 = \sqrt{2PRr}$, prandaj $d_1 = \frac{2PR}{\sqrt{2PRr}} = \sqrt{\frac{2PR}{r}}$ dhe $d_2 = \frac{2PR}{\sqrt{2PRr}} = \sqrt{\frac{2Pr}{R}}$. Me zëvendësim të dy barazimeve të fundit në $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$ kemi $2\left(\frac{PR}{r} + \frac{Pr}{R}\right) = 4\sqrt{2PRr}$, prej ku me fuqizim fitohet $P^2\left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R}\right)^2 =$ $= 8PRr$, gjegjësisht $P = \frac{8Rr}{\left(\frac{R}{r}+\frac{r}{R}\right)^2}$.

Zgjidhje 76: Nga 9 pjesë të barabarta në segmentin MN, segmenti i parë përmban 2 pjesë, i dyti 3 dhe i treti 4. Nga mesi i segmentit të parë deri te mesi i segmentit të tretë ka 6 pjesë të tilla me gjithsejtë gjatësi 30 cm. D.m.th, e nënta nga gjatësia e segmentit MN është 5 cm, dhe kështu gjatësia e segmentit MN është saktë 45 cm.

Zgjidhje 77: $BC = 2$ *cm*, $AP = 4$ *cm*, $MN = 1$ *cm*.

Zgjidhje 78: Rombi $AECF$ le të ketë brinjë x. Kështu, $\overline{AE} = x$ dhe $\overline{EB} = 16 - x$. Pasi që $ABCD$ është drejtkëndësh, trekëndëshi EBC është kënddrejtë. Sipas teoremës së Pitagorës kemi

$$\overline{EC}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BC}^2, \text{т.е. } x^2 = 12^2 + (16 - x)^2.$$

Barazimi i fundit mund të shënohet në formë

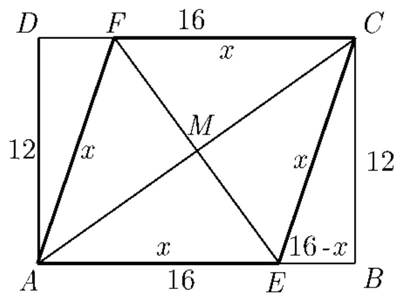
$$x^2 = 144 + 256 - 32x + x^2,$$

Prej ku fitojmë $32x = 400$, gjegjësisht $x = \frac{25}{2}$.

Do ti përdorim syprinat e drejtkëndëshit, rombit dhe trekëndëshit EBC. Pasi që $\overline{EB} = 16 - \frac{25}{2} = \frac{7}{2}$, syprina e rombit është gjysma e prodhimit të diagonaleve të tij, fitojmë:

$\frac{1}{2}\overline{EF} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} - 2\frac{1}{2}\overline{EB} \cdot \overline{BC}, \frac{1}{2}\overline{EF} \cdot 20 = 16 \cdot 12 - \frac{7}{2} \cdot 12, \frac{1}{2}EF \cdot 20 = 190 - 42.$

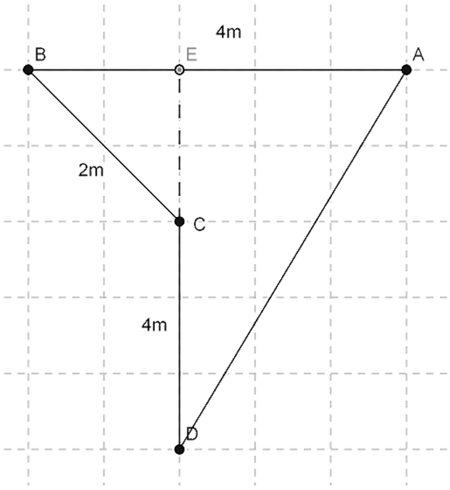
Nga barazimi i fundit rrjedh se $\overline{EF} = 15$ cm.



Zgjidhje 79: Pasi që $\alpha = 180° - \beta$, kemi $(180° - \beta) - \beta = 56°$. D.m.th $\beta = 62°$ dhe $\gamma = 28°$.

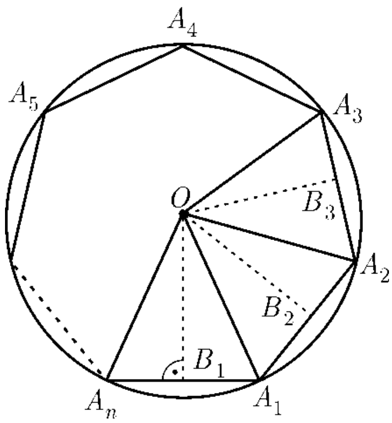
Zgjidhje 80: Gjatësitë e kateteve të trekëndëshit janë 12 cm dhe 16 cm, e hipotenuza është 20 cm. Rrezja e rrethit të jashtëshkruar është $R = \frac{c}{2} = 10$ cm, e syprina $P = 100\pi$ cm².

Zgjidhje 81: Trekëndëshi BCE është barakrahës kënddrejtë, prandaj $\overline{CE} = \overline{BE} = \sqrt{2}$ m. Gjatë kësaj $\overline{AE} = 4 - \sqrt{2}$, $\overline{DE} = 4 + \sqrt{2}$. D.m.th $\overline{AD} = \sqrt{\left(4-\sqrt{2}\right)^2 + \left(4+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16 - 8\sqrt{2} + 2 + 16 + 8\sqrt{2} + 2} = \sqrt{32+4} = 6$ m



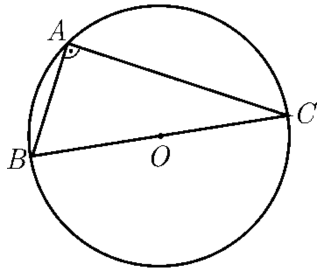
Zgjidhje 82: Pasi që një e dymbëdhjeta e këndit të rrafshtëështë 15°, për këndin α kemi se $\alpha = 5 \cdot 15° = 75°$. Këndi komplementarë i α është 15°.

Dëshmi 83: Le të jetë O qendër e simetrisë të shumëkëndëshit të rregullt (shih vizatimin). Nga ngjashmëria e trekëndëshave barakrahës OA_1A_2, OA_2A_3,..., OA_nA_1 fitojmë se edhe lartësitë e tyre të lëshuara nga kulmi O janë të barabarta, dhe shtrihen në vijë rrethore të njëjtë me qendër në O. Ajo është vija rrethore e jashtëshkruar në shumëkëndësh.



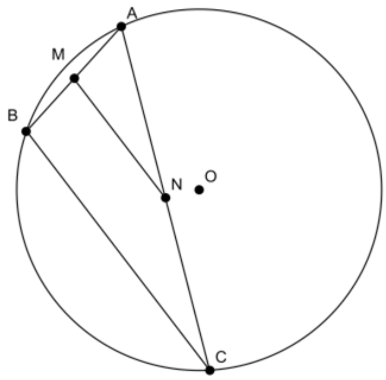
Zgjidhje 84: Këndi i kërkuar është 90°30′.

Zgjidhje 85: Pasi që ΔABC është kënddrejtë, vija rrethore është jashtëshkruar rreth tij dhe qendra e tij shtrihet në mes të hipotenuzës BC. Nga teorema e Pitagorës kemi se $\overline{BC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm. D.m.th, rrezja e vijës rrethore është $r = 5$ cm, e syprina e kërkuar është $P = 25\pi$ cm².



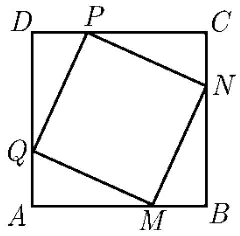
Zgjidhje 86: Nga $\alpha + \beta = 90°$ kemi $(180° - \alpha) + (180° - \beta) = 360 - (\alpha + \beta) = 270°$.

Zgjidhje 87: Le të jenë sekantat $\overline{AB} = 9$ cm dhe $\overline{AC} = 17$ cm dhe pikët e tyre të mesit janë M dhe N, përkatësisht. Segmenti MN është vijë e mesme në trekëndëshin ABC, prandaj $\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}$, gjegjësisht $\overline{BC} = 10$ cm. Sipas formulës së Heronit, $P_{\Delta ABC} = 36$ cm². Nga këtu $R = \frac{abc}{4P} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 17}{4 \cdot 36} = \frac{85}{8}$ cm.



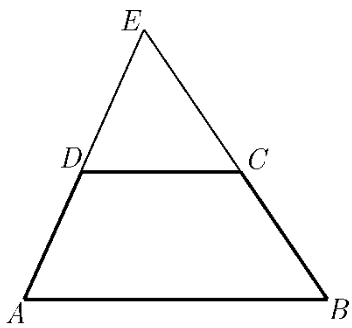
Zgjidhje 88: Pasi që dy kënde suplementare φ dhe θ kanë kënde komplementare, bëhet fjalë për kënde të drejta. D.m.th: $\varphi = \theta = 90°$ dhe $\alpha = \beta = 0°$.

Zgjidhje 89: Le të jetë në katrorin $ABCD$ i brendashkruar katrori $MNPQ$ ashtu që $\overline{AM}:\overline{MB} = 2:3 = k$. Nga $\overline{AM} = 2k$ dhe $\overline{MB} = 3k$ Fitojmë se $\overline{AB} = a = 5k$ dhe $\overline{MN} = a_1 = \sqrt{(3k)^2 + (2k)^2} = \sqrt{13k^2}$. Për raportin e syprinave kemi $\frac{P}{P_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{25k^2}{13k^2} = \frac{25}{13}$.



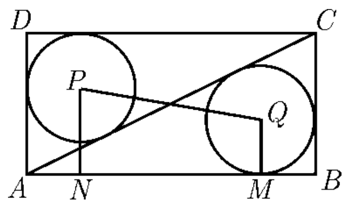
Zgjidhje 90: Le të jetë $\overline{AD} = c = 8$ dhe $\overline{DE} = x$ ku E është prerja (vazhdimet e) krahëve të trapezit.

Nga ngjashmëria e ΔABE ΔDCE kemi $\frac{25}{15} = \frac{8+x}{8}$. Nga këtu $x = 12$. Sipas kushtit të detyrës $AEB = 90$. Duke e zbatuar teoremën e Pitagorës për trekëndësh kënddrejtë ΔDCE, fitojmë se $\overline{CE} = 9$. Ngjashëm, për trekëndëshin kënddrejtë ΔABE kemi $\overline{BE} = 15$. Prej këtu $\overline{BC} = 6$. Perimetri i trapezit është $L = 54$. Për syprinën e trapezit fitojmë $P = P_{ABE} - P_{DCE} = 150 - 54 = 96$.



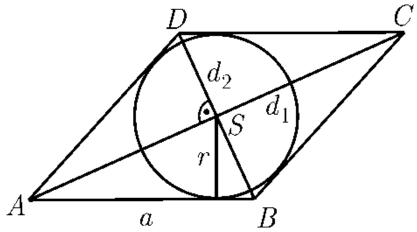
Zgjidhje 91: Sipas kushtit, $(180 - \alpha) - \alpha = \alpha - (90° - \alpha)$. Prej këtu $\alpha = 67°30'$.

Zgjidhje 92: Sipas teoremës së Pitagorës, $\overline{AC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ cm. Nga formula $P = rs$ për rrezet të vijave rrethore të brendashkruar del se janë $r = 2$ cm. Katërkëndëshi $NMQP$ është trapez kënddrejtë, ku me P dhe Q janë shënuar qendrat e vijave rrethore të brendashkruar, e me N dhe M janë shënuar projektimet normale të tyre në brinjën AB, përkatësisht. Nga këtu $\overline{PQ} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ cm.

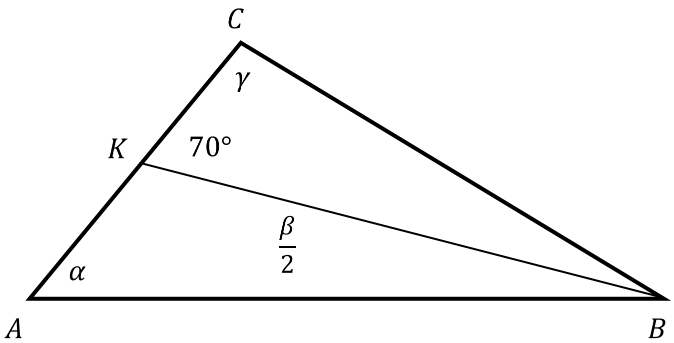


Zgjidhje 93: Nëse trekëndëshi është kënddrejtë, atëherë shuma ë këndeve të ngushtë të tij të brendshëm është e barabartë me këndin e tretë(të drejtë)gjegjësisht, një kënd i ngushtë është e barabartë në ndryshimin e këndit të drejtë dhe këndit tjetër të ngushtë.
E kundërta, le të vlejë $\alpha = \beta + \gamma$. Pasi që $\alpha + (\beta + \gamma) = 180°$, kemi se $\alpha + \alpha = 180°$, gjegjësisht këndi $\alpha = 90°$. Rrjedh se trekëndëshi është kënddrejtë, Nëse $\alpha = \beta - \gamma$, atëherë $\alpha + \gamma = \beta$, dhe sinë rastin paraprak, përdëftojmë se $\beta = 90°$.

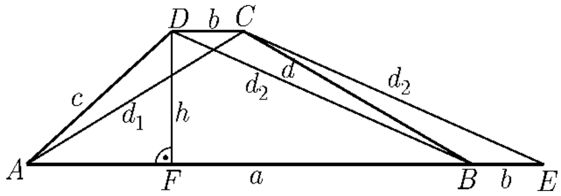
Zgjidhje 94: E njohur është se $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$, prej ku $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$. Pasi që $h = 2r$, për syprinën e rombit vlen barazimi $\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = a \cdot 2r$, prej ku fitohet se $d_1 \cdot d_2 = 4ar$. Prej kushtit të detyrës kemi $6a = d_1 + d_2$. Me fuqizim në katrorë të barazimit dhe me zëvendësim të $d_1 \cdot d_2 = 4ar$ fitohet $4a^2 - ar = 0$, gjegjësisht $a(4a - r) = 0$. Prej këtu, $a = \frac{r}{4}$.



Zgjidhje 95: Këndi BKA është suplementarë me këndin $\measuredangle BKC$, dhe sipas kësaj $\measuredangle BKA = 110°$. Si kënd i jashtëm për trekëndëshin ABK (shih vizatimin) $\measuredangle BKC = \alpha + \frac{\beta}{2}$ dhe prej këtu $\alpha = 70° - \frac{\beta}{2}$. Ngjashëm, $\measuredangle BKA$ është kënd i jashtëm i trekëndëshit BCK, prandaj $\gamma = 110° - \frac{\beta}{2}$. Sipas kësaj $\gamma - \alpha = 110° - \frac{\beta}{2} - \left(70° - \frac{\beta}{2}\right) = 40°$.



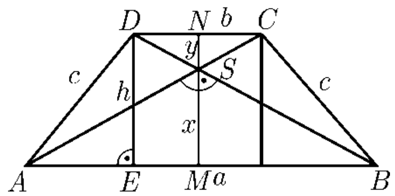
Zgjidhje 96: Le të jetë E pikë e vazhdimit të AB (nëpërmjet kulmit B) ashtu që $\overline{BE} = b$. Atëherë $BECD$ është paralelogram dhe $\overline{CE} = d_2$. Të shënojmë se syprina e trapezit është e barabartë me syprinën e trekëndëshit AEC. Pasi që na janë të njohura të gjitha brinjët e trekëndëshit ΔAEC (ato janë $a+b$, d_1 dhe d_2), syprina e tij mund ta njehsohet me formulën e Heronit. Kemi $s = \frac{21+17+10}{2} = 24$, prandaj $P_{ABCD} = P_{\Delta AEC} = \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} =$ $= 84$ cm².



Zgjidhje 97: Le të jetë $\alpha_1 + \beta_1 = 270°$. Pasi që $\alpha_1 = \beta + \gamma$ dhe $\beta_1 = \alpha + \gamma$, fitojmë se $\alpha_1 + \beta_1 = (\beta + \gamma + \alpha) + \gamma = 180° + \gamma$, gjegjësisht $270° = 180° + \gamma$. Prej këtu $\gamma = 90°$.

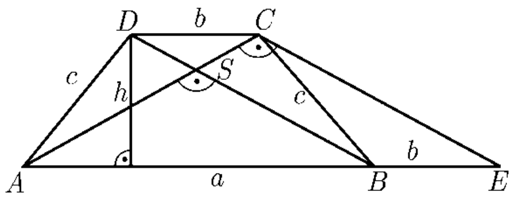
Zgjidhje 98:

Mënyra e parë: Ta shënojmë prerjen e diagonaleve me S. Atëherë ΔABS është barakrahës dhe kënddrejtë dhe me lartësi $\overline{SM} = x$. Nga teorema e Euklidit rrjedh $x^2 = \overline{AM} \cdot \overline{MB}$, gjegjësisht $x = 10$ cm. Në mënyrë analoge prej ΔCDS fitohet se $y = \overline{SN} = 6$ cm. Definitivisht, $h = x + y = 16$ cm, prandaj $P = \frac{(20+12) \cdot 16}{2} = 256$ cm².

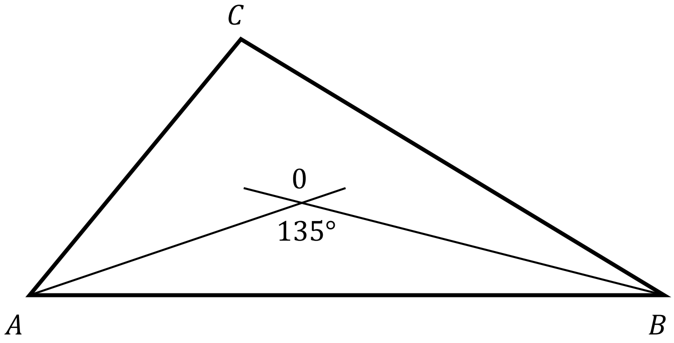


Mënyra e dytë: Nëpër pikën C të tërheqim drejtëz paralele me BD deri te prerja e E me vazhdimin e AB. Atëherë $BECD$ është paralelogram, e ΔAEC është barakrahës kënddrejtë me hipotenuzë $\overline{AE} = 32$ cm.

Sipas teoremës së Euklidit, $h^2 = \left(\frac{32}{2}\right)^2$, gjegjësisht $h = 16$ cm. Për syprinën e trapezit kemi $P = \frac{(20+12) \cdot 16}{2} = 256$ cm².

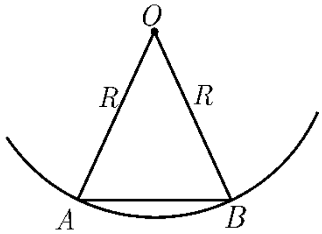


Zgjidhje 99: Le të jenë simetralet e këndeve të brendshme α dhe β të trekëndëshit ABC të prerë në pikën O (shih vizatimin) dhe $\sphericalangle AOB = 135°$. Nga teorema e shumës së këndeve të brendshme të trekëndëshit AOB fitojmë $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 135° = 180°$. Nga kjo, $\alpha + \beta = 90°$. Rrjedh se $\gamma = 90°$.

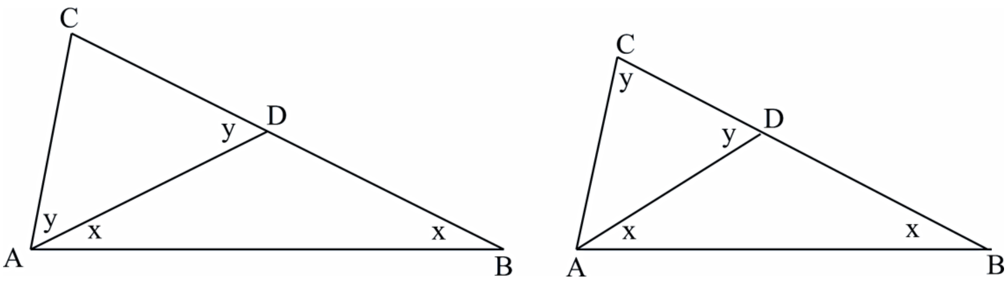


Zgjidhje 100: Trekëndëshi karakteristik (shih vizatim) për tridhjetëkëndësh të rregullt me brinjë $a = 6$ cm është ΔABO për të cilin $AOB = \frac{360°}{30} = 12°$ dhe $\overline{AB} = 6$ cm. Diagonalja më e gjatë e tridhjetëkëndëshit të rregullt ka gjatësi të barabartë me diametrin e rrethit të jashtë shkruar, gjegjësisht

$d = 2R = 2\overline{AO} = 2 \cdot \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{sin\frac{12°}{2}} = \frac{\overline{AB}}{sin6°} \approx 57{,}4$ cm.



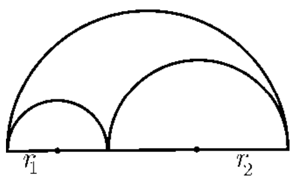
Zgjidhje 101: Nëse ABC është trekëndëshi i dhënë me këndin $\alpha = 75°$ dhe nëse D është pikë në brinjën BC ashtu që trekëndëshat ABD dhe ACD janë barakrahës.



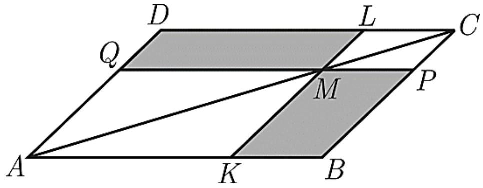
Ka dy mundësi: $AD = BD$ dhe $AC = CD$ (fotoja lart majtas), ose $AC = AD = BD$ (foto lart djathtë). Ti shënojmë me x dhe y, përkatësisht, këndet e njëjta të trekëndëshave barakrahës. Edhe në të dy rastet, y është kënd i jashtëm në kulmin e trekëndëshit barakrahës ABD, për atë shkak $y = 2x$. Në rastin e parë, $x + y = 75°$, gjegjësisht $x = 25°$, e këndet në trekëndëshin ABC janë: $\alpha = 75°$, $\beta = 25°$, $\gamma = 80°$ Në rastin e dytë, $x + y + 75° = 180°$, prej ku $x = 35°$, e këndet e trekëndëshit ABC janë: $\alpha = 75°$, $\beta = 35°$, $\gamma = 70°$.

Zgjidhje 102: Do ti shqyrtojmë tre rastet e mundshme.
Rasti i parë: Qendra e vijës rrethore shtrihet në lartësinë CD të trekëndëshit ABC.
Të shënojmë $\overline{AB} = a, \overline{AC} = b, \overline{AO} = R$. Atëherë $\overline{AD} = \frac{a}{2}$, ΔADC dhe ΔADO janë kënddrejtë, prandaj teorema e Pitagorës jep $\overline{CD}^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ dhe $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \overline{OD}^2$. Pasi që $\overline{OD} = \overline{CD} - \overline{CO} = \overline{CD} - R$, kemi $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2R\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} + R^2$, gjegjësisht $b^2 - 2R\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 0$, prej ku $R = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}$.
Rasti dytë: Qendra e vijës rrethore shtrihet në vazhdim të lartësisë CD nga trekëndëshi ABC. Të shënojmë $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AO} = R$. Atëherë $\overline{AD} = \frac{a}{2}$, ΔADC dhe ΔADO janë kënddrejtë, prandaj Teorema e Pitagorës jep $\overline{CD}^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ dhe $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \overline{OD}^2$. Pasi që $\overline{OD} = \overline{CO} - \overline{CD} = R - \overline{CD}$, kemi $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + R^2 - 2R\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} + b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ gjegjësisht $b^2 - 2R\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 0$, од каде што $R = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}$.
Rasti i tretë: Qendra e vijës rrethore shtrihet në bazën AB, gjegjësisht $R = \frac{a}{2}$.
Të theksojmë se rrezja e rrethit të jashtëshkruar mund të caktohet edhe me ndihmën e formulës $R = \frac{ab^2}{4P}$, nëse për P shfrytëzohet formula e Heronit.

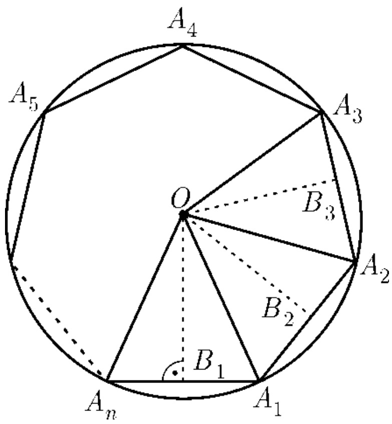
Zgjidhje 103: (mbetja quhet ARBELOS që në përkthim do të thotë thika e këpucëtarit)
Pasi që $r_1 + r_2 = R$, me ngritje në katrorë të barazimit fitohet $r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = R^2$. Syprina e mbetjes është ndryshimi ndërmjet syprinës të gjysmërrethit dhe shumës së syprinave të dy gjysmërrathëve: $P = \frac{R^2\pi}{2} - \left(\frac{r_1^2\pi + r_2^2\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(R^2 - r_1^2 - r_2^2) = r_1r_2\pi$.
Fitojmë se $P = 21\pi$ cm².



Zgjidhje 104: Trekëndëshat AKM dhe MQA kanë brinjë të barabarta, prandaj $\Delta AKM \cong \Delta MQA$. Ngjashëm, $\Delta MPC \cong \Delta CLM$ dhe $\Delta ABC \cong \Delta CDA$. Prej këtu
$P_{QMLD} = P_{\Delta ACD} - P_{\Delta AMQ} - P_{\Delta MCL} = P_{\Delta ABC} - P_{\Delta AKM} - P_{\Delta MPC} = P_{KBPM}$.



Zgjidhje 105: Nëse shumëkëndëshi ka n brinjë, kënd të brendshëm α dhe brinjë a. Ti tërheqim simetralet të këndeve të brendshme te y si brinjë fqinje, për shembull, A_1 dhe A_2, dhe ta shënojmë prerjen me O (sepse $\alpha < 180$, simetralet priten në brendi të shumëkëndëshit). Atëherë $OA_1A_2 = OA_2A_1 = \frac{\alpha}{2}$, trekëndëshi OA_1A_2 është barakrahës. Nëse O_1 është prerje e simetraleve të këndeve $A_1A_2A_3$ dhe $A_2A_3A_4$. Pikat O dhe O_1 shtrihen në simetralen e $A_1A_2A_3$.
Pasi që $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$ dhe $OA_1A_2 = OA_2A_1 = OA_2A_3 = OA_3A_2 = \frac{\alpha}{2}$, fitojmë se $\Delta OA_1A_2 \cong O_1A_2A_3$, prandaj del se $\overline{OA_2} = \overline{O_1A_2}$ dhe nga këtu $O \equiv O_1$. D.m.th simetralet e këndeve te A_1, A_2 dhe A_3 priten në një pikë O, dhe $\overline{OA_1} = \overline{O_1A_2} = \overline{OA_3}$. Duke menduar në këtë mënyrë, përfundojmë se simetralet e të gjitha këndeve të brendshme të shumëkëndëshit priten në O dhe $\overline{OA_1} = \overline{O_1A_2} = \overline{OA_3} = \cdots = \overline{OA_n}$. D.m.th kulmet A_1, A_2,..., A_n shtrihen në vijë rrethore me rreze $R = \overline{OA_1}$ dhe qendër në O. Kjo është vija rrethore e kërkuar e jashtëshkruar rreth shumëkëndëshit.

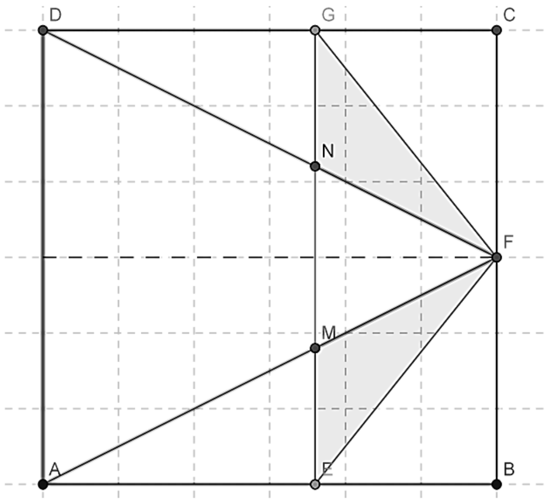


Zgjidhje 106: Sipas kushtit të detyrës,

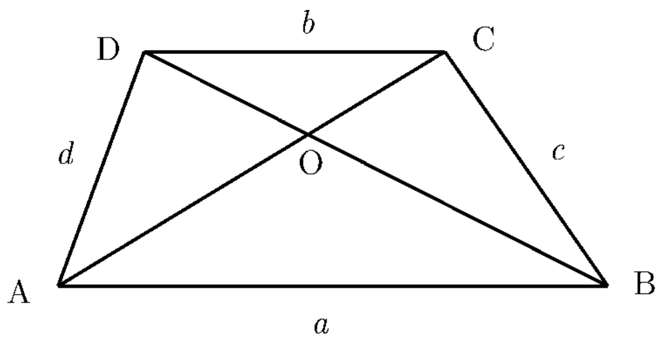
$$P_{\Delta GEF} = \frac{36 \cdot 12}{2} = 216 \text{ cm}^2.$$

Ti shënojmë me M, N pikëprerjet e GE me brinjët AF, DF, përkatësisht. Syprina e kërkuar është $P = P_{\Delta GEF} - P_{\Delta NMF}$. D.m.th ngel të caktojmë syprinën e trekëndëshit NMF .

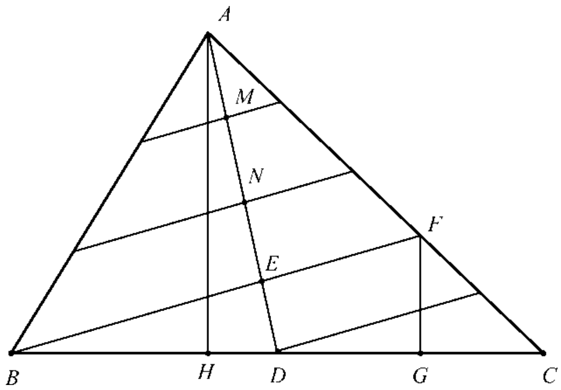
Pasi trekëndëshat ABF dhe AEM janë të ngjashëm, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EM}}$, gjegjësisht $\frac{36}{18} = \frac{36-12}{\overline{EM}}$. Nga këtu $\overline{EM} = 12$ cm. Në mënyrë analoge,nga ngjashmëria e trekëndëshave DFC dhe DNG, fitohet se $\overline{GN} = 12$ cm. D.m.th $\overline{MN} = 36 - 2 \cdot 12 = 12$ cm. Definitivisht $P_{\Delta NMF} = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72$ cm², e $P = P_{\Delta GEF} - P_{\Delta NMF} = 216 - 72 = 144$ cm².



Zgjidhje 107: Nëse $\overline{AB} = a$ dhe $\overline{CD} = b$ ashtu që $a : b = 1 : 5$, gjegjësisht $b = 5a$. Nga ngjashmëria e trekëndëshave ABO dhe CDO kemi $P_{\Delta ABO} : P_{\Delta CDO} = a^2 : b^2$. Ashtu që $P_{\Delta ABO} : P_{\Delta CDO} = a^2 : 25a^2$, që tërheq se $P_{\Delta CDO} = 25P_{\Delta ABO}$. Sipas kushtit të detyrës, $P_{\Delta ABO} + P_{\Delta CDO} = 120$. D.m.th $P_{\Delta ABO} + 25P_{\Delta ABO} = 120$, prej ku fitojmë $P_{\Delta ABO} = 4{,}62$ cm². Kështu $P_{\Delta CDO} = 115{,}38$ cm².



Zgjidhje 108: Nga barazimi $4\overline{AE} = 3\overline{AD}$ fitojmë $\overline{AE} = \frac{3}{4}\overline{AD}$. Ekzistojnë pika M dhe N në $\overline{AE}$ ashtu që $\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NE} = \overline{ED}$. T'i tërheqim drejtëzat nëpër M, N dhe D që janë paralele me BF. Kështu brinja AC është ndarë në pesë pjesë të barabarta, ku $\overline{CF} : \overline{CA} = 2 : 5$. Nëse është AH lartësia e ΔABC, atëherë nga ngjashmëria e trekëndëshave kënddrejtë ΔACH dhe ΔECG kemi $\overline{AH} : \overline{FG} = \overline{AC} : \overline{FC} = 5 : 2$, gjegjësisht $\overline{FG} = \frac{2}{5}\overline{AH}$. Sipas kësaj,
$P_{\Delta BCF} = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{FG} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{2}{5}P_{\Delta ABC}$. D.m.th, $P_{\Delta ABF} = \frac{3}{5}P_{\Delta ABC}$ dhe $P_{\Delta BCF} = \frac{2}{3}P_{\Delta ABF}$.



Zgjidhje 109: 11 cm.

Zgjidhje 110: Për 11 ditët e para do të kalojë $11(5-4) = 11$ m. Gjatë ditës së dymbëdhjetë do t'i kalojë 4 m mbetura deri në majë. D.m.th kërmilli do të ngjitet në majë të drurit për 12 ditë.

Zgjidhje 111: $\left(90 : \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{7}{8} \cdot \left(90 : \frac{3}{4}\right) : 100 \cdot 32 = 4032$ kg misër.

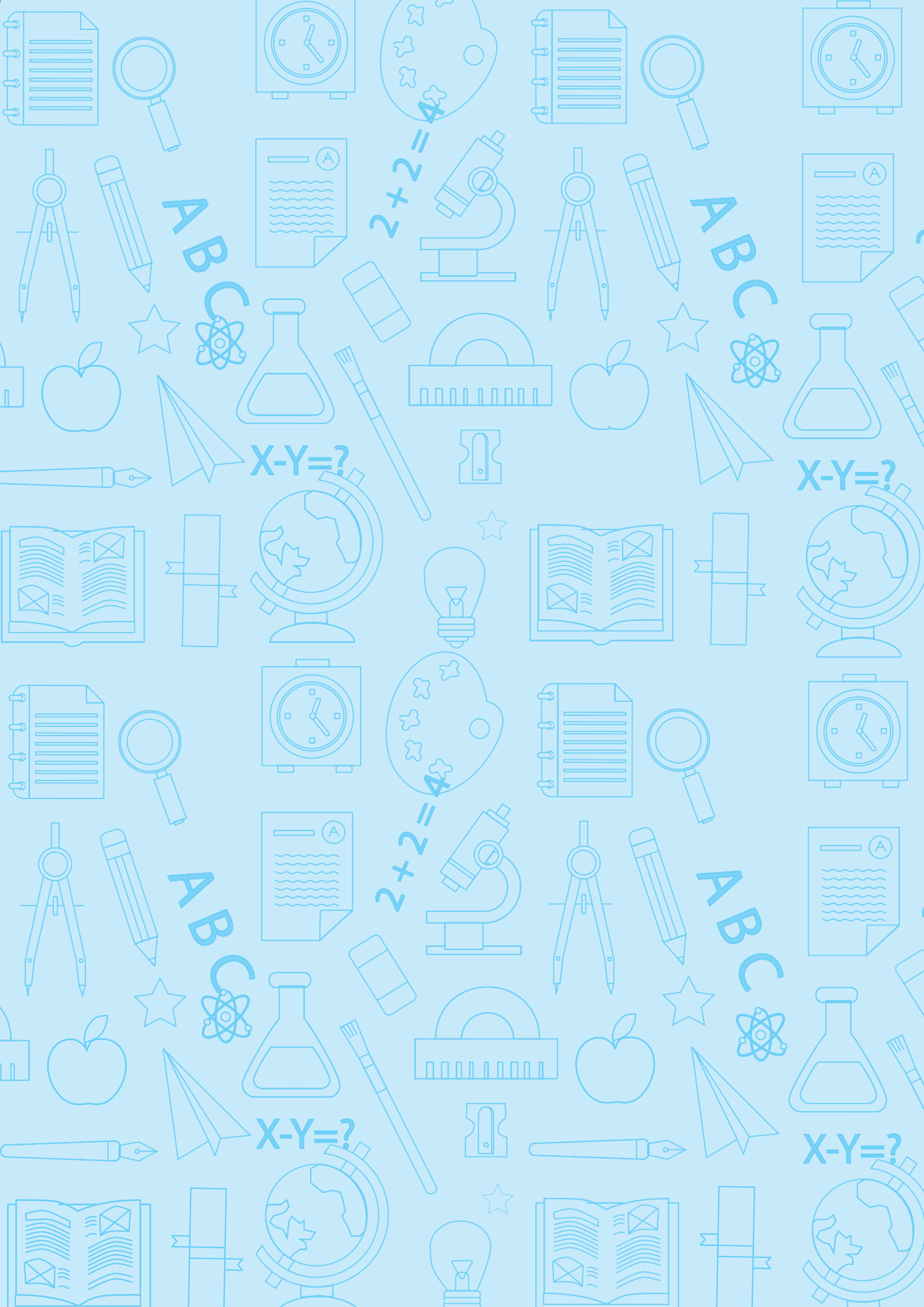
Zgjidhje 112: Baza ka gjatësi $(26 - 3 \cdot 2) : 4 = 5$ cm, e krahu 7 cm.

Zgjidhje 113: $\overleftarrow{CD} = (2*24 - 32) : 2 = 8$ cm.

Zgjidhje 114: Gjithsej 10. Nëse janë ato pikat A, B, C, D dhe E, atëherë trekëndëshat janë: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE dhe CDE.

Zgjidhje 115: Në kub me tehun 1 m ka 1000000000 kube me teh 1mm. Lartësia e shtyllës do të jetë 1000 kilometra.

Zgjidhje 116: Bisektrisa e këndit të jashtëm është normale në bisektrisën e këndit të brendshëm, gjegjësisht në lartësinë të lëshuar në bazë të atij trekëndëshi barakrahës.


ABC
2+2=4
X-Y=?