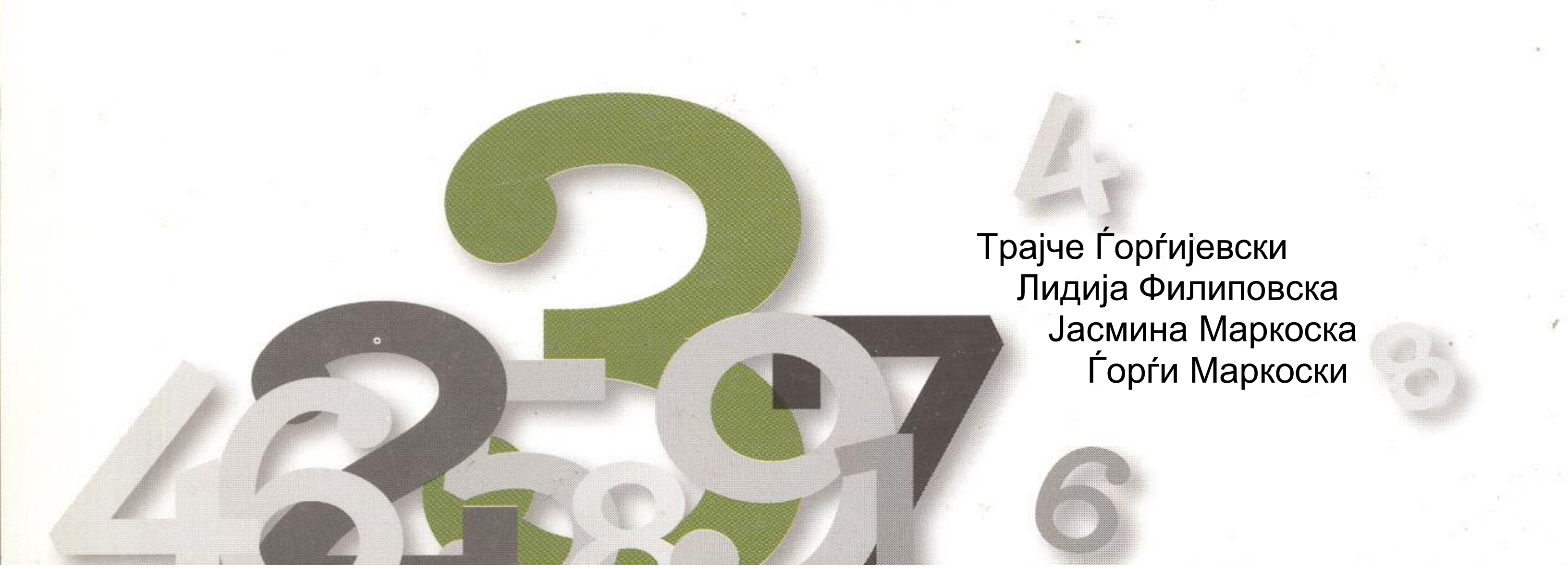


Трајче Ѓорѓијевски
Лидија Филиповска
Јасмина Маркоска
Ѓорѓи Маркоски

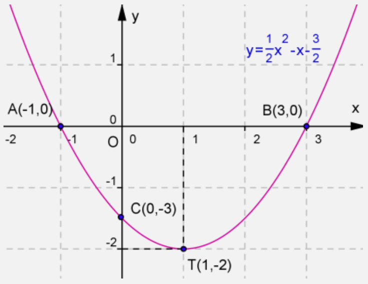
ПРИРАЧНИК ПО МАТЕМАТИКА

ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД 15 И 16 ГОДИШНА ВОЗРАСТ, НИВНИТЕ НАСТАВНИЦИ И РОДИТЕЛИ

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

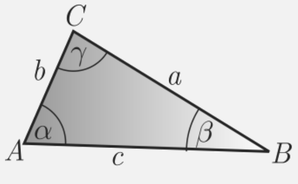
$$|z|^2=z\cdot\bar{z}.$$

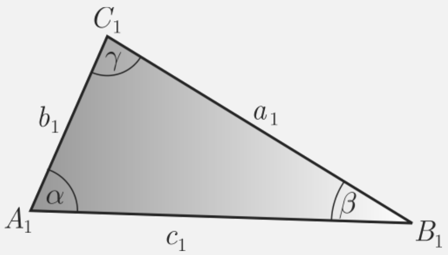
$$\frac{p\Rightarrow r_1,\, r_1\Rightarrow r_2,\ldots,\, r_k\Rightarrow q}{p\Rightarrow q}$$



$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}$$





Биро за развој на образованието

Трајче Ѓорѓијевски
Лидија Филиповска
Јасмина Маркоска
Ѓорѓи Маркоски

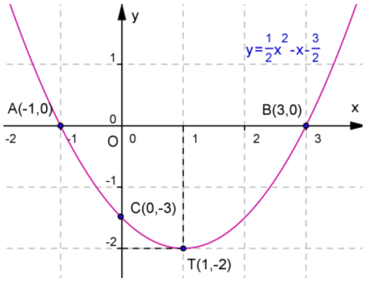
ПРИРАЧНИК ПО МАТЕМАТИКА

ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД 15 И 16 ГОДИШНА ВОЗРАСТ, НИВНИТЕ НАСТАВНИЦИ И РОДИТЕЛИ

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

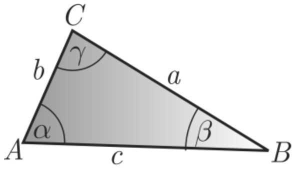
$$|z|^2=z\cdot\bar{z}.$$

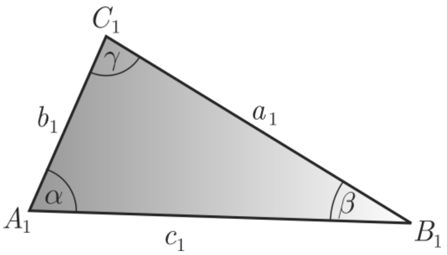
$$\frac{p\Rightarrow r_1,\, r_1\Rightarrow r_2,\ldots,\, r_k\Rightarrow q}{p\Rightarrow q}$$



$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}$$





Биро за развој на образованието

ПРИРАЧНИК

Наслов:

ПРИРАЧНИК ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД 15 И 16 ГОДИШНА ВОЗРАСТ, НИВНИТЕ НАСТАВНИЦИ И РОДИТЕЛИ

Издавач: Биро за развој на образованието

За издавачот: м-р Весна Хорватовиќ, директор

Уредник: м-р Весна Хорватовиќ

Автори: Трајче Ѓоргијевски-советник во Биро за развој на образованието
Лидија Филиповска-професор во гимназија СУГС Јосип Броз Тито-Скопје
Јасмина Маркоска-професор во СУГС Георги Димитров-Скопје
д-р Ѓорѓи Маркоски-професор на ПМФ-Скопје

Рецезенти: м-р Лилјана Поленаковиќ, м-р Аница Алексова

Печатница: Винсент Графика

Тираж: 200 примероци

Прирачникот е изработен со финансиска и експертска поддршка на Канцеларијата на УНИЦЕФ, Скопје.

ВОВЕД

Математичките знаења, вештини и компетенции се утврдени како дел од клучните компетенции за личен развој, за активно граѓанство, за социјално вклучување и за вработување во општеството на 21-от век кое е засновано на наука и технологија. Постигањата по математика, кои што се измерени во меѓународните истражувања[1] како и резултатите што се добиени во мерењата на ниво на држава со државните оценувања и испити, се ниски и на учениците од Република Македонија како и во други европски држави. Ова предизвика во 2009 година на ниво на Европската Унија да се дефинира и усвои стандард за унапредување на основните вештини кај учениците. Овој стандард одредува дека до 2020 година процентот на млади на возраст од петнаесет години кои имаат незадоволително ниво на способности за читање, математика и наука треба да биде помал од 15%[2]. За да се постигне ова до 2020 година, од една страна мора да бидат идентификувни пречките и проблемите, а од друга страна да се воспостави ефикасен приод во нивно надминување. Овој стандард, исто така е поврзан со четирите стратешки приоритети за соработка во полето на образование и обука на ниво на Европска Унија, меѓу кои е и подобрувањето на квалитетот и ефективноста на образованието и обуките.

Сеопфатните политики за напредување и развој на математичкото образование се базирани на: постојано следење и поддршка за подобрување на постигањата на учениците, квалитетна иницијална подготовка и континуирана дообука и поддршка на наставниците, насоченост од стекнување на знаења кон примената на математичките знаења и вештините за решавање на проблеми, како и воведување и користење на голем број техники на поучување и поддршка кои што значително ќе го намалат степенот на ниски постигања кај учениците. Резултатите од меѓународните истражувања покажуваат дека постигнувањата во образованието освен со социо-економската положба на учениците, многу се поврзани и со квалитетот на поучувањето како и со одредени структурни и организациски карактеристики на образовниот систем.

Оценувањето на математичките знаења и вештини на учениците е многу важен фактор кој влијае на поучувањето и учењето, а при тоа наставниците ја имаат клучната улога. Најважно при оценувањето на знаењата на учениците е континуираното прибирање информации за нивниот напредок и давањето релевантни повратни информации преку оценувањето за учење (формативно оценување), а подоцна и оценување на наученото (сумативно оценување) без разлика дали е интерно (од страна на наставникот) или пак екстерно.

---

[1] OECD – PISA (*Programme for International Student Assessment) за ученици од 15 до 16 годишна возраст и IEA – TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study) за ученици на крајот од основното образование.

[2] Strategic Framework for European Cooperation in Education and Training (ЃET 2020'), Council Conclusions May 2008, OJL 119, 28.5.2009

Исто така, многу важен фактор за постигнување на добри резултати на учениците е нивото на нивната мотивација за учење математика, позитивниот став кон математиката и самодовербата при учење на овој предмет. Овие аспекти влијаат и врз одлуките за учество во училишните активности и во програмите во кои што главен акцент е ставен на математиката, а можат да влијаат на изборот на ученикот на насоката во средното образование, како и на изборот на неговата/нејзината идна кариера.

Идејата за пишување на Прирачник по математика за учениците од 15 до 16 годишна возраст (од прва и втора година во средното образование) произлезе од потребите за:

- подобрување на знаењата и вештините на наставниците за континуирано следење на знаењата на учениците и давање соодветна мотивирачка и насочувачка повратна информација;
- реално, етичко и валидно оценување на знаењата на учениците од страна на наставниците;
- подобро информирање на учениците и родителите за тоа што се очекува учениците да знаат и да умеат да направат, што меѓу другото, на учениците им дава дополнителна мотивација, го зголемува нивниот интерес и самодоверба;
- информирање на учениците за критериумите за секоја оценка што ќе овозможи да бидат покритични при само-оценувањето и при споредувањето на сопственото мислење и мислењето на родителот со оценката на наставникот.

Очекуваме дека користењето на овој Прирачник на наставниците ќе им овозможи:

- соодветно да ги применуваат стандардите и критериумите за оценување на постигањата на учениците што ќе обезбеди поголема транспарентност и реалност;
- да прибираат докази и аргументи за оправданоста на изведената оценка што може да ги презентираат при средба со родителите (со што се зголемува довербата кај учениците и родителите за процесот на оценување);
- да стекнуваат информации кои овозможуваат благовремено коригирање при оценувањето;
- и да користат повеќе техники, меѓу кои само-оценување и заемното оценување, на часовите по математика.

На учениците и родителите ќе им овозможи:

- да стекнат информации за тоа што се очекува ученикот да знае за определена оценка;
- да дознаат навремена информација за напредокот при напорите за да се постигне повисоко ниво на знаење;
- да проценат дали оценувањето е објективно и реално;
- да стекнат поголема довербата за процесот на оценување;
- да имаат информации кои ќе им овозможат благовремено да реагираат за надминување на неправилностите при оценувањето.

Меѓу другото, задачите кои ги нуди овој Прирачник може да се користат при диференцирана работа во наставата по математика, каде освен што се планираат самостојни активности на учениците, наставникот може да формира хомогени групи (ученици со исти/слични знаења и способности) и во работата со секоја група да користи задачи од соодветно ниво.

Авторите им се заблагодаруваат на рецензентите за придонесот во подобрувањето на ракописот, и се надеваат дека со негово користење наставниците и учениците ќе постигнат повисоки резултати во поучувањето и учењето математика.

СТРУКТУРА НА ПРИРАЧНИКОТ

На почетокот на Прирачникот се дадени Стандарди по математика за дел од содржините кои се изучуваат во прва и втора година во средното образование[3].

Потоа, се дадени Критериуми за оценување на постигањата кои се засновани на Стандардите[4].

Понатаму, во Прирачникот се дадени поими дефиниции, правила и задачи за 7 наставни теми кои се изучуваат во прва и втора година од средното образовани и тоа:

- За секоја тема - поими, дефиниции и правила кои се илустрирани со соодветни примери, прашања и решени задачи и тоа 4 рубрики според когнитивните нивоа[5] кои се базирани на модифицираната верзија на Блумовата таксономија[6] која е користена во одредувањето на стандардите по математика и критериумите за оценување. Примерите, прашањата и задачите за рубрика А се однесуваат на когнитивното ниво *помнење*; примерите, прашањата и задачите за рубрика Б се однесуваат на когнитивното ниво *разбирање*; рубриката В вклучува прашања, задачи и примери од когнитивното ниво *примена*; и прашањата и задачите за рубрика Г се однесуваат на когнитивните нивоа *анализа, синтеза и вреднување*.
- После рубриките А и Б, како и после рубриките В и Г, во секоја тема дадени се задачи за решавање од соодветното ниво.
- На крајот од секоја тема дадени се задачи во вид на писмена работа за темата со бодирањето на секоја задача и рангот на потребни бодови за секоја оценка. Дадените задачи за писмена работа се од три типа и тоа: задачи со избор на точен од понудени одговори, задачи со краток одговор и задачи во кои се бара ученикот да покаже целосна постапка за решавање.

На крајот од Прирачникот, дадени се решенија на задачите за решавање од рубриките во секоја тема и решенија на задачите од секоја писмена работа.

Во овој прирачник има над 850 задачи.

---

[3] Стандардите се достапни на
http://bro.gov.mk/docs/standardi/gimnazisko/matematika/I%20godina%20Matematika.pdf
http://bro.gov.mk/docs/standardi/gimnazisko/matematika/II%20godina%20Matematika.pdf

[4] Критериумите се достапни на http://bro.gov.mk/docs/kriteriumi/Kriteriumi_za_ocenuvanje.pdf

[5] http://tep.uoregon.edu/resources/assessment/multiplechoicequestions/blooms.html

[6] Taxonomy of Educational Objectives, Bloom et al., (1956)

СОДРЖИНА

СТАНДАРДИ ПО МАТЕМАТИКА

Очекуваните резултати го определуваат она што ученикот треба да покаже дека го знае, го разбира и може да го направи откако ќе заврши со учењето на дадена целина (наставна единица, наставна тема или повеќе теми). Дефинираните очекувани резултати од учењето на учениците им помагаат да разберат што се очекува од нив, а со тоа им се олеснува процесот на учење; додека пак наставниците ги насочуваат точно да ги определат концептите, поимите и вештините кои учениците треба да ги поседуваат на крајот од даден период на учење. Очекуваните резултати, заедно со критериумите за оценување ги определуваат барањата за добивање определена оценка.

При одредувањето на очекуваните резултати, е користена Блумовата таксономија според која знаењата, вештините и компетенциите хиерархиски се систематизирани од најниското до највисокото когнитивно ниво.

- ***Нивото помнење*** се однесува на способноста за искажување факти, класификации, дефиниции, правила, теории и слично; препознавање на идеи, концепти, поими, правила и постапки кои се дадени во облик кој е сличен на оној кој учениците го учеле.
- ***Нивото разбирање*** подразбира способност за интерпретација и објаснување на идеите, концептите, поимите, правилата и постапките кои се учени претходно.
- ***Нивото примена*** се однесува на одбирање и примена на научените знаења, стекнатите вештини и искуствата во решавање проблеми и задачи во ситуација која е слична со она што е учено претходно или пак во нова ситуација.
- Во критичкото размислување/логичко следство се вклучени ***анализата, синтезата и вреднувањето.*** Очекувањата од учениците во ова ниво се тие да можат да анализираат, расчленуваат, издвојуваат и слично; да воопштат, да поврзат и комбинираат делови во целина; како и да можат да проценуваат и вреднуваат врз основа на дадени критериуми.

Во табелите подолу, се дадени очекуваните резултати за секое когнитивни ниво во рамките на секоја тема која е разработена во Прирачникот.

ПРОГРАМСКО ПОДРАЧЈЕ: **МАТЕМАТИЧКА ЛОГИКА И МНОЖЕСТВА**	
Ниво на знаења и способности	**Стандард**
ПОМНЕЊЕ	▪ Го објаснува поимот исказ; ▪ ги запишува вистинитосните таблици на операциите со искази; ▪ искажува дефиниција за аксиома/теорема; ▪ дава примери за аксиоми; ▪ искажува дефиниција за подмножество на дадено множество.
РАЗБИРАЊЕ	▪ Дава примери за исказ; ▪ препознава аксиома/теорема; ▪ објаснува кога едно множество е наполно определено и го запишува на различни начини; ▪ дава примери на еднакви и еквивалентни множества.

ПРИМЕНУВАЊЕ	▪ Користи вистинитосни таблици на операциите со искази во задачи; ▪ решава задачи за пресек, унија и разлика на множества; ▪ одредува комплемент на дадено множество; ▪ одредува Декартов производ на две множества.
АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ	▪ Докажува поедноставни алгебарски и геометриски тврдења; ▪ испитува дали дадена исказна формула е тавтологија; ▪ применува својства на операциите со множества при решавање задачи.

ПРОГРАМСКО ПОДРАЧЈЕ**: ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ОСТАР АГОЛ ВО ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК**	
Ниво на знаења и способности	**Стандард**
ПОМНЕЊЕ	▪ Ги искажува единиците мерки за агол: степен и радијан; ▪ претвора помали единици мерки за агол во поголеми и обратно; ▪ искажува дефиниција за синус, косинус, тангенс и котангенс од остар агол во правоаголен триаголник; ▪ ја искажува теоремата за комплементни агли.
РАЗБИРАЊЕ	▪ Го објаснува менувањето на тригонометриските функции кога аголот се менува од 0° до 90°; ▪ го одредува аголот, ако е дадена вредноста на тригонометриската функција (со калкулатор) и обратно; ▪ дава примери за тригонометриски функции од комплементни агли.
ПРИМЕНУВАЊЕ	▪ Ја применува теоремата за комплементни агли; ▪ ги користи во задачи вредностите на тригонометриските функции за агли од 30°, 60° и 45°; ▪ ги користи во задачи врските меѓу тригонометриските функции од ист агол; ▪ решева правоаголен триаголник со дадени потребни елементи.
АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ	▪ Ја докажува теоремата за комплементни агли; ▪ ги изведува тригонометриските врски; ▪ докажува тригонометриски идентитети; ▪ го применува решавањето на правоаголен триаголник во геометријата, практиката и техниката.

ПРОГРАМСКО ПОДРАЧЈЕ**: КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ**	
Ниво на знаења и способности	**Стандард**
ПОМНЕЊЕ	▪ Искажува дефиниција за имагинарна единица, комплексен број, реален и имагинарен дел на комплексен број; ▪ идентификува реален и имагинарен дел на комплексен број; ▪ запишува комплексен број во алгебарска форма при даден реален и имагинарен дел; ▪ искажува дефиниција за: еднакви, спротивни и конјугирано комплексни броеви; ▪ препознава спротивни и конјугирано комплексни броеви; ▪ искажува дефиниција за модул на комплексен број; ▪ искажува дефиниција за збир, разлика, производ и колчник на комплексни броеви во алгебарска форма.
РАЗБИРАЊЕ	▪ Објаснува дека квадратен корен од негативен реален број е имагинарен број; ▪ запишува формула за трансформација на збир од квадрати во производ; ▪ го објаснува поимот комплексна рамнина; ▪ објаснува и запишува конјугирано комплексни броеви/спротивни броеви; ▪ ја воочува положбата на конјугирано комплексните/ спротивните броеви во комплексната рамнина; ▪ го одредува реалниот и имагинарниот дел на комплексен број претставен со точка во комплексната рамнина и обратно; ▪ претставува комплексен број со вектот и тоа го објаснува; ▪ објаснува одредување модул на комплексен број; ▪ ја воочува врската меѓу векторското претставување на комплексен број и неговиот модул.
ПРИМЕНУВАЊЕ	▪ Применува еднаквост на комплексни броеви во здачи; ▪ трансформира збир од квадрати во производ и тоа го применува во задачи; ▪ решава задачи во врска со модул на комплексен број; ▪ собира и одзема комплексни броеви претставени векторски; ▪ собира, одзема, множи и дели комплексни броеви.
АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ	▪ Ја ојаснува потребата од проширување на множеството на реалните броеви; ▪ решава посложени задачи од комплексни броеви; ▪ решава задачи со примена на равенства и неравенства користејќи својства на модул на комплексен број.

ПРОГРАМСКО ПОДРАЧЈЕ: **КВАДРАТНИ РАВЕНКИ, ДИСКРИМИНАНТА, ВИЕТОВИ ФОРМУЛИ И РАВЕНКИ ШТО СЕ СВЕДУВААТ НА РЕШАВАЊЕ НА КВАДРАТНА РАВЕНКА**	
Ниво на знаења и способности	**Стандард**
ПОМНЕЊЕ	▪ Искажува дефиниција за квадратна равенка; ▪ препознава полна/неполна квадратна равенка; ▪ ја искажува/запишува формулата за корените на квадратна равенка; ▪ ја искажува/запишува формулата за дискриминанта на квадратна равенка; ▪ ги искажува/запишува Виетовите гормули; ▪ искажува/запишува дефиниција за биквадратна равенка; ▪ искажува/запишува дефиниција за ирационална равенка; ▪ искажува/запишува дефиниција за систем од една линеарна и една квадратна равенка со две променливи.
РАЗБИРАЊЕ	▪ Проверува дали некој број е решение на дадена равенка; ▪ ги заменува коефициентите од дадена квадратна равенка во формулата за корените на квадратната равенка; ▪ препознава дробно-рационални равенки; ▪ одредува дефиниционо множество на поедноставни дробно – рационални равенки; ▪ проверува кои од добиените решенија се решенија на дадената равенка; ▪ препознава биквадратна равенка; ▪ препознава ирационална равенка; ▪ одредува дефиниционо множество на поедноставни ирационални равенки; ▪ проверува дали подреден пар реални броеви е решение на даден систем од една линеарна и една квадратна равенка со две променливи.
ПРИМЕНУВАЊЕ	▪ Трансформира дадена равенка во општ вид на квадратна равенка; ▪ трансформира квадратна равенка од општ во нормален вид ; ▪ решава равенка од видот $g(x)\cdot h(x)=0$; ▪ решана неполни и полни квадратни равенки; ▪ решава поедноставни примери на квадратни равенки со параметри; ▪ дискутира за решенијата на квадратната равенка според нејзината дискриминанта; ▪ решава поедноставни задачи со користење на Виетовите формули; ▪ решава задачи со примена на разложување на квадратен трином на линеарни множители; ▪ решава биквадратна равенка; ▪ решава дробно-рационални равенки што се сведуваат на квадратни; ▪ решава ирационална равенка кој се сведува на линеарна или квадратна равенка;

	▪ решава систем од една линеарна и една квадратна равенка со две променливи.
АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ	▪ Решава квадратна равенка со параметар; ▪ решава проблеми со помош на Виетови формули; ▪ решава проблеми од практиката кои се сведуваат на решавање квадратна равенка; ▪ решава и ги дискутира решенијата на дробно-рационални равенки со параметри; ▪ ги дискутира решенијата на ирационална равенка.

<table>
<tr><td colspan="2">ПРОГРАМСКО ПОДРАЧЈЕ: КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА И КВАДРАТНА НЕРАВЕНКА</td></tr>
<tr><td>Ниво на знаења и способности</td><td>Стандард</td></tr>
<tr><td>ПОМНЕЊЕ</td><td>▪ Искажува дефиниција за квадратна неравенка;
▪ искажува дефиниција за решение на квадратна неравенка;
▪ искажува дефиниција за систем квадратни неравенки;
▪ искажува дефиниција за решение на систем квадратни неравенки;
▪ препознава аналитички/графички /табеларно зададена квадратна функција;
▪ запишува канoничен вид на квадратна функција;
▪ ги запишува формулите за координати на теме на парабола;
▪ дава примери за квадратна функција/квадратна неравенка.</td></tr>
<tr><td>РАЗБИРАЊЕ</td><td>▪ Одредува множество вредности на квадратна функција;
▪ препознава график на функција од видот $f(x)=ax^2$, $f(x)=ax^2+c$, $f(x)=ax^2+bx$, $f(x)=ax^2+bx+c$;
▪ препознава дали дадена точка припаѓа на графикот на дадена квадратна функција ;
▪ препознава нормален вид на систем квадратни неравенки;
▪ составува таблица на вредности на квадратна функција;
▪ дава пример на парабола за $a>0/a<0$;
▪ објаснува како параболата $f(x)=ax^2+c$, $f(x)=a(x-\alpha)^2$, $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ се добива со транслација на параболата $f(x)=ax^2$;
▪ препознава знак на квадратна функција од нејзиниот график;
▪ поврзува знак на квадратна функција со квадратна неравенка;
▪ проверува дали дадена вредност припаѓа на множеството решенија на дадена квадрана неравенка.</td></tr>
</table>

ПРИМЕНУВАЊЕ	▪ Црта график на функција од видот $f\left(x\right)=ax^2$, $f\left(x\right)=ax^2+c$, $f\left(x\right)=ax^2+bx$, $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$; ▪ трансформира квадратна функција од општ во каноничен вид; ▪ црта график на квадратна функција зададена во каноничен вид; ▪ одредува знак на квадратна функција; ▪ решава квадратни неравенки; ▪ сведува систем квадратни неравенки во нормален вид; ▪ решава графички систем квадратни неравенки; ▪ го претставува со интервал графичкото решение на систем квадратни неравенки.
АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ	▪ Испитува тек и црта график на квадратна функција; ▪ решава практични задачи со користење на екстремни вредности на квадратна функција; ▪ решава проблемски задачи што се сведуваат на решавање на квадратна неравенка; ▪ решава проблемски задачи што се сведуваат на решавање на систем квадратни неравенки.

ПРОГРАМСКО ПОДРАЧЈЕ**: ПЛОШТИНА НА РАМНИНСКИ ФИГУРИ**	
Ниво на знаења и способности	**Стандард**
ПОМНЕЊЕ	▪ Ги препознава формулите за плоштина на: паралелограм, триаголник, трапез и трапезоид; ▪ ја искажува/запишува теоремата за плоштините на слични триаголници; ▪ препознава карактеристичен триаголник кај правилен многуаголник; ▪ ја запишува формулата за периметар/плоштина на круг; ▪ ја запишува формулата за должина на кружен лак; ▪ ја запишува формулата за плоштина на кружен исечок/ кружен отсечок/кружен прстен; ▪ наведува кои мерни единици се користат за плоштина и периметар.
РАЗБИРАЊЕ	▪ Ги објаснува релациите меѓу елементите во геометриските рамнински фигури; ▪ скицира разни видови рамнински фигури; ▪ објаснува сличност и складност на триаголници; ▪ дава примери за примена на питагоровата теорема кај геометриските рамнински фигури.
ПРИМЕНУВАЊЕ	▪ Решава задачи за плоштина на правоаголник, квадрат, ромб и ромбоид; ▪ решава задачи за плоштина и периметар на разни видови триаголници; ▪ применува сличност и складност на триаголници во задачи; ▪ применува питагорова теорема во задачи;

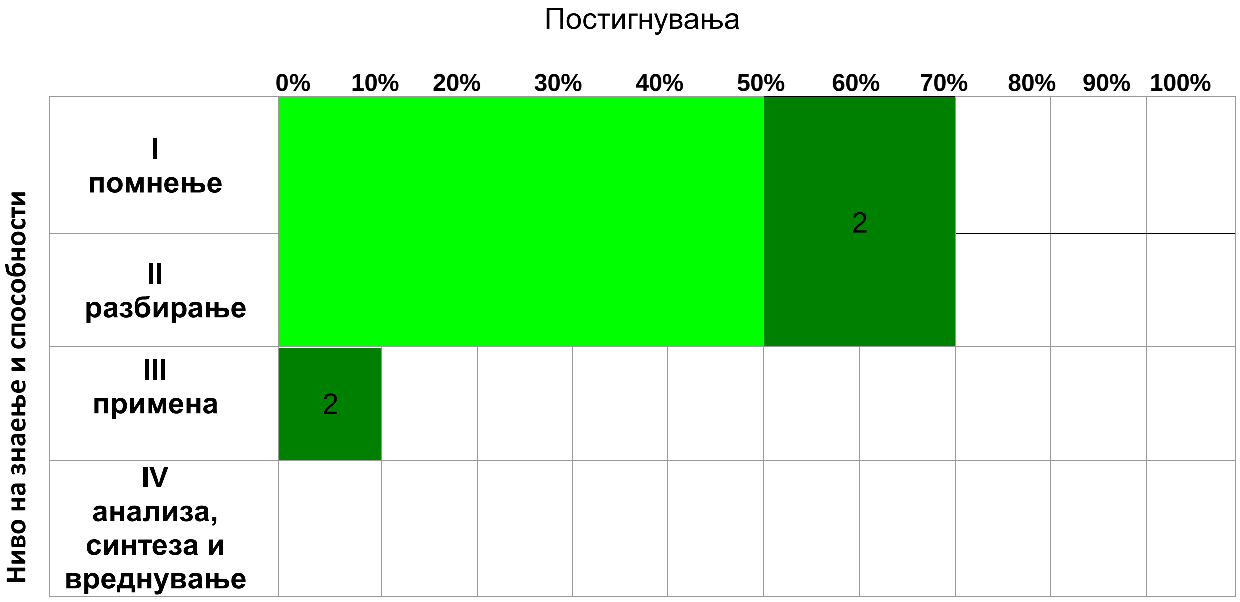
	▪ решава задачи за плоштина на трапез и трапезоиди; ▪ решава задачи за плоштина и периметар на правилен многуаголник, круг и делови од круг.
АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ	▪ Изведува формула за плоштина на трапез/ плоштина на трапезоид со нормални дијагонали; ▪ пресметува плоштина на посложени фигури со примена на формулите за плоштина на триаголници, четриаголници, круг и плоштина на круг; ▪ решава практични задачи во врска со плоштина и периметар на рамнински фигури.

КРИТЕРИУМИ ЗА ОЦЕНУВАЊЕ

Критериумите за оценки се утврдени од Бирото за развој на образованието. При определувањето на оценката на ученикот се имаат предвид постигањата на ученикот во однос на помнењето и репродуцирањето на содржините, разбирањето на содржините, примената на стекнатите знаења и вештини во познати и нови ситуации и задачи, како и способноста за критичко мислење/ логичко заклучување и следство (анализа, синтеза и вреднување).

Подолу се графички прикажани и е даден краток опис на критериумите за секоја оценка од 2 до 5.

Критериум за оценка доволен (2)

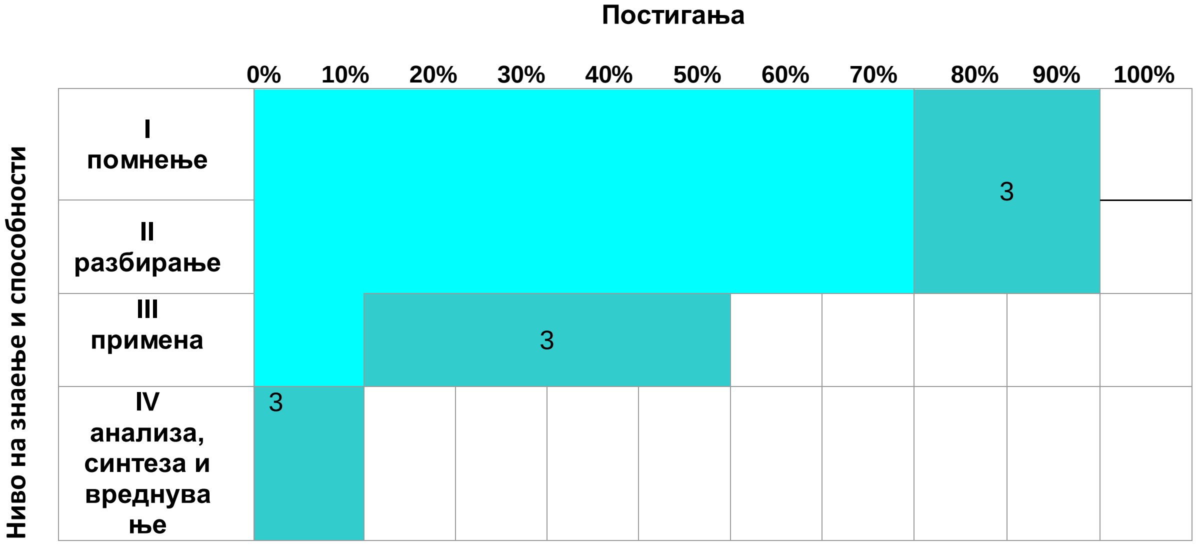


🟩 Постигнувања на ученикот кои сѐ уште не се доволни за да се добие оценка 2.

🟩🟩 Ученикот добива оценка 2 ако за секоја тема покаже:
- од 50% до 70% од знаењата и вештините опишани во ниво помнење и разбирање;
- до 10% од знаењата и вештините опишани во ниво примена.

Доколку ученикот/ученичката покажува помалку од 50% од знаењата опишани со ниво помнење и ниво разбирање, неговите/нејзините постигнувања не се доволни за оценка 2.

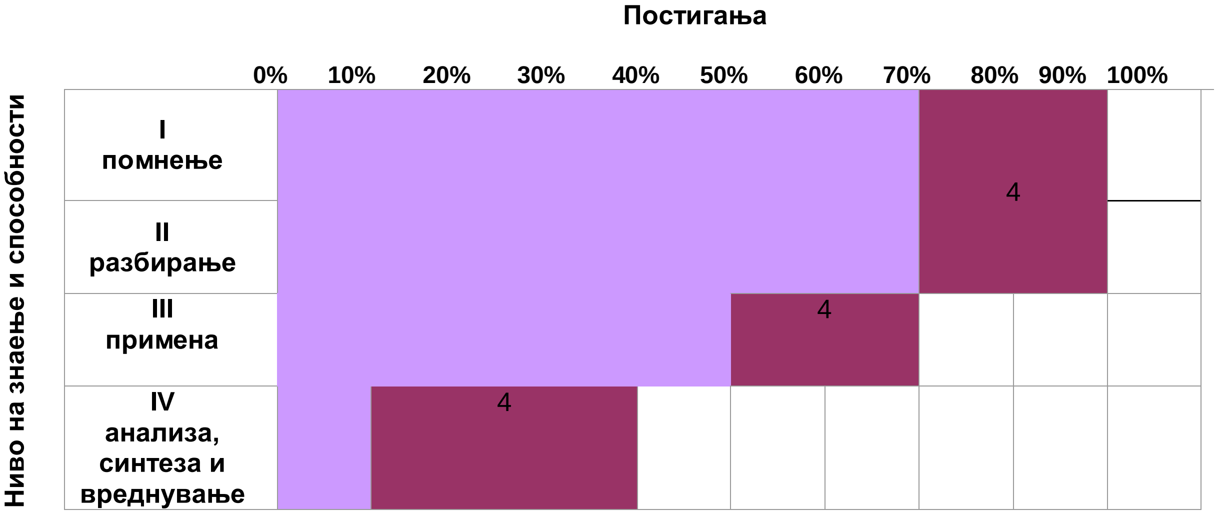
Критериум за оценката добар (3)



🟦🟦 Ученикот добива оценка 3 ако за секоја тема покаже:

- од 71% до 90% од знаењата и вештините опишани во ниво помнење и разбирање;
- од 11% до %50% од знаењата и вештините опишани во ниво примена;
- до 10% од знаењата и вештините определени за ниво анализа, синтеза и вреднување.

Критериум за оценка многу добар (4)

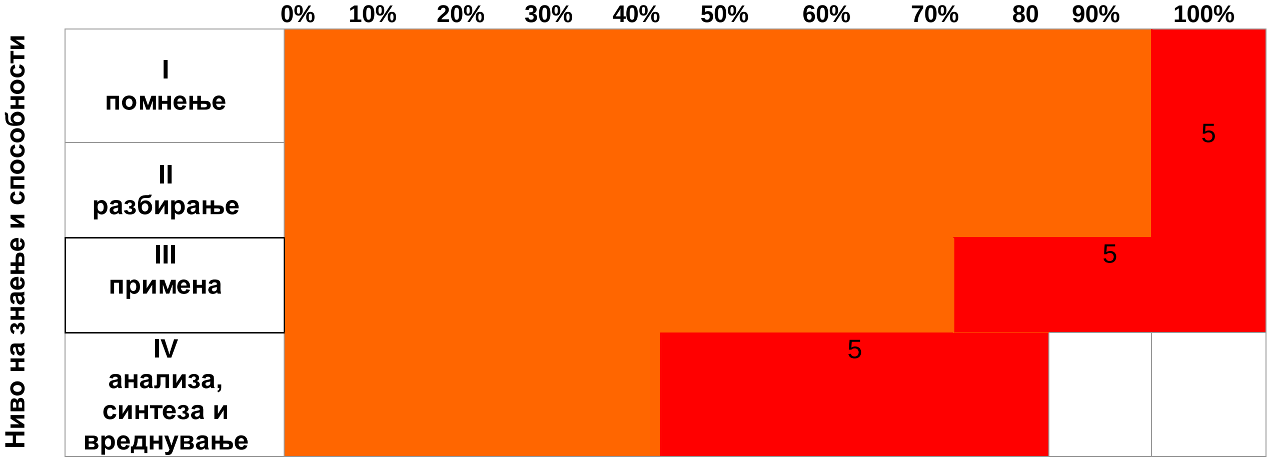


🟪🟪 Ученикот добива оценка 4 ако за секоја од четирите теми покаже:

- од 71% до 90% од знаењата и вештините опишани во ниво помнење и разбирање
- од 51% до 75% од знаењата и вештините опишани во ниво примена и
- од 11% до 40% од знаењата и вештините определени за ниво анализа, синтеза и вреднување.

Критериум за оценка одличен (5)

Постигања



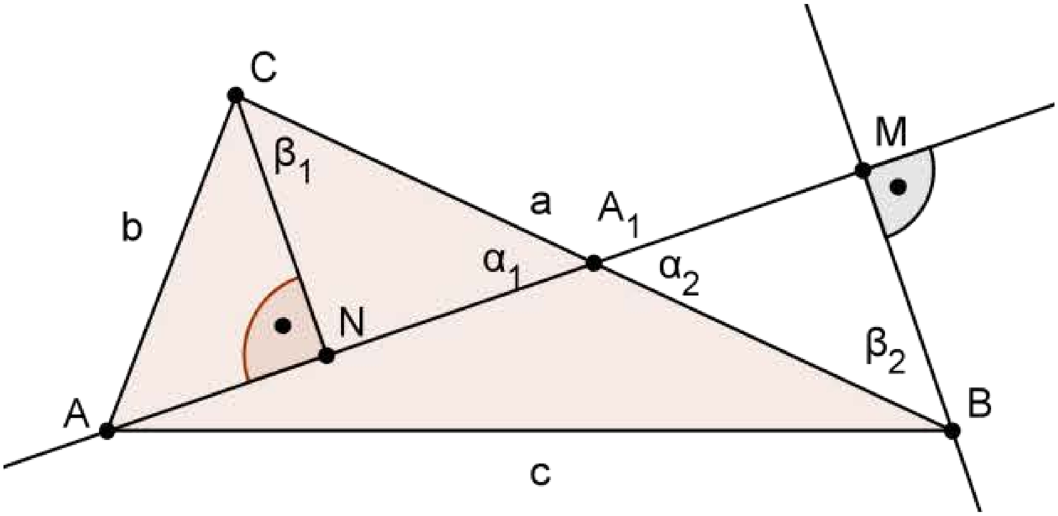
🟧🟥 Ученикот добива оценка 5 ако за секоја од четирите теми покаже:

- над 90% од знаењата и вештините опишани во ниво помнење и разбирање;
- над 70% од знаењата и вештините опишани во ниво примена;
- над 40% од знаењата и вештините определени за ниво анализа, синтеза и вреднување.

ТЕМА 1.

Математичка логика

$$\frac{p \Rightarrow q,\ p}{q}$$



Ниво А

Ученикот треба да знае дека...

НИВО: ПОМНЕЊЕ

Изјавните осмислени реченици најчесто означени со $p,q,r,...$, кои можат да бидат или вистинити или невистинити се искази.

Пример 1: Реченицата p: Реката Вардар тече низ Битола.

Оваа реченица е невистинит исказ и запишуваме: $\tau(p)=\bot$ (тау од пе е не те), што значи дека вистинитосната (логичка) вредност на исказот p е невистина.

Пример 2: Реченицата q: Математиката е интересен предмет.

Оваа реченица не е исказ, бидејќи може да има две вредности:
$\top$ (вистина) и $\bot$ (невистина) .

Пример 3: Реченицата r: Круговите шетаат низ паркот, не е исказ, бидејќи не е осмислена.

Читањето и симболите на логичките операции се претставени со табела:

Име на операцијата	*Симбол*	*Читање*
Конјункција	$\wedge$	p и q
Вклучна дисјункција	$\vee$	p или q
Исклучна дисјункција	$\veebar$	или p или q
Импликација	$\Rightarrow$	Ако p тогаш q
Еквиваленција	$\Leftrightarrow$	p ако и само ако q
Негација	$\neg$	не p

Конјункцијата од два искази означена со $p\wedge q$ е вистинита само ако двата искази се вистинити, а во сите други случаи е невистинита, т.е.
$\top\wedge\top=\top$, $\top\wedge\bot=\bot$, $\bot\wedge\top=\bot$, $\bot\wedge\bot=\bot$.

Претставувањето може да биде и табеларно, т.е.

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p\wedge q)$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊥

или пократко:

p	q	$p\wedge q$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊥

Пример 4: Нека се дадени исказите $p:2\,|\,7$, $q:3>2$. Конјункцијата ќе биде: $p\wedge q:2\,|\,7\wedge 3>2$, а нејзината логичка вредност е $\tau(p\wedge q)=\tau(p)\wedge\tau(q)=\bot\wedge\top=\bot$.

Дисјункцијта (вклучна) од два искази означена со $p\vee q$ е невистинита само ако двата искази се невистинити, а во сите други случаи е вистинита, т.е.
$\top\vee\top=\top$, $\top\vee\bot=\top$, $\bot\vee\top=\top$, $\bot\vee\bot=\bot$.

Претставувањето може да биде и табеларно, т.е.

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p\vee q)$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥

или пократко:

p	q	$p\vee q$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥

Пример 5: Нека се дадени исказите $p:2\,|\,7$, $q:3>2$. Дисјункцијата ќе биде: $p\vee q:2\,|\,7\vee 3>2$, а нејзината логичка вредност е $\tau(p\vee q)=\tau(p)\vee\tau(q)=\bot\vee\top=\top$.

Исклучната дисјункција од два искази означена со $p\veebar q$ е вистинита само ако исказите имаат различна вредност, а во сите други случаи е вистинита, т.е.
$\top\veebar\top=\bot$, $\top\veebar\bot=\top$, $\bot\veebar\top=\top$, $\bot\veebar\bot=\bot$.

Претставувањето може да биде и табеларно, т.е.

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p\veebar q)$
⊤	⊤	⊥
⊤	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥

или пократко:

p	q	$p\veebar q$
⊤	⊤	⊥
⊤	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥

Пример 6: Нека се дадени исказите $p:2|7$, $q:3>2$. Исклучната дисјункција ќе биде: $p \veebar q:\ 2|7 \veebar 3>2$ а нејзината логичка вредност е $\tau(p \veebar q)=\tau(p)\veebar\tau(q)=\perp\veebar\top=\top$.

Импликацијата од два искази означена со $p \Rightarrow q$ е невистинита само ако првиот исказ е вистинит, а вториот невистинит. Во сите други случаи е вистинита, т.е.
$\top\Rightarrow\top=\top$, $\top\Rightarrow\perp=\perp$, $\perp\Rightarrow\top=\top$, $\perp\Rightarrow\perp=\top$.

Претставувањето може да биде и табеларно, т.е.

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p\Rightarrow q)$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤

или пократко:

p	q	$p\Rightarrow q$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤

Пример 7: Нека се дадени исказите $p:2|7$, $q:3>2$. Импликацијата ќе биде:
$p\Rightarrow q:2|7\Rightarrow 3>2$, а нејзината логичка вредност е $\tau(p\Rightarrow q)=\tau(p)\Rightarrow\tau(q)=\perp\Rightarrow\top=\top$.

Еквиваленцијата од два искази означена со $p\Leftrightarrow q$ е вистинита само ако двата искази имаат иста логичка вредност. Во сите други случаи е невистинита, т.е.
$\top\Leftrightarrow\top=\top$, $\top\Leftrightarrow\perp=\perp$, $\perp\Leftrightarrow\top=\perp$, $\perp\Leftrightarrow\perp=\top$.

Претставувањето може да биде и табеларно, т.е.

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p\Leftrightarrow q)$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤

или пократко:

p	q	$p\Leftrightarrow q$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤

Пример 8: Нека се дадени исказите $p:2|7$, $q:3>2$. Импликацијата ќе биде:
$p\Leftrightarrow q:2|7\Leftrightarrow 3>2$, а нејзината логичка вредност е $\tau(p\Leftrightarrow q)=\tau(p)\Leftrightarrow\tau(q)=\perp\Leftrightarrow\top=\perp$.

Негацијата на исказот p означена со $\neg p$ е вистинита само ако исказот p е невистинит, а ако, пак, исказот p е вистинит, негацијата од исказот е невистинита. т.е.
$\neg\top=\perp$, $\neg\perp=\top$.

Претставувањето може да биде и табеларно, т.е.

$\tau(p)$	$\tau(\neg p)$
⊤	⊥
⊥	⊤

или пократко:

p	$\neg p$
⊤	⊥
⊥	⊤

Пример 9: Нека е даден исказот $p: 2\,|\,7$. Негацијата ќе биде: $\neg p: \neg(2\,|\,7)$, а нејзината логичка вредност е $\tau(\neg p)=\tau(\neg 2\,|\,7)=2\nmid 7=\top$.

Елементарните искази означени со исказните променливи $p, q, r, s, \ldots$, поврзани на дозволен начин со логичките операции $\wedge, \vee, \veebar, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ и симболите ⊤ и ⊥ формираат сложени искази или исказни формули кои најчесто ги означуваме со променливите $F, G, H, \ldots$.

Пример 10: $F: \bot \Rightarrow p \vee \neg q$ е исказна формула.

Редоследот на вршење на логичките операции е: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar$

Пример 11: Дадена е исказната формула $F: p \Rightarrow \neg p \vee q \wedge p$. Прво се врши негацијата $\neg$ на исказот p, потоа конјункцијата $\wedge$ на исказите q и p, потоа дисјункцијата $\vee$ на исказите $\neg p$ и $q \wedge p$ и на крај импликацијата на исказот p и исказот $\neg p \vee q \wedge p$.

Формулите коишто за секоја варијација на вистинитосни вредности на елементарните искази имаат вредност ⊤ се викаат тавтологии.

Пример 12: $F: p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \vee q)$	$\tau(q \vee p)$	$\tau(F)$
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥	⊥	⊤

Формулите коишто за секоја варијација на вистинитосните вредности на елементарните искази имаат вредност ⊥ се викаат контрадикции.

Пример 13:

$$F:\neg(\neg p\vee p)$$

$\tau(p)$	$\tau(\neg p)$	$\tau(\neg p\vee p)$	$\tau(\neg(\neg p\vee p))$
⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥

Формулите коишто за некои варијации на вистинитосни вредности имаат вредност ⊤ , а за некои имаат вредност ⊥ се викаат неутрални исказни формули.

Пример 14:

$$F:p\vee q\Leftrightarrow q\wedge p$$

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p\vee q)$	$\tau(q\wedge p)$	$\tau(F)$
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	⊥	⊤

Формулите F_1 и F_2 коишто имаат иста логичка вредност се еквивалентни исказни формули и $F_1\Leftrightarrow F_2$ е тавтологија.

Пример 15: $F_1:p\wedge q\quad ,\quad F_2:q\wedge p$

$F_1\Leftrightarrow F_2:p\wedge q\Leftrightarrow q\wedge p$

$\tau(F_1)=\top$, $\tau(F_2)=\top$, па значи $\tau(F_1\Leftrightarrow F_2)=\top$

Формулите коишто се тавтологии се од посебен интерес, бидејќи претставуваат логички закони на мислењето.

Пример 16:

1) $p\wedge q\Leftrightarrow q\wedge p$ комутативен закон за конјункција

2) $p\vee q\Leftrightarrow q\vee p$ комутативен закон за дисјункција

3) $(p\wedge q)\wedge r\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge r)$ асоцијативен закон за конјункција

4) $(p\vee q)\vee r\Leftrightarrow p\vee(q\vee r)$ асоцијативен закон за дисјункција

5) $p\vee\neg p$ закон за исклучување на третото

6) $\neg(p\wedge\neg p)$ закон за непротивречност

7) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ дистрибутивен закон за $\wedge$ во однос на $\vee$

8) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ дистрибутивен закон за $\vee$ во однос на $\wedge$

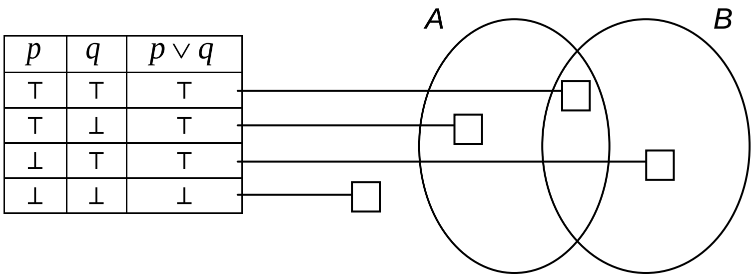
9) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ закон за замена на импликација

10) $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ закон за двојна негација

$$\left.\begin{array}{l} 11)\ \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \\ 12)\ \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \end{array}\right\}$$

Де Морганови закони

Нека *A* и *B* се множества, а $p: x \in A$ и $q: x \in B$ се искази, при што x се менува во множеството *A* односно *B*, тогаш важи врската:



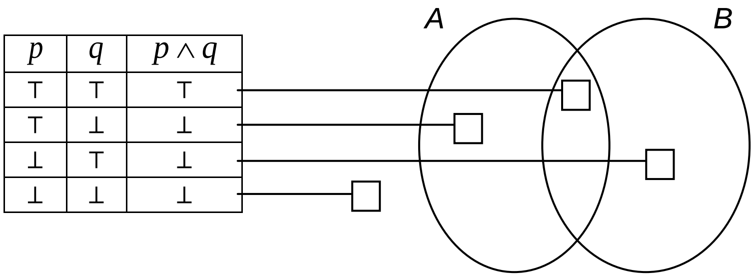
p	q	$p \vee q$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥

Се воочува дека $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B$, кога x се менува во множеството *A* односно *B*$\}$, т.е. унија од множествата *A* и *B* е множество чии елементи припаѓаат на множеството *A* или на множеството *B*.

Пример 17: $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{3, 4, 5, 6\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Нека *A* и *B* се множества, а $p: x \in A$ и $q: x \in B$ се искази, при што x се менува во множеството *A* односно *B*, тогаш важи врската:



p	q	$p \wedge q$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊥

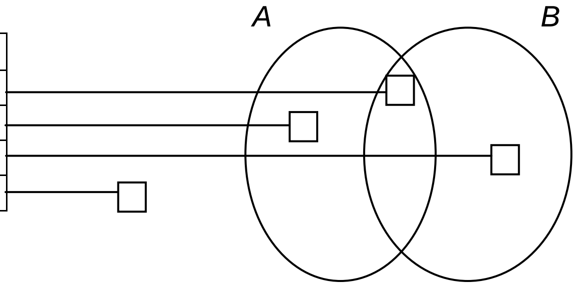
Се воочува дека $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B$, кога x се менува во множеството *A* односно *B*}, т.е. пресек од множествата *A* и *B* е множество чии елементи припаѓаат на множеството *A* и на множеството *B*.

Пример 18: $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{3,4,5,6\}$

$A \cap B = \{3,4\}$

Нека *A* и *B* се множества, а $p: x \in A$ и $q: x \in B$ се искази, при што x се менува во множеството *A* односно *B*, тогаш важи врската:

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊥	⊤	⊥



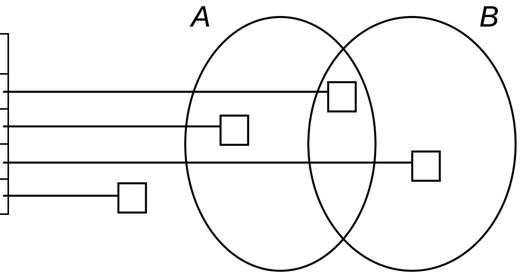
Се воочува дека $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B$, кога x се менува во множеството *A* односно *B*}, т.е. разлика од множествата *A* и *B* е множество чии елементи припаѓаат на множеството *A* и не припаѓаат на множеството *B*.

Пример 19: $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{3,4,5,6\}$

$A \setminus B = \{1,2\}$

Нека *A* и *B* се множества, а $p: x \in A$ и $q: x \in B$ се искази, при што x се менува во множеството *A*, односно *B*, тогаш важи врската:

p	q	$p \veebar q$
⊤	⊤	⊥
⊤	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥

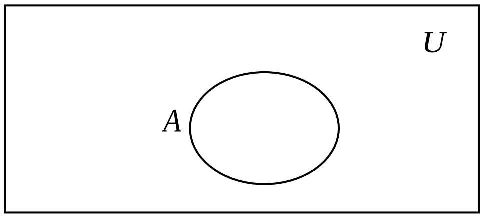


Се воочува дека $A \triangle B = \{x | x \in A \veebar x \in B$, кога x се менува во множеството *A* односно *B*}, т.е. симетрична разлика од множествата *A* и *B* е множество чии елементи припаѓаат или на множеството *A* или на множеството *B*.

Пример 20: $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{3,4,5,6\}$

$A \triangle B = \{1,2,5,6\}$

Нека A е множество, а U е универзално множество.

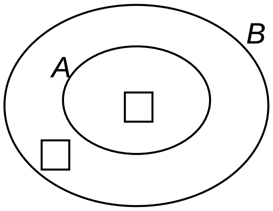


Тогаш, $A'_U = U \setminus A$ се вика комплемент на множеството A во однос на множеството U.

Нека $A \subset B$, тогаш $A'_B = B \setminus A$ е комплемент на множеството A во однос на множеството B.

Нека $p : x \in A$ и $A \subset B$, тогаш $x \in B$, при што x се менува во множеството *B* што значи се менува и во множеството *A*.

p	$\neg p$
⊤	⊥
⊥	⊤



$A'_B = \{x \in B \wedge x \notin A$, кога x се менува во множеството *A*,односно *B*$\}$

Пример 21: $A = \{1, 2\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A'_B = \{3, 4\}$

Записот (x, y) се вика подреден пар, при што x е прва компонента, а y е втора компонента.

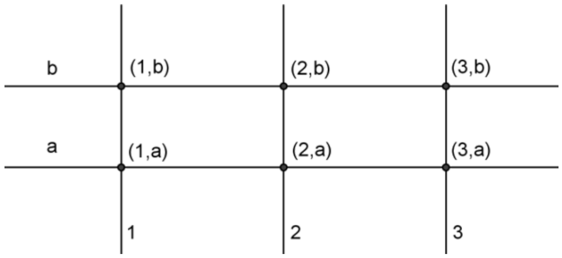
Нека *A* и *B* се две непразни множества и нека x се менува во множеството *A*, а y се менува во множеството *B.*

Множеството $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$ е Декартов производ на множествата *A* и *B* и претставува множество од подредени парови, каде првата компонента е од множеството *A* , а втората компонента од множеството *B*.

Пример 22: $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{a, b\}$

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

т.е. со координатна шема:



Множествата *A* и *B* се еквивалентни, ако имаат ист број елементи.

Пример 23: $A=\{1,2,3,4\}$; $B=\{m,n,p,q\}$

Множествата *A* и *B* се еднакви, ако имаат исти елементи, т.е. ако $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$.

Пример 24: $A=\{2,4,6,8\}$; $B=\{x\,|\,x$ е парен едноцифрен природен број$\}$

Некои изрази со множествата, означени најчесто со $A,B,C,\dots$, сврзани со операциите $\cap$, $\cup$, $\setminus$, $\triangle$, $'$ и еднаквост „ = “ , претставуваат закони.

Пример 25:

1) $A\cap B=B\cap A$ - комутативен закон за пресек

2) $A\cup B=B\cup A$ - комутативен закон за унија

3) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ - асоцијативен закон за пресек

4) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ - асоцијативен закон за унија

5) $A\cup(A\cap B)=A$ - апсорпција на унија во однос на пресек

6) $A\cap(A\cup B)=A$ - апсорпција на пресек во однос на унија

7) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ - дистрибутивен закон на пресек во однос на унија

8) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ - дистрибутивен закон на унија во однос на пресек

9) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$ - дистрибутивен закон на производ во однос на пресек

10) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$ - дистрибутивен закон на производ во однос на унија

$$\left.\begin{array}{ll} 11) & (A\cap B)^{'}=A^{'}\cup B^{'} \\ 12) & (A\cup B)^{'}=A^{'}\cap B^{'} \end{array}\right\}\text{ Де Морганови закони}$$

Реченицата што содржи променлива и станува исказ кога на местото на променливата се заменува константа од некое множество, се вика исказна функција или предикат и најчесто се означува со $P(x), Q(x), \dots$

Пример 26: $x \mid 2$ за $x=1$ е вистинит исказ, т.е. $\tau(1 \mid 2)=\top$, а за $x=7$ е невистинит исказ, т.е. $\tau(7 \mid 2)=\perp$.

Множеството каде што се менува променливата се вика дефиниционо множество и најчесто се означува со D.

Исказната функција е добро зададена, ако е дадена со:

1) ознака $P(x)$

2) законот $x \to P(x)$

3) дефиниционо множество D.

Пример 27: $P(x)\colon\ 2 \mid x\ ,\ D=\{1,2,3,\dots,10\}$

Исказната функција има должина еден, ако има една променлива.

Пример 28: $P(x)\colon\ x \le 3\ ,\ D=\mathbb{Z}^{+}$

Исказната функција има должина два, ако има две променливи.

Пример 29: $Q(x,y)\colon\ x^2+y^2<5\ ,\ x,y \in \mathbb{R}$

Исказната функција има должина три, ако има три променливи итн.

Пример 30: $R(x,y,z)\colon\ x^2+y^2+z^2 \le 7\ ,\ x,y,z \in \mathbb{R}$

Нека е дадена исказната функција $P(x)\colon\ 3 \mid x\ ,\ D=\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Имаме:

$\tau(3 \mid 0)=\top$; $\tau(3 \mid 1)=\perp$; $\tau(3 \mid 2)=\perp$; $\tau(3 \mid 3)=\top$; $\tau(3 \mid 4)=\perp$; $\tau(3 \mid 5)=\perp$; $\tau(3 \mid 6)=\top$, т.е.

$\tau(P(0))=\top$; $\tau(P(1))=\perp$; $\tau(P(2))=\perp$; $\tau(P(3))=\top$; $\tau(P(4))=\perp$; $\tau(P(5))=\perp$; $\tau(P(6))=\top$.

Множеството од вредностите на променливата x за кои исказната функција преминува во вистинит исказ, се вика множество решенија на исказната функција и најчесто се означува со $M_{P(x)}$ и важи $M_{P(x)} \subseteq D$.

Пример 31: Нека $P(x)\colon\ 2 \mid x\ ,\ D=\{0,1,2,\dots,12\}$

$M_{P(x)}=\{0,2,4,6,8,10,12\}$

Симболот $\forall$ (за секој или за сите) се вика универзален квантор (квантификатор).

Симболот $\exists$ (постои некој или барем еден) се вика егзистенцијален квантор (квантификатор).

Симболот $\exists!$ (постои единствен или постои еден и само еден) исто така егзистенцијален квантор

Овие квантори се користат:

1) за скратено запишување на реченици:

Пример 32: За секои два природни броеви, збирот не се менува, ако собироците си ги заменат местата. Скратен запис: $(\forall a, b \in \mathbb{N})(a + b = b + a)$.

2) за правење искази од исказните функции:

Пример 33: Исказната функција $2 \mid x$ за $x \in \mathbb{N}$ не е исказ, затоа што за некој x е $\top$, а за некој x е $\perp$. Скратен запис: $(\forall x \in \mathbb{N})\ 2 \mid x$ е невистинит исказ

$(\exists x \in \mathbb{N})\ 2 \mid x$ е вистинит исказ

Математичките тврдења што се прифаќаат за вистинити без доказ се викаат основни тврдења или аксиоми.

Пример 34: „Низ две различни точки минува една и само една права“ е основно тврдење или аксиома.

Пример 35: „Бројот нула е неутрален елемент (e е неутрален елемент, ако важи $x * e = x$, $*$ е ознака за некоја операција) во собирањето на целите броеви“ е основно тврдење или аксиома.

Математичко тврдење што претставува логичка последица од други точни тврдења (т.е. чија точност се докажува) се вика изведено тврдење или теорема.

Пример 36: Тврдењето: „Секоја равенка $x + a = b$ има единствено решение во множеството $\mathbb{Z}$“, $x = b - a$ е изведено тврдење, бидејќи по додавање на двете страни $(-a)$, т.е. $x + a + (-a) = b + (-a)$ се користи првичното тврдење $a + (-a) = 0$.

Теоремата: „Ако триаголникот е рамнокрак, тогаш висините кон краците се еднакви“ е искажана во условна форма.
Исказот p: „Триаголникот е рамнокрак“ е претпоставка или услов.
Исказот q: „Висините кон краците се еднакви“ е заклучок или тврдење.

Теоремата во безусловна или категорична форма, гласи: „Висините кон краците во рамнокрак триаголник се еднакви“ .

Дадена е теоремата: „Ако еден четириаголник е тетивен, тогаш неговите спротивни агли се сумплементни“.

1) Претпоставка е p: „Четириаголникот е тетивен“.

Заклучок е q: „Спротивни агли се сумплементни“.

2) Теоремата во категорична форма гласи: „Во тетивен четириаголник спротивните агли се сумплементни“.

3) Обратната теоремата гласи: „Ако спротивните агли во четириаголникот се сумплементни, тогаш тој четириаголник е тетивен“.

4) Обратната теорема во категорична форма гласи: „Спротивните агли се сумплементни кај тетивен четириаголник“.

5) Првичната теорема и обратната теоремата заедно запишани гласат: „Четириаголникот е тетивен ако и само ако спротивните агли се сумплементни“.

Обратните теореми не важат секогаш.

Пример 37: „Ако $x \mid a \wedge x \mid b$ и $x, a, b \in \mathbb{Z}$, тогаш $x \mid a+b$ “ е тврдење, обратното тврдење е:

„Ако $x \mid a+b$ за $x, a, b \in \mathbb{Z}$, тогаш $x \mid a \wedge x \mid b$ “ , но не важи, т.е. не е теорема.

Синтетичкиот доказ на теоремата $p \Rightarrow q$ е директен доказ и од претпоставката p со напредување се доаѓа до заклучокот q.

Пример 38: Теоремата: „Ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, тогаш $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ “ ја докажуваме со напредување.

Ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, тогаш $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$. Сега, ако $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$, тогаш $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

Аналитички доказ на теоремата $p \Rightarrow q$ е директен доказ и од заклучокот q со анализа се доаѓа до претпоставката p.

Пример 39: Нека е дадено тврдењето: $a + \frac{1}{a} \geq 2$ за $a \in \mathbb{R}^{+}$.

Заклучокот $a + \frac{1}{a} \geq 2$ е добиен од $a^2 + 1 \geq 2a$ со делење со a.

Неравенството $a^2 + 1 \geq 2a$ е добиено од $a^2 - 2a + 1 \geq 0$ со префрлање на $2a$ на десната страна на неравенството.

Неравенството $(a-1)^2 \geq 0$ е точно и може да биде претпоставка на заклучокот $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Ако импликацијата $\neg q \Rightarrow \neg p$ полесно се докажува од импликацијата $p \Rightarrow q$, тогаш се работи за индиректен доказ, бидејќи формулата $\neg q \Rightarrow \neg p \Leftrightarrow p \Rightarrow q$ е тавтологија.

Пример 40: Теоремата: „Ако $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и $a,b,c,d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, тогаш $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$“, може да ја докажеме со индиректен доказ.

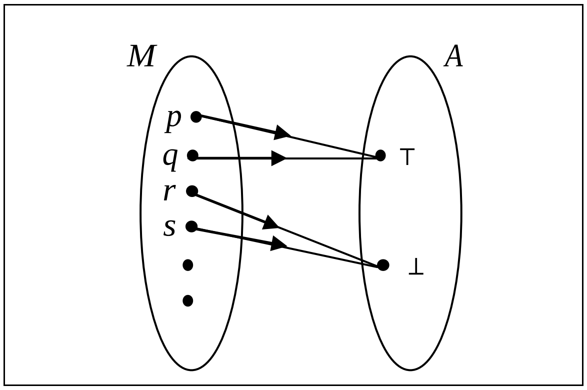
Ако $\frac{a-b}{b} \neq \frac{c-d}{d}$, тогаш $\frac{a}{b}-1 \neq \frac{c}{d}-1$.

Ако $\frac{a}{b}-1 \neq \frac{c}{d}-1$, тогаш $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$, со што теоремата е индиректно докажана.

Ниво Б Ученикот покажува дека разбира...

НИВО:РАЗБИРАЊЕ

Нека $M=\{p,q,r,s,...\}$ е множество од сите декларативни осмислени реченици за кои може да се постави прашањето за вистинитост, а τ е пресликување од множеството M во множеството $A=\{\top,\perp\}$.

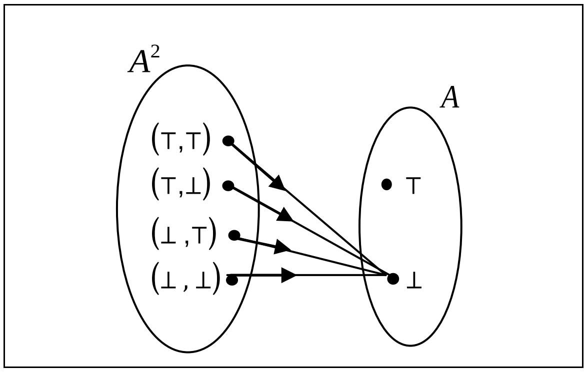


Елементите на множеството M ги викаме искази.

Пример 41: Реченицата p:„Реката Вардар тече низ Битола“ е исказ, бидејќи $\tau: M \to A$ и $\tau(p)=\perp$.

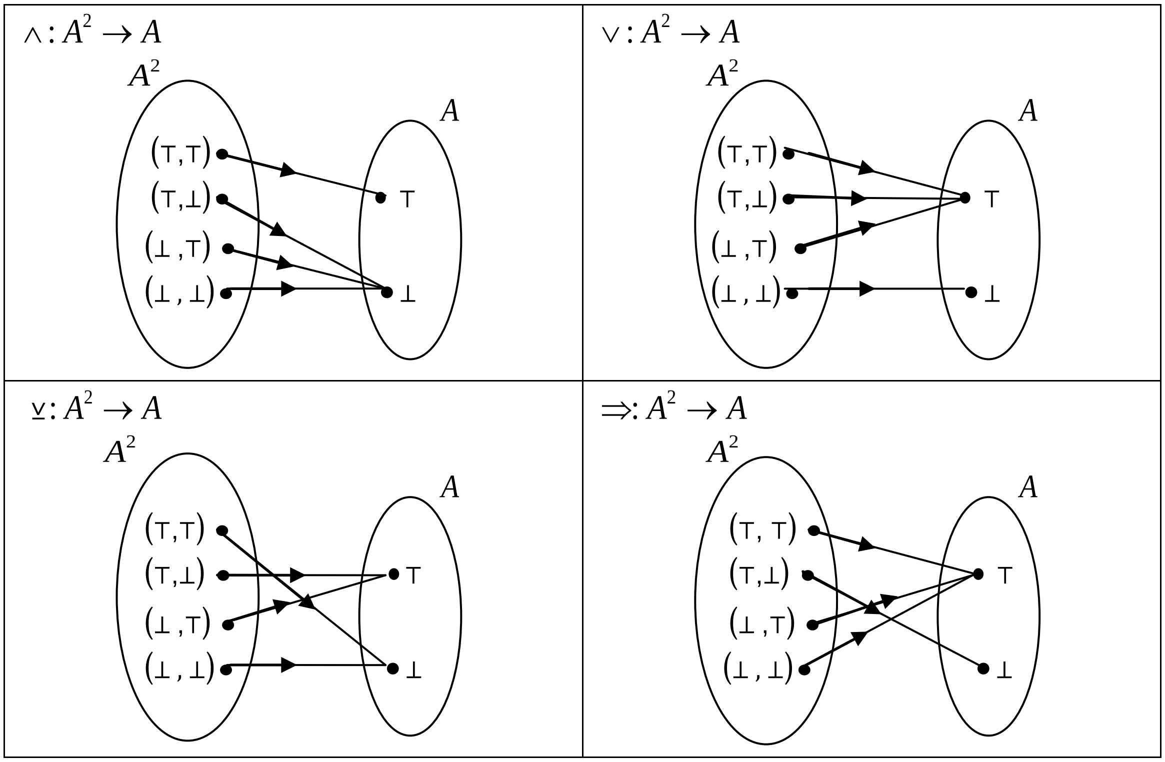
Нека $A=\{\top,\perp\}$, $A^2=A\times A=\{(\top,\top),(\top,\perp),(\perp,\top),(\perp,\perp)\}$. Секое пресликување од A^2 во A е бинарна логичка операција.

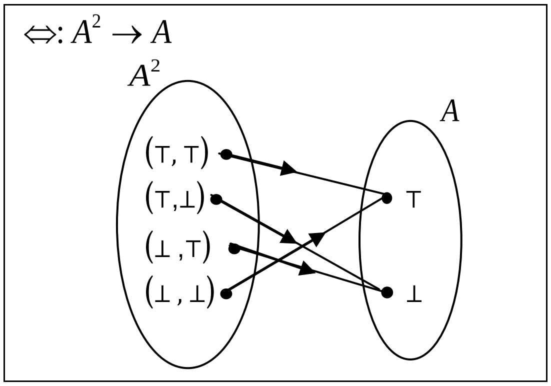
Пример 42: Пресликувањето $A^2 \to A$ зададено со графот



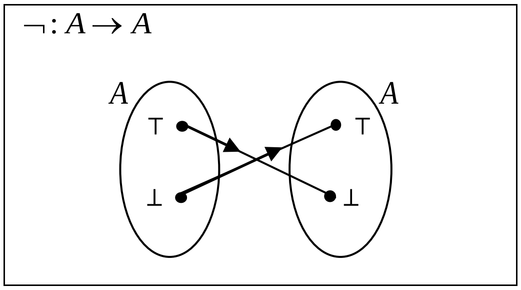
е бинарна логичка операција.

Пример 43: Бинарните операции $\wedge, \vee, \veebar, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ ги претставуваме со графовите:





Пример 44: Унарната операција $\neg$ ја претставуваме со графот:



Пример 45: Од вистинитосната табела ќе согледаме дека следниве закони со една или две променливи се тавтологии.

$F: p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ - комутативен закон за конјункција

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	F
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

$F: p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ - комутативен закон за дисјункција

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	F
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

$F: p \vee \neg p$ - закон за исклучување на третото

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$

$F: \neg(p \wedge \neg p)$- закон за непротивречност

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$

$F: p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

- закон за замена на импликација

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	F
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

$F: \neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

- закон за двојна негација

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$	F
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$

$F:\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q$ - Де Морганов закон

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\wedge q$	$\neg(p\wedge q)$	$\neg p\vee\neg q$	F
⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤

$F:\neg(p\vee q)\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg q$ - Де Морганов закон

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\vee q$	$\neg(p\vee q)$	$\neg p\wedge\neg q$	F
⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤

$F:p\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow p$ - закон за апсорпција на $\vee$ спрема $\wedge$

p	q	$p\wedge q$	$p\vee(p\wedge q)$	F
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥	⊤
⊥	⊥	⊥	⊥	⊤

$F:p\wedge(p\vee q)\Leftrightarrow p$ - закон за апсорпција на $\wedge$ спрема $\vee$

p	q	$p\vee q$	$p\wedge(p\vee q)$	F
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥	⊤
⊥	⊥	⊥	⊥	⊤

Пример 46: Од исказните табели ќе согледаме дека се тавтологии следните правила:

$(p\Rightarrow q)\wedge p\Rightarrow q$ - модус поненс

$(p\Rightarrow q)\wedge\neg q\Rightarrow\neg p$ - модус толенс

$p\Rightarrow q\Leftrightarrow\neg q\Rightarrow\neg p$ - правило на контрапозиција

$p \Rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$ - правило на контрадикција

$p \Rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \neg q \Rightarrow q$ - правило на контрадикција

$\left(p \Rightarrow q\right) \wedge p \Rightarrow q$ - модус поненс

p	q	$p \Rightarrow q$	$\left(p \Rightarrow q\right) \wedge p$	F
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤

$\left(p \Rightarrow q\right) \wedge p \Rightarrow q$ - модус толенс

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\left(p \Rightarrow q\right) \wedge \neg q$	F
⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤

$p \Rightarrow q \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$ - правило на контрапозиција

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	F
⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤

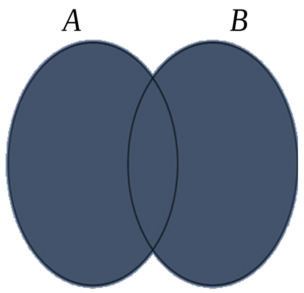
$p \Rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$ - правило на контрадикција

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg q$	$p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$	F
⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤

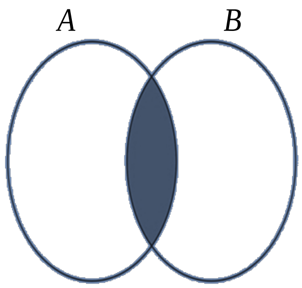
$p \Rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \neg q \Rightarrow q$ - правило на контрадикција

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg q$	$p \wedge \neg q \Rightarrow q$	F
⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤

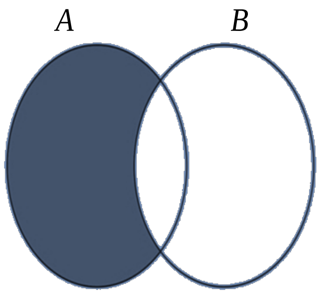
Пример 47: Со шрафура, множествата $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $A \Delta B$ се претставуваат:



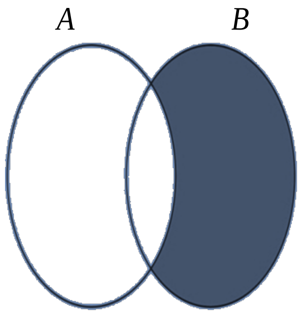
$A \cup B$



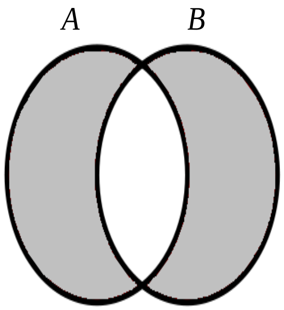
$A \cap B$



$A \setminus B$



$B \setminus A$



$A \Delta B$

Пример 48: Нека $A = \{1, 2, a, b\}$; $B = \{a, b, 3, 4\}$, тогаш важат законите:

$A \cap B = B \cap A$ - комутативен закон за $\cap$, бидејќи $A \cap B = \{a, b\}$; $B \cap A = \{a, b\}$

$A \cup B = B \cup A$ - комутативен закон за $\cup$, бидејќи
$A \cup B = \{1, 2, a, b, 3, 4\}$; $B \cup A = \{1, 2, a, b, 3, 4\}$

$A \cup \left(A \cap B\right) = A$ - апсорпција на $\cup$ спрема $\cap$, бидејќи

$A \cup \left(A \cap B\right) = \{1, 2, a, b\} \cup \{a, b\} = \{1, 2, a, b\} = A$

$A \cap \left(A \cup B\right) = A$ - апсорпција на $\cap$ спрема $\cup$, бидејќи

$A \cap \left(A \cup B\right) = \{1, 2, a, b\} \cup \{1, 2, a, b, 3, 4\} = \{1, 2, a, b\} = A$

Нека се дадени две исказни функции $P(x)$ и $Q(x)$ во множеството D, а $M_{P(x)}$ и $M_{Q(x)}$ се множества решенија на исказната функција, тогаш за исказните функции $P(x) \vee Q(x)$; $P(x) \wedge Q(x)$ во D, множества решенија се:

$$M_{P(x) \vee Q(x)} = M_{P(x)} \cup M_{Q(x)}$$

$$M_{P(x) \wedge Q(x)} = M_{P(x)} \cap M_{Q(x)}$$

Пример 49: Нека $P(x): 2 | x \wedge x \in D = \{0,1,2,3,...,12\}$ и

$Q(x): 3 | x \wedge x \in D = \{0,1,2,3,...,12\}$

$$M_{P(x)} = \{0,2,4,6,8,10,12\} \quad , \quad M_{Q(x)} = \{0,3,6,9,12\}$$

$$M_{P(x) \vee Q(x)} = M_{P(x)} \cup M_{Q(x)} = \{0,2,3,4,6,8,9,10,12\}$$

$$M_{P(x) \wedge Q(x)} = M_{P(x)} \cap M_{Q(x)} = \{0,6,12\}$$

Негација на исказите во кои учествуваат исказни функции и квантори, се прави со еквиваленција.

$$\neg((\forall x)\ P(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\ \neg P(x)$$

$$\neg((\exists x)\ P(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\ \neg P(x)$$

Пример 50: Дадено е множеството $\mathbb{N}_{10} = \{1,2,3,..,10\}$ и исказите $(\forall x \in \mathbb{N}_{10})\ 2 | x$ и $(\exists x \in \mathbb{N}_{10})\ 3 | x$, тогаш:

$\neg((\forall x \in \mathbb{N}_{10})\ 2 | x) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{N}_{10})\ 2 \nmid x$ и $\neg((\exists x \in \mathbb{N}_{10})\ 3 | x) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{N}_{10})\ 3 \nmid x$

Ја разгледуваме импликацијата $p \Rightarrow q$ и табелата:

p	q	$p \Rightarrow q$	
⊤	⊤	⊤	1
⊤	⊥	⊥	2
⊥	⊤	⊤	3
⊥	⊥	⊤	4

Формулата $F: p \Rightarrow q$ е условна форма на теорема, само во еден случај, и тоа:

p :„Триаголникот е правоаголен.“

q: „Збирот на квадратите над катетите е еднаков со квадратот над хипотенузата“.

$\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \top$ и уште q е логичко следство од p.

Во следните случаи, $p \Rightarrow q$ не е теорема:

1) p:„Квадратот е паралелограм.“
   q: „Збирот на квадратите над катетите е еднаков со квадратот над хипотенузата.“
   $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \top$, но q не е логичко следство од p .

2) p:„ Квадратот е паралелограм.“
   q: „Збирот на внатрешните агли во триаголникот е 360°.“
$\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \bot$

3) p:„Триаголникот е круг.“
   q: „Збирот на внатрешните агли во триаголникот е 180°.“
   $\tau(p) = \bot$, $\tau(q) = \top$

4) p:„Триаголникот е круг."
   q: „Збирот на внатрешните агли во триаголникот е 360°.“
   $\tau(p) = \bot$, $\tau(q) = \bot$

➤ Докажувањето на теоремата: „Ако $2 \mid x \wedge 3 \mid x$, тогаш $6 \mid x$“ го изведуваме со напредување.

$p: 2 \mid x \wedge 3 \mid x$ е претпоставка или теза.

Бараме логичко следство од исказот $p: 2 \mid x \wedge 3 \mid x$, а тоа е исказот

$r_1 : (\exists a, b \in \mathbb{Z})\ x = 2a \wedge x = 3b$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

$\tau(p \Rightarrow r_1) = \top$

Бараме логичко следство од исказот r_1, а тоа е исказот $r_2 : 3x = 6a$, $2x = 6b$.

$\tau(r_1 \Rightarrow r_2) = \top$

Бараме логичко следство од исказот r_2, а тоа е исказот $r_3 : x = 6(a-b) = 6c$, $c \in \mathbb{Z}$.

$\tau(r_2 \Rightarrow r_3) = \top$

Бараме логичко следство од исказот r_3, а тоа е исказот $q: 6 \mid x$ - заклучок

$\tau(r_3 \Rightarrow q) = \top$

Попрактично е запишувањето:

$$p: 2 \mid x \wedge 3 \mid x$$
$$\Downarrow$$
$$r_1: \begin{cases} x = 2a \\ x = 3b \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$r_2: \begin{cases} 3x = 6a \\ 2x = 6b \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$r_3: x = 6\left(a - b\right) = 6c \text{ , } c \in \mathbb{Z}$$
$$\Downarrow$$
$$q: 6 \mid x \text{ ,}$$

каде што p е претпоставка, q е заклучок, r_1, r_2, r_3 се аргументи, а целиот запис се вика демонстрација.

ЗАДАЧИ ОД НИВО **А** И НИВО **Б** :

1. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ е рационален број; б) 13 е прост број; в) 0 е природен број; г) 9 е прост број

2. Определи кои од следните искази се вистинити:

а) $2-5=5-2$ б) $|2-5|=|5-2|$ в) $2^2+3^2=5^2$ г) $2\cdot 0,3=0,06$

3. Определи кои од следните искази се вистинити:

а) $(\forall x\in\mathbb{N})(2\,|\,x)$ б) $(\exists x\in\mathbb{N})(2\,|\,x)$ в) $(\exists x\in\mathbb{N})(x\,|\,6)$ г) $(\forall x\in\mathbb{N})(x\,|\,6)$

4. Изврши негација на изразите:

а) $3\leq 5$ б) $7>3$ в) $(\exists x\in\mathbb{N})(5\,|\,x)$ г) $(\forall x\in\mathbb{N})(x+2\neq 3)$

5. Дадени се исказите $p:2>3,\, q:2+3=5,\, r:2\,|\,10$. Одреди ја логичката вредност на исказите: а) $p\wedge q\Rightarrow r$; б) $p\vee q\wedge r$; в) $p\Rightarrow q\wedge\neg r$; г) $p\veebar q\wedge r$.

6. Со вистинитосни таблици испитај ги логичките вредности на исказните формули:

а) $p\wedge q\Leftrightarrow q\wedge p$; б) $p\Rightarrow q\Leftrightarrow q\Rightarrow p$; в) $p\veebar q\Leftrightarrow q\veebar p$; г) $(p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow(q\Leftrightarrow p)$.

7. Нека $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$. Одреди:

$A\cup B$; $A\cap B$; $A\setminus B$; $B\setminus A$; $A\vartriangle B$; $(A\setminus B)\times(B\setminus A)$

8. Нека е дадена исказната функција $P(x):4\,|\,x\wedge x\in D=\{0,1,2,3,..,,20\}$.

Одреди $M_{P(x)}$ и $M'_{P(x)}=M_{\neg P(x)}$

9. Нека $P(x,y,z):x^2+y^2=z^2$, $x,y,z\in\mathbb{N}\wedge x+z=2y$. Одреди $M_{P(x,y,z)}$.

10. Нека $A=\{2,3,4\}$; $B=\{4,5,6\}$. Провери го равенството $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)$.

11. Користејќи го знакот за импликација $\Rightarrow$, запиши ги пократко следните реченици:

а) Ако $x=0\wedge y=0$, тогаш $x+y=0$; б) $x\cdot y=0$ ако $x=0\vee y=0$.

12. Нека со $F(p)$ е означена формулата $((\top \Rightarrow p) \Rightarrow \top) \Rightarrow p$.

Одреди $F(\top)$, $F(\bot)$, $F(F(\top))$.

13. Во секоја од три кутии се наоѓа по едно топче, или бело или црно или зелено. На првата кутија пишува „бела кутија“, на втората пишува „црна кутија“, а на третата „бела или зелена“ кутија. Меѓутоа ниеден од натписите не одговара на вистината. Одреди каде е секое од топчињата.

14. Реши ја по x формулата:

а) $2 \in \{1, x, 3, 4\}$ б) $\{1,5\} \subset \{1, 2, x, 4, 10\}$ в) $\{1,5\} \in \{1, 2, x, 4, 10\}$

15. Во едно училиште има 60 наставници, од кои 39 пијат кафе, 28 пијат чај, а 16 пијат и чај и кафе. Има ли наставници кои не пијат ниту чај ниту кафе?

16. Следните формули реши ги по $p \in \{\top, \bot\}$.

а) $\tau(\top \wedge p) = \top$ б) $\tau((\top \wedge p) \wedge \top) = \top$ в) $\tau((\bot \wedge p) \vee \bot) = \bot$

17. Одреди ги вистинитосните вредности на p и q од формулите:

а) $\tau((q \vee \neg q) \Rightarrow p) = \bot$ б) $\tau(\neg(q \wedge q)) = \bot$

18. Нека $F : x \,|\, 4 \Rightarrow x \,|\, 2$, $x \in \{1, 2, 3\}$. За секоја вредност на $x \in D$ одреди ја вистинитосната вредност на формулата.

19. Определи кои од следните тврдења се аксиоми:

а) Низ две различни точки во рамнината минува една и само една права.

б) Ако $2 \,|\, x \wedge 7 \,|\, x$, тогаш и $14 \,|\, x$ за $x \in \mathbb{N}$.

в) $a + (-a) = 0$ за секое $a \in \mathbb{Z}$.

20. Дали тврдењето „Ако $a + c = b + c$, тогаш $a = b$, за секои $a, b, c \in \mathbb{Z}$“ е основно или изведено? Ако е изведено, тогаш кое основно тврдење е користено?

21. Покажи дека исказните формули $F_1 : (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ и $F_2 : (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ се логички еквивалентни.

Ниво В

Ученикот треба да го примени своето знаење и разбирање

НИВО: ПРИМЕНА

- Дефинициите не се искази, бидејќи не може да се зборува за нивната вистинитост.

Пример 51: Четириаголник со два пара паралелни страни е паралелограм.

- Основните (првичните) тврдења, т.е. аксиомите се искази.

Пример 52: Низ две различни точки минува една и само една права.

- Изведените тврдења (теоремите) се искази.

Пример 53: Висините спуштени кон краците во рамнокрак триаголник се еднакви.

- Логичките операции може да ги претставиме со табели - Кејлиеви шеми:

Конјункција „$\wedge$“

$\wedge$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Неутрален елемент е „$\top$“ , бидејќи $\tau(p\wedge\top)=\tau(\top\wedge p)=\tau(p)$.

Дисјункција „$\vee$“

$\vee$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$

Неутрален елемент е „$\perp$“ , бидејќи $\tau(p\vee\perp)=\tau(\perp\vee p)=\tau(p)$.

Импликација „$\Rightarrow$“

$\Rightarrow$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$

Неутрален елемент за импликацијата, не постои.

Еквиваленција „$\Leftrightarrow$ “

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Неутрален елемент е „$\top$“ , бидејќи $\tau\,(\,p \Leftrightarrow \top) = \tau\,(\top \Leftrightarrow p\,) = \tau(p)$.

Исклучна дисјункција „ $\veebar$ “

$\veebar$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

Неутрален елемент е „$\bot$“ , бидејќи $\tau\,(\,p \veebar \bot) = \tau\,(\bot \veebar p\,) = \tau(p)$.

За логичките операции $\Leftrightarrow$ и $\veebar$ важи:

$\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \veebar q)$ и $\neg(p \veebar q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

Пример 54:

Со цифрите 1 и 2 може да напишеме осум трицифрени броеви и тоа:

111	211
112	212
121	221
122	222

Ако наместо 1 ставиме $\top$, а наместо 2 ставиме $\bot$, добиваме:

$\top\top\top$	$\bot\top\top$
$\top\top\bot$	$\bot\top\bot$
$\top\bot\top$	$\bot\bot\top$
$\top\bot\bot$	$\bot\bot\bot$

што ги претставува сите можни случаи при проверување на логички формули со три искази.

Пример 55: Формулата $F: p \Rightarrow q \wedge \neg r$ е неутрална исказна формула , што се согледува од следната таблица на вистинитосни вредности.

p	q	r	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$p \Rightarrow q \wedge \neg r$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$

Пример 56: Со вистинитосна таблица ќе покажеме дека правилото за изведување заклучок $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$, наречено хипотеричен силогизам, е тавтологија.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤

Пример 57: Со табела на вистинитосни вредности ќе ги одредиме вистинитосните вредности на формулите: $F_1 : (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$ и $F_2 : (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$.

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$r \vee p$	$(p \vee q) \wedge (q \vee r)$	F_1
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$r \wedge p$	$(p \wedge q) \vee (q \wedge r)$	F_2
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥

Формулите и F_1 и F_2 се логички еквивалентни, па $F_1 \Leftrightarrow F_2$ е тавтологија, т.е. $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$ се нарекува Дедекиндова тавтологија.

Пример 58: Со вистинитосна таблица ќе покажеме дека формулата за $F:(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q \Rightarrow r \wedge \neg r$ наречена правило на контрадикција, каде r е произволен исказ, е тавтологија.

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg q$	$r \wedge \neg r$	$p \wedge \neg q \Rightarrow r \wedge \neg r$	F
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤

Некои исказни формули може да се докажат дека се тавтологии со доведување до противречност, како во следниот пример.

Пример 59: $F:(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

Според табелата за импликација: $(\tau(p \Rightarrow q) \wedge p) = \top$, $\tau(q) = \bot$ е случајот кога формулата не би била тавтологија. Ако се добие дека ова не може да се случи, тогаш формулата е тавтологија.

Значи, претпоставуваме дека $(\tau(p \Rightarrow q) \wedge p) = \top$, $\tau(q) = \bot$. Нека $(\tau(p \Rightarrow q) \wedge p) = \top$, тогаш $\tau(p \Rightarrow \bot) = \top$ и $\tau(p) = \top$, но $\tau(p) = \bot$, што значи дека добивме контрадикција. Случајот не е можен, па формулата е тавтологија.

Со помош на законот за двојна негација, законот за замена на импликација, замена на еквиваленција и Де Моргановите закони, т.е.

$$\underbrace{\neg\neg\neg\ldots\neg}_{\text{парен број}} p \Leftrightarrow p\,; \qquad \neg\underbrace{\neg\neg\neg\ldots\neg}_{\text{непарен број}} p \Leftrightarrow \neg p\,;$$

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \vee p\,; \qquad (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p);$$

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$; $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ исказните формули може да се трансформираат во конјункна форма, дисјункна форма и конјункно-дисјункна форма.

Пример 60: Формулата $F: p \Rightarrow q \Rightarrow \neg p$ претставена во дисјункна форма е:

$$\begin{aligned} p \Rightarrow q \Rightarrow \neg p &\Leftrightarrow \neg p \vee q \Rightarrow \neg p \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg p\,. \end{aligned}$$

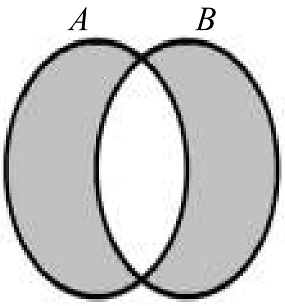
Во конјункно-дисјункна форма: $p \Rightarrow q \Rightarrow \neg p \Leftrightarrow \neg p \vee q \Rightarrow \neg p$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg p \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg p\,. \end{aligned}$$

Во конјункна форма: $p \Rightarrow q \Rightarrow \neg p \Leftrightarrow \neg p \vee q \Rightarrow \neg p$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg p \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg p \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge \neg q) \wedge p)\,. \end{aligned}$$

Нека се дадени две множества со графичкиот приказ:



Тогаш, симетричната разлика на множествата може да се претстави со:

$A \triangle B = \{x \mid x \in A \veebar x \in B\}$; $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$; $A \triangle B = A'_{A \cup B} \cup B'_{A \cup B}$.

Пример 61: Нека $A = \{x \mid x \mid 6, x \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{x \mid x = 2k-1, k \in \mathbb{N}, k \leq 4\}$, тогаш:

$A \cap B = \{1,3\}$ $\quad A'_{A \cup B} = \{5,7\}$ $\quad (A \setminus B) \times (B \setminus A) = \{(2,5),(2,7),(6,5),(6,7)\}$

$A \cup B = \{1,2,3,5,6,7\}$ $\quad B'_{A \cup B} = \{2,6\}$ $\quad (A \setminus B)^2 = \{(2,2),(2,6),(6,2),(6,6)\}$

$A \setminus B = \{2,6\}$ $\quad A \triangle B = \{2,5,6,7\}$

$B \setminus A = \{5,7\}$

Докажувањето на законите за операции со множествата може да го изведеме на следните начини:

а) со користење на еднаквост на множества;

б) со трансформација во исказни формули, кои што се проверуваат дека се тавтологии;

в) со табела за припадност на елементите на множествата.

Пример 62: Комутативниот закон на унијата на две множества може да го докажуваме на следните начини:

а) Треба да докажеме дека $A \cup B = B \cup A$.
Нека $L = A \cup B$ и $D = B \cup A$.
Од $x \in L \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in A \Rightarrow x \in B \cup A \Rightarrow x \in D \Rightarrow$
$\Rightarrow L \subseteq D$
Од $x \in D \Rightarrow x \in B \cup A \Rightarrow x \in B \vee x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in L \Rightarrow$
$\Rightarrow D \subseteq L$
Од $L \subseteq D$ и $D \subseteq L \Rightarrow L = D$ т.е. $A \cup B = B \cup A$.

б) $A \cup B = B \cup A$, $p : x \in A$ и $q : x \in B$

$$\Updownarrow$$

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B \cup A$ за секој x

$$\Updownarrow$$

$(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow (x \in B \vee x \in A)$ за секој x

$$\Updownarrow$$

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

$$\Updownarrow$$

Т

в)

A	B	$A \cup B$	$B \cup A$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

Од еднаквоста на последните две колони, следува равенството.

Со трансформација на сложените исказни функции во дисјункна, конјункна и дисјункно-конјункна форма, можат да се одредуваат множества решенија на посложените исказни функции.

Пример 63: Во множеството $D = \{0,1,2,...,10,11,12\}$ дадени се исказните функции $P(x) : 3 | x$ и $Q(x) : 3 \le x \le 10$. Множествата решенија на исказните функции
$P(x)$, $Q(x)$, $\neg P(x)$, $\neg Q(x)$, $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \vee Q(x)$, $P(x) \veebar Q(x)$,
$P(x) \Rightarrow Q(x)$, $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ редоследно изнесуваат:

$M_{P(x)} = \{0,3,6,9,12\}$, $\quad M_{Q(x)} = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$,

$M_{\neg P(x)} = M'_{P(x)} = D \setminus M_{P(x)} = \{1,2,4,5,7,8,10,11\}$, $\quad M_{\neg Q(x)} = M'_{Q(x)} = D \setminus M_{Q(x)} = \{0,1,2,11,12\}$,

$M_{P(x)\wedge Q(x)} = M_{P(x)} \cap M_{Q(x)} = \{3,6,9\}$, $\quad M_{P(x)\vee Q(x)} = M_{P(x)} \cup M_{Q(x)} = \{0,3,4,5,6,7,8,9,10,12\}$,

$M_{P(x)\veebar Q(x)} = M_{P(x)} \triangle M_{Q(x)} = \{0,4,5,7,8,10,12\}$

$M_{P(x)\Rightarrow Q(x)} = M_{\neg P(x)\vee Q(x)} = M_{\neg P(x)} \cup M_{Q(x)} = \{1,2,3,4,5,6,7,7,8,9,10,11\}$

$$M_{P(x)\Leftrightarrow Q(x)} = M_{(\neg P(x)\vee Q(x))\wedge(\neg Q(x)\vee P(x))} = \left(M_{\neg P(x)} \cup M_{Q(x)}\right) \cap \left(M_{\neg Q(x)} \cup M_{P(x)}\right) =$$
$$= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\} \cap \{0,1,2,3,6,9,11,12\} = \{1,2,3,6,9,11\}$$

Дека $\neg\left(P(x) \Leftrightarrow Q(x)\right) \Leftrightarrow P(x) \veebar Q(x)$ се согледува од:

$M_{(P(x)\veebar Q(x))} = D \setminus M_{P(x)\Leftrightarrow Q(x)}$, т.е. $\{0,4,5,7,8,10,12\} = D \setminus \{1,2,3,6,9,11\}$.

При докажување на теоремата $p \Rightarrow q$, треба импликацијата $p \Rightarrow q$ да биде правилно изведен заклучок. Тоа се постигнува со правилото „хипотетичен силогизам“, шематски прикажано:

$$\frac{p \Rightarrow r_1 \,,\, r_1 \Rightarrow r_2 \,,\ldots,\; r_k \Rightarrow q}{p \Rightarrow q}$$

Сега треба заклучокот q да биде правилно изведен заклучок. Тоа се постигнува со правилото „модус поненс“, шематски прикажано:

$$\frac{p \Rightarrow q,\; p}{q}$$

Ако се докажува индиректно, со контрапозиција,тогаш:

$\dfrac{\neg q \Rightarrow s_1 \,,\, s_1 \Rightarrow s_2 \,,\ldots,\; s_k \Rightarrow \neg p}{\neg q \Rightarrow \neg p}$ - Хипотетичен силогизам

$\dfrac{\neg q \Rightarrow \neg p}{p \Rightarrow q}$ - Правило на контрапозиција

$\dfrac{p \Rightarrow q,\; p}{q}$ - Модус поненс

Ако се докажува индиректно со некое правило на контрадикција, на пример $p \Rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$, тогаш:

$$\frac{p \wedge \neg q \Rightarrow t_1 \, , t_1 \Rightarrow t_2 \, , ..., \; t_k \Rightarrow \neg p}{\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p}$$ - Хипотетичен силогизам

$$\frac{p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p}{p \Rightarrow q}$$ - Правило на контрадикција

$$\frac{p \Rightarrow q, \, p}{q}$$ - Модус поненс

Значи q е правилно изведен заклучок, а со тоа теоремата е докажана.

Пример 64: Докажи дека $a + \frac{1}{a} \geq 2 \, , \left(\forall a \in \mathbb{R}^{+} \right)$.

Тврдиме дека $a + \frac{1}{a} \geq 2 \, , \left(\forall a \in \mathbb{R}^{+} \right)$.

Бараме причина за $a + \frac{1}{a} \geq 2$, а тоа е $a^2 + 1 \geq 2a$.

Бараме причина за $a^2 + 1 \geq 2a$, а тоа е $a^2 - 2a + 1 \geq 0$.

Бараме причина за $a^2 - 2a + 1 \geq 0$, а тоа е $\left(a - 1 \right)^2 \geq 0$, а ова е точно неравенство.

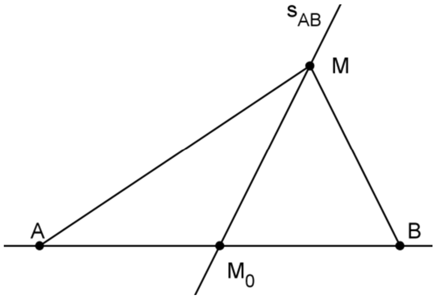
Сега,
$$\begin{array}{c} p : \left(a - 1 \right)^2 \geq 0 \\ \Downarrow \\ r_1 : a^2 - 2a + 1 \geq 0 \\ \Downarrow \\ r_2 : a^2 + 1 \geq 2a \\ \Downarrow \\ q : a + \frac{1}{a} \geq 2 \, , \left(\forall a \in \mathbb{R}^{+} \right). \end{array}$$

$$\frac{p \Rightarrow r_1 \, , r_1 \Rightarrow r_2 \, , r_2 \Rightarrow q}{p \Rightarrow q}$$ - Хипотетичен силогизам ; $$\frac{p \Rightarrow q, \, p}{q}$$ - Модус поненс

Значи, $a + \frac{1}{a} \geq 2 \, , \left(\forall a \in \mathbb{R}^{+} \right)$ е правилно изведен заклучок.

Пример 65: Докажи дека секоја точка од симетралата на една отсечка е еднакво оддалечена од крајните точки на таа отсечка.

Доказ: $p : MM_0$ е симетрала на отсечката AB, $q : \overline{AM} = \overline{BM}$



$$\neg q : \overline{AM} \neq \overline{BM}$$

$$\Downarrow$$

$$s_1 : \triangle AM_0M \ncong \triangle BM_0M$$

$$\Downarrow$$

$$s_2 : \overline{AM_0} \neq \overline{BM_0} \vee \sphericalangle MM_0A \neq \sphericalangle MM_0B$$

$$\Downarrow$$

$\neg p : MM_0$ не е симетрала на отсечката AB

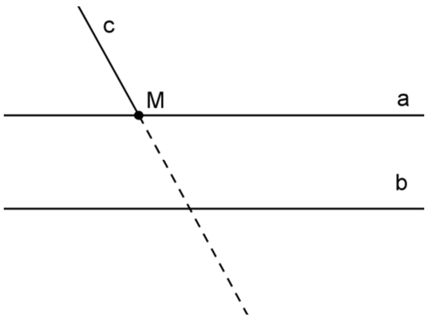
$\dfrac{\neg q \Rightarrow s_1 \,,\, s_1 \Rightarrow s_2 \,,\, s_2 \Rightarrow \neg p}{\neg q \Rightarrow \neg p}$ - Хипотетичен силогизам;

$\dfrac{\neg q \Rightarrow \neg p}{p \Rightarrow q}$ - Правило на контрапозиција; $\dfrac{p \Rightarrow q,\, p}{q}$ - Модус поненс

Значи, $\overline{AM} = \overline{BM}$ е правилно изведен заклучок.

Пример 66: Докажи дека: Ако правите a, b, c припаѓаат на една рамнина при што $a \parallel b$ и правата c ја сече правата a, тогаш c ја сече и правата b.

Доказ:



$$p : a \parallel b \wedge c \nparallel a$$

$$q : c \nparallel b$$

$$p \wedge \neg q : a \parallel b \wedge c \nparallel a \wedge c \parallel b$$

$$\Downarrow$$

$r \wedge \neg r$: (низ точката M минуваат две прави a и c паралелни со $b,$ но според аксиомата: „Низ дадена точка (M) што не лежи на дадена права (b) минува една и само една права паралелна со дадената“).

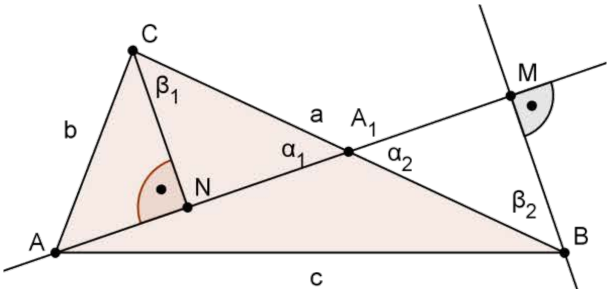
$\dfrac{p\wedge\neg q\Rightarrow r\wedge\neg r}{p\Rightarrow q}$ - Правило на контрадикција

$\dfrac{p\Rightarrow q,\ p}{q}$ - Модус поненс

Значи q е правилно изведен заклучок, а со тоа теоремата е докажана.

Теоремата: „Тежишната линија t_a, е еднакво оддалечена од темињата B и C на $\triangle ABC$“ ја докажуваме со:

а) Синтетички доказ



$p: t_a = AA_1$ е тежишна линија

$$\Downarrow$$

$$r_1: \begin{cases} \overline{CA_1}=\overline{BA_1} & \text{- } A_1 \text{ е средина на } \overline{BC} \\ \alpha_1=\alpha_2 & \text{- накрсни агли} \\ \beta_1 = 90^\circ-\alpha_1 = 90^\circ-\alpha_2=\beta_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$r_2: \triangle CNA_1 \cong \triangle BMA_1$ - признак АСА

$$\Downarrow$$

$$q: \overline{CN}=\overline{BM}$$

$\dfrac{p\Rightarrow r_1,\ r_1\Rightarrow r_2,\ r_2\Rightarrow q}{p\Rightarrow q}$ - Хипотетичен силогизам; $\dfrac{p\Rightarrow q,\ p}{q}$ - Модус поненс

Значи, q е правилно изведен заклучок, а со тоа теоремата е докажана.

б) Аналитички доказ

$$q: \overline{CN}=\overline{BM}$$

$$\Uparrow$$

$r_2: \triangle CNA_1 \cong \triangle BMA_1$ - признак АСА

$$\Uparrow$$

$$r_1: \begin{cases} \overline{CA_1}=\overline{BA_1} & \text{- } A_1 \text{ е средина на } \overline{BC} \\ \alpha_1=\alpha_2 & \text{- накрсни агли} \\ \beta_1 = 90^\circ-\alpha_1 = 90^\circ-\alpha_2=\beta_2 \end{cases}$$

$$\Uparrow$$

$p: t_a = AA_1$ е тежишна линија

$\dfrac{q\Leftarrow s_1,\ s_1\Leftarrow s_2,\ s_2\Leftarrow p}{q\Leftarrow p}$ - Хипотетичен силогизам; $\dfrac{p\Rightarrow q,\ p}{q}$ - Модус поненс

Значи, q е правилно изведен заклучок, а со тоа теоремата е докажана.

в) Индиректен доказ со правило на контрапозиција

$$\neg q : \overline{CN} \neq \overline{BM}$$

$$\Downarrow$$

$$t_1 : \triangle CNA_1 \ncong \triangle BMA_1$$

$$\Downarrow$$

$$t_2 : \overline{CA_1} \neq \overline{BA_1} \vee \alpha_1 \neq \alpha_2 \vee \beta_1 \neq \beta_2$$

$$\Downarrow$$

$\neg p : t_a$ не е тежишна линија

$\dfrac{\neg q \Rightarrow t_1 , t_1 \Rightarrow t_2 , t_2 \Rightarrow \neg p}{\neg q \Rightarrow \neg p}$ - Хипотетичен силогизам;

$\dfrac{\neg q \Rightarrow \neg p}{p \Rightarrow q}$ - Правило на контрапозиција; $\dfrac{p \Rightarrow q, p}{q}$ - Модус поненс

Значи, q е правилно изведен заклучок, а со тоа теоремата е докажана.

Ниво Г

Ученикот треба да користи логичко следство

НИВО: АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ

Со помош на логичките закони дадени во ниво А и само со нив, може да се докажуваат дека се тавтологии следните исказни формули кои претставуваат закони или правила.

Модус поненс

► $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ - (замена за импликација)

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge p \Rightarrow q$ - (дистрибутивен закон за $\wedge$ во однос на $\vee$)

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge p) \Rightarrow q$ - (закон за противречност)

$\Leftrightarrow \bot \vee (q \wedge p) \Rightarrow q$ $(\bot \vee A \Leftrightarrow A)$

$\Leftrightarrow (q \wedge p) \Rightarrow q$ - (замена за импликација)

$\Leftrightarrow \neg(q \wedge p) \vee q$ - (Де Морганов закон)

$\Leftrightarrow (\neg q \vee \neg p) \vee q$ - (комутативен закон)

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee q$ - (асоцијативен закон)

$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee q)$ - (закон за исклучување на третото)

$\Leftrightarrow \neg p \vee \top$ - ($A \vee \top \Leftrightarrow \top$)

$\Leftrightarrow \top$

Модус толенс

► $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$- (замена за импликација)

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$ - (дистрибутивен закон за $\wedge$ во однос на $\vee$)

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$ - (закон за противречност)

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee \bot \Rightarrow \neg p$ - $(\bot \vee A \Leftrightarrow A)$

$\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$- (замена за импликација)

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg p$ - (Де Морганов закон)

$\Leftrightarrow (p \vee \neg q) \vee \neg p$ - (комутативен закон)

$\Leftrightarrow (\neg q \vee p) \vee \neg p$- (асоцијативен закон)

$\Leftrightarrow \neg q \vee (p \vee \neg p)$- (закон за исклучување на третото)

$\Leftrightarrow \neg q \vee \top$ - ($A \vee \top \Leftrightarrow \top$)

$\Leftrightarrow \top$

Хипотетичен силогизам

► $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow r)$ - (замена за импликација)

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)\Rightarrow(\neg p\vee r)$ - (замена за импликација Де Моргановi закони)

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg r)\vee(\neg p\vee r)$ - (асоцијативен закон)

$\Leftrightarrow\big((p\wedge\neg q)\vee\neg p\big)\vee\big((q\wedge\neg r)\vee r\big)$ - (дистрибутивен закон)

$\Leftrightarrow\big((p\vee\neg p)\wedge(\neg q\vee\neg p)\big)\vee\big((q\vee r)\wedge(\neg r\vee r)\big)$ - (закон за исклучување на третото)

$\Leftrightarrow(\top\wedge(\neg q\vee\neg r))\vee((q\wedge r)\wedge\top)$ - $(\top\wedge A\Leftrightarrow A)$

$\Leftrightarrow(\neg q\vee\neg p)\vee(q\vee r)$ - (асоцијативен закон)

$\Leftrightarrow(\neg q\vee q)\vee(\neg p\vee r)$ - (закон за исклучување на третото)

$\Leftrightarrow\ \top\vee(\neg p\vee r)$ - $(\top\vee A\Leftrightarrow\top)$

$\Leftrightarrow\ \top$

Пример 67: Исказната формула $p\Leftrightarrow q\Rightarrow\neg p$ трансформирана во конјункно-дисјункна форма и упростена е на следниов начин:

$p\Leftrightarrow q\Rightarrow\neg p$ - (замена за импликација)

$\Leftrightarrow\ p\Leftrightarrow\neg q\vee\neg p$ - (замена за еквиваленција)

$\Leftrightarrow\big(p\Rightarrow(\neg q\vee\neg p)\big)\wedge\big((\neg q\vee\neg p)\Rightarrow p\big)$ - (замена за импликација)

$\Leftrightarrow\big(\neg p\vee(\neg q\vee\neg p)\big)\wedge\big(\neg(\neg q\vee\neg p)\vee p\big)$ - (Де Морганови закони)

$\Leftrightarrow(\neg q\vee\neg p)\wedge\big((p\wedge q)\vee p\big)$ - (апсорпција на $\vee$ спрема $\wedge$)

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\wedge p$ - (дистрибутивен закон)

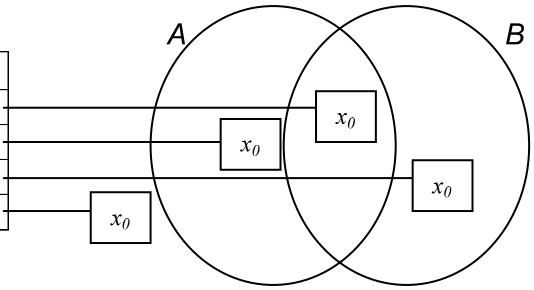
$\Leftrightarrow(\neg p\wedge p)\vee(\neg q\wedge p)$ - (закон за противречност)

$\Leftrightarrow\bot\vee(\neg q\wedge p)$ - $(\bot\vee A\Leftrightarrow A)$

$\Leftrightarrow\neg q\wedge p$

Нека *A* и *B* се произволни, но фиксни (константни) множества и x_0 е фиксен, но произволен елемент и нека $p: x_0\in A$ и $q: x_0\in B$ и

p	q	$p\vee q$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥



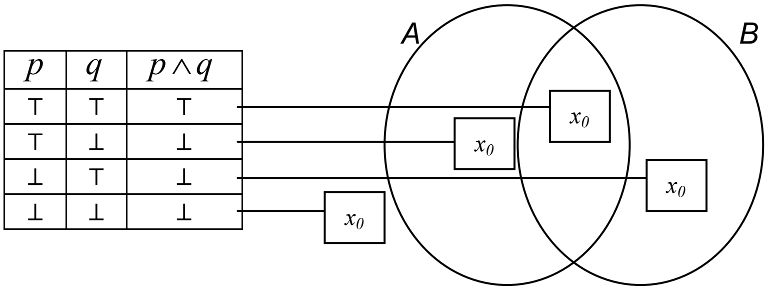
Според графичкиот приказ можеме да запишеме:

$$(\forall x)(A,B \subset U)(x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B)\text{, т.е.}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Заклучок: За операцијата $\vee$ аналогна е операцијата $\cup$, т.е. на $p \vee q$ аналогно е $M_P \cup M_Q$.

Нека *A* и *B* се произволни, но фиксни (константни) множества и x_0 е фиксен, но произволен елемент и нека $p : x_0 \in A$ и $q : x_0 \in B$ и



p	q	$p \wedge q$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊥

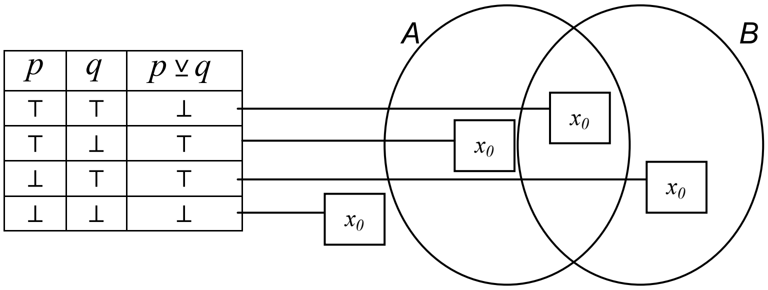
Според графичкиот приказ можеме да запишеме:

$$(\forall x)(A,B \subset U)(x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B)\text{, т.е.}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Заклучок: За операцијата $\wedge$ аналогна е операцијата $\cap$, т.е. на $p \wedge q$ аналогно е $M_P \cap M_Q$

Нека *A* и *B* се произволни, но фиксни (константни) множества и x_0 е фиксен, но произволен елемент и нека $p : x_0 \in A$ и $q : x_0 \in B$ и



p	q	$p \veebar q$
⊤	⊤	⊥
⊤	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥

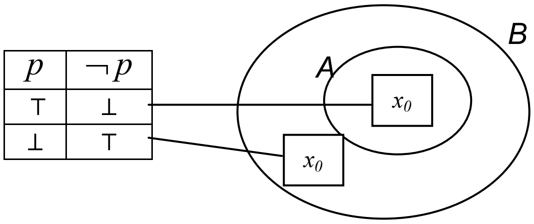
Според графичкиот приказ можеме да запишеме:

$$(\forall x)(A,B \subset U)(x \in A \veebar x \in B \Leftrightarrow x \in A \vartriangle B)\text{, т.е.}$$

$$A \vartriangle B = \{x \mid x \in A \veebar x \in B\}$$

Заклучок: За операцијата $\veebar$ аналогна е операцијата $\vartriangle$, т.е на $p \veebar q$ аналогно е $M_P \vartriangle M_Q$.

Нека *A* е произволно, но фиксни (константно) множество, а U е универзално множество и нека $p: x_0 \in A$ и $\neg p: x_0 \notin A$.



p	$\neg p$
⊤	⊥
⊥	⊤

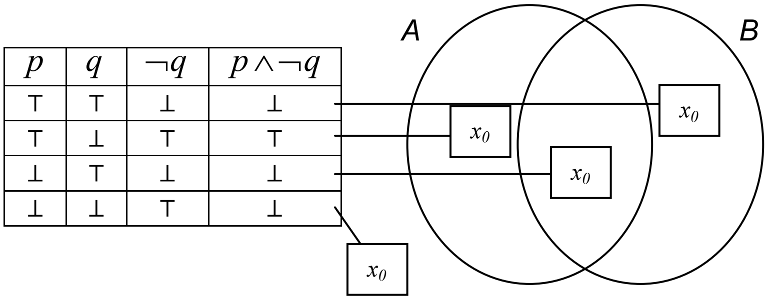
Според графичкиот приказ можеме да запишеме:

$$(\forall x)\big(A \subset U\big)(x \in A' \Leftrightarrow x \in U \setminus A \text{ т.е. } x \notin A$$

$$\text{т.е. } A' = \{x \mid x \in U \setminus A = A'\}$$

Заклучок: За операцијата $\neg$ аналогна е операцијата ', т.е на $\neg p$ аналогно е $M_P' = D \setminus M_P$.

Нека *A* и *B* се произволни, но фиксни (константни) множества и x_0 е фиксен, но произволен елемент и нека $p: x_0 \in A$ и $q: x_0 \in B$ и



p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
⊤	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊥	⊤	⊥

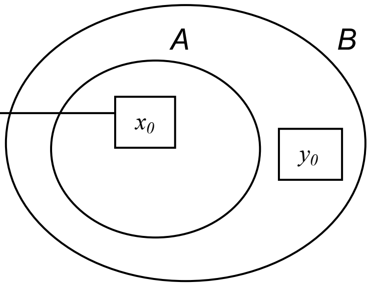
Според графичкиот приказ можеме да запишеме:

$$(\forall x)\big(A, B \subset U\big)\big(x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \setminus B\big)\text{, т.е.}$$

Заклучок: За операцијата $\wedge$ и $\neg$ аналогна е операцијата $\setminus$, т.е на $p \wedge \neg q$ аналогно е $M_P \setminus M_Q$.

Нека *A* и *B* $A \subseteq B$ се произволни, но фиксни (константни) множества и x_0 е фиксен, но произволен елемент и нека $p: x_0 \in A$ и $q: x_0 \in B$ и

p	q	$p \Rightarrow q$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	/
⊥	⊤	/
⊥	⊥	/



Според графичкиот приказ можеме да запишеме:

$$(\forall x)(A \subseteq B \subset U)(x \in A \Rightarrow x \in B)\text{, т.е.}$$

Заклучок: За операцијата $\Rightarrow$ аналогно е $\subseteq$ или $\subset$ т.е на $p \Rightarrow q$ аналогно е $M_P \subseteq M_Q$ или $M_P \subset M_Q$.

Пример 68: Нека $p: 3 | a \wedge 3 | b$, $q: 3 | a+b$ каде што $a, b \in D$ и нека $p \Rightarrow q$, тогаш:

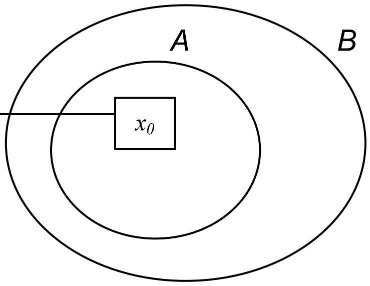
$M_P = \{(3,3),(3,6),(3,9),...,(6,3),(6,6),(6,9)\}$,

$M_Q = M_P \cup \{(2,1),(1,2),(5,1),(4,2),(1,5),(2,4),(8,1),(1,8),(2,7),(7,2),(4,5),(5,4),...\}$.

Значи, $M_P \subset M_Q$.

Нека *A* и *B* $A = B$ се произволни, но фиксни (константни) множества и x_0 е фиксен, но произволен елемент и нека $p: x_0 \in A$ и $q: x_0 \in B$ и

p	q	$p \Leftrightarrow q$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	/
⊥	⊤	/
⊥	⊥	/



Според графичкиот приказ можеме да запишеме:

$$(\forall x)(A = B \subset U)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)\text{, т.е.}$$

Заклучок: За операцијата $\Leftrightarrow$ аналогно е $=$, т.е на $p \Leftrightarrow q$ аналогно е $M_P = M_Q$.

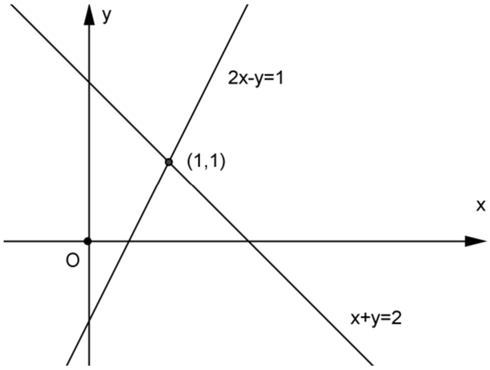
Пример 69: Нека $p:2|x\wedge 3|x$, $q:6|x$ каде што $a,b\in D$ и $p\Leftrightarrow q$, тогаш:
$M_P=\{6,12,18,...\}=\{k\,|\,k\in\mathbb{N}\}$, $M_Q=\{6,12,18,...\}=\{k\,|\,k\in\mathbb{N}\}$. Значи, $M_P\subset M_Q$.

Претходните заклучоци ги сместуваме во следната табела:

Логички операции	Операции или релации со множества
$p\vee q$	$M_P\cup M_Q$
$p\wedge q$	$M_P\cap M_Q$
$p\underline{\vee}q$	$M_P\vartriangle M_Q$
$\neg p$	$M_P{}'=D\setminus M_P$
$p\wedge\neg q$	$M_P\setminus M_Q$
$p\Rightarrow q$	$M_P\subseteq M_Q$
$p\Leftrightarrow q$	$M_P=M_Q$

Пример 70: Нека $P(x,y):x+y=2$, $Q(x,y):2x-y=1$ се исказни функции со две променливи и нека $D=\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Множествата решенија на исказните функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $P(x,y)\vee Q(x,y)$, $P(x,y)\wedge Q(x,y)$, $P(x,y)\Rightarrow Q(x,y)$, $P(x,y)\ \underline{\vee}\ Q(x,y)$, $P(x,y)\Leftrightarrow Q(x,y)$ $P(x,y)\Rightarrow Q(x,y)\Rightarrow\neg P(x,y)$ редоследно изнесуваат:



$M_{P(x,y)}=\{(x,y)\,|$точки од правата $x+y=2\}$, $M_{Q(x,y)}=\{(x,y)\,|$точки од правата $2x-y=1\}$,

$M_{P(x,y)\vee Q(x,y)}=\{(x,y)\,|$ точките од правата $x+y=2$ унија со точките од правата $2x-y=1\}$,

$M_{P(x,y)\wedge Q(x,y)}=\{(x,y)\,|$ пресечната точка од правите $x+y=2$ и $2x-y=1\}$,

$M_{P(x,y)\Rightarrow Q(x,y)}=M_{\neg P(x,y)\vee Q(x,y)}=M_{\neg P(x,y)}\cup M_{Q(x,y)}=$
$=\{(x,y)\,|$целата рамнина без правата $x+y=2$, но со пресечната точка $(1,1)\}$,

$M_{P(x,y)\underline{\vee}Q(x,y)}=M_{P(x,y)}\vartriangle M_{Q(x,y)}=\{(x,y)\,|$точките од двете прави без пресечната точка $(1,1)\}$,

$M_{P(x,y)\Leftrightarrow Q(x,y)} = \left(M_{P(x,y)} \vartriangle M_{Q(x,y)}\right)' =$

$= \{(x,y)\,|$целата рамнина без правите $x+y=2$ и $2x-y=1$ со пресечната точка $(1,1)\}$,

$$P(x,y) \Rightarrow Q(x,y) \Rightarrow \neg P(x,y)$$

$$\Updownarrow$$

$$\neg P(x,y) \vee Q(x,y) \Rightarrow \neg P(x,y)$$

$$\Updownarrow$$

$$\neg\left(\neg P(x,y) \vee Q(x,y)\right) \vee \neg P(x,y)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(P(x,y) \wedge \neg Q(x,y)\right) \vee \neg P(x,y)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(P(x,y) \vee \neg P(x,y)\right) \wedge \left(\neg Q(x,y) \vee \neg P(x,y)\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\top \wedge \left(\neg Q(x,y) \vee \neg\, P(x,y)\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\neg\left(P(x,y) \wedge Q(x,y)\right)$$

$M_{P(x,y)\Rightarrow Q(x,y)\Rightarrow \neg P(x,y)} = \left(M_{P(x,y)} \cap M_{Q(x,y)}\right)' = \{(x,y)\,|$ сите точки од рамнината,освен $(1,1)\}$.

➢ Различни варијанти на зборовна формулација коишто имаат иста логичка смисла на една иста теорема $p \Rightarrow q$, т.е. $(\forall x)\left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right)$ се:

1) Ако p, тогаш q

2) Од p следува q

3) p е доволно за q

4) q е потребен услов за p
   q е неопходно за p
   q е неопходно следство од p

5) Секогаш кога p, тогаш q
   q тогаш кога p

6) Ако не е q, тогаш не е p

7) Без q нема p

8) p само тогаш кога q

9) Секој p е q

10) $M_P \subseteq M_Q$, т.е множеството објекти M_P за кое е точна претпоставката P се содржи во множеството објекти M_Q за кое е точно тврдењето q.

Пример 71: Теоремата „Дијагоналите на ромбот се заемно нормални“ ја искажуваме во десет варијанти:

1) Ако четириаголникот е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални.

2) Од тоа што четириаголникот е ромб, следува дека неговите дијагонали се заемно нормални.

3) На четириаголникот му е доволно да биде ромб, за да има заемно нормални дијагонали.

4) Заемна нормалност на дијагоналите е потребен услов за четириаголникот да е ромб.

5) Секогаш кога четириаголникот е ромб дијагоналите му се заемно нормални.

6) Ако дијагоналите на ромбот не се заемни нормални, тогаш тој не е ромб.

7) Без заемна нормалност на дијагоналите на четириаголникот, нема ромб.

8) Четириаголникот е ромб секогаш кога дијагоналите му се заемно нормални.

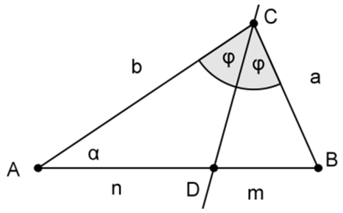
9) Секој четиририаголник што е ромб има заемно нормални дијагонали.

10) Множеството ромбови се содржи во множеството четириаголници со заемно нормални дијагонали.

Многу важен дел при докажувањето на теоремите е „трагањето по доказ“ , т.е. анализата на заклучокот.

Пример 72: Докажи дека: „Симетралата на кој било агол на триаголникот ја дели спротивната страна на делови пропорционални со прилегнатите страни“.

Доказ 1:

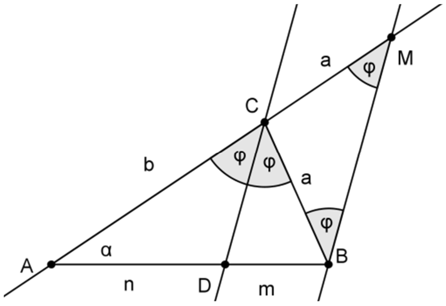


Тврдиме: $q: \quad m:n=a:b$

Бидејќи $m+n$ се јавува како страна на триаголник, ја проширувааме пропорцијата и добиваме: $\frac{m+n}{n}=\frac{a+b}{b}$.

Значи, $\triangle ADC$ треба да е сличен со некој триаголник со страна $a+b$.

Со продолжување на страната b за a преку темето C, добиваме:



$\triangle BMC$ е рамнокрак, што значи дека $\triangle ADC \sim \triangle ABM$

Сега лесно се демонстрира доказот:

p: $\triangle ABC$ е триаголник со симетрала CD на аголот γ и отсечки на страната c со должини m и n.

$$\Downarrow$$

r_1 : $\triangle ADC \sim \triangle ABM$ - имаат еднакви агли (види скица)

$$\Downarrow$$

$$r_2 : \frac{n}{b} = \frac{m+n}{a+b}$$

$$\Downarrow$$

$$r_3 : \frac{m+n}{n} = \frac{a+b}{b}$$

$$\Downarrow$$

$$r_4 : \frac{m}{n} + 1 = \frac{a}{b} + 1$$

$$\Downarrow$$

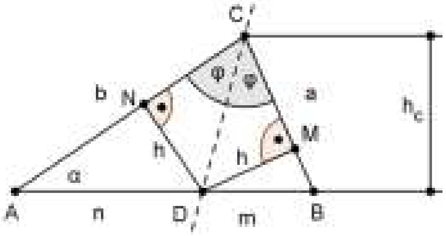
$$q: \ m : n = a : b$$

$\dfrac{p \Rightarrow r_1\,, r_1 \Rightarrow r_2\,, r_2 \Rightarrow r_3, r_3 \Rightarrow r_4, r_4 \Rightarrow q}{p \Rightarrow q}$ - Хипотетичен силогизам;

$\dfrac{p \Rightarrow q,\ p}{q}$ - Модус поненс

Значи, $m : n = a : b$ е правилно изведен заклучок, а со тоа теоремата е докажана.

Доказ 2:



Тврдиме: q: $m : n = a : b$

Нека со P_1 и P_2 ги означиме плоштините на триаголниците $\triangle CDN$ и $\triangle CDM$ соодветно.

Односот $\frac{m}{n}$ може да се јави при односот на плоштините P_1 и P_2, т.е. $\frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{mh_c}{2}}{\frac{nh_c}{2}}=\frac{m}{n}$.

Односот $\frac{a}{b}$ може да се јави при односот на плоштините P_1 и P_2 (точката D е точка од симетралата на аголот γ и е еднакво оддалечена од краците, т.е. $\frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{ah}{2}}{\frac{bh}{2}}=\frac{a}{b}$.

Значи:
p: $\triangle ABC$ е триаголник со симетрала CD на аголот γ и отсечки на страната c со должини m и n.

$$\Downarrow$$

$$r_1: h_c \text{ е висина на } \triangle DBC \text{ и } \triangle ADC \text{ и } \frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{mh_c}{2}}{\frac{nh_c}{2}}=\frac{m}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$h_c \text{ е висина на } \triangle DBC \text{ и } \triangle ADC \text{ и } \frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{ah}{2}}{\frac{bh}{2}}=\frac{a}{b}$$

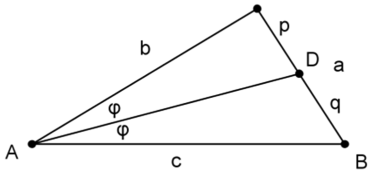
$$\Downarrow$$

$$q:\ m:n=a:b$$

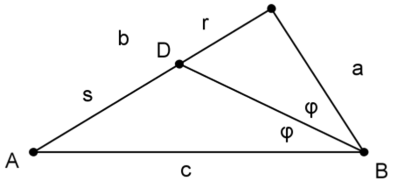
$\frac{p\Rightarrow r_1,\ r_1\Rightarrow q}{p\Rightarrow q}$ - Хипотетичен силогизам; $\frac{p\Rightarrow q,\ p}{q}$ - Модус поненс

Значи, $m:n=a:b$ е правилно изведен заклучок, а со тоа теоремата е докажана.

Бидејќи симетралата на аголот во темето C е произволно избрана, истото важи и за другите симетрали:



$p:q=b:c$



$r:s=a:c$

Пример 73: Докажи дека $\sqrt{2}$ е ирационален број.

Нека $p:\sqrt{2}$ е реален број и $q:\sqrt{2}$ е ирационален број ($\sqrt{2}$ не е рационален број)

$p\wedge\neg q:\sqrt{2}$ е реален број и $\sqrt{2}$ е рационален број

$$\Downarrow$$

$t_1:\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$ (НЗД$\left(a,b\right)=1$, т.е. $\dfrac{a}{b}$ е нескратлива дропка)

$$\Downarrow$$

$$t_2:2=\frac{a^2}{b^2}$$

$$\Downarrow$$

$t_3:\ a^2=2b^2\wedge\ a^2$ е парен, т.е. $a=2k$

$$\Downarrow$$

$t_4:\left(2k\right)^2=2b^2$, т.е. $b^2=2k^2$

$$\Downarrow$$

$t_5:\ b^2$ е парен, т.е $b=2n$

$$\Downarrow$$

$t_6:\sqrt{2}\neq\dfrac{a}{b}$ ($\dfrac{a}{b}$ е нескратлива дропка)

$$\Downarrow$$

$q:\ \sqrt{2}$ не е рационален број ($\sqrt{2}$ е ирационален број)

$$\frac{p\Rightarrow t_1\ ,t_1\Rightarrow t_2\ ,t_2\Rightarrow t_3,t_3\Rightarrow t_4,t_4\Rightarrow t_5\ ,t_5\Rightarrow t_6,t_6\Rightarrow q}{p\wedge\neg q\Rightarrow q}$$ - Хипотетичен силогизам;

$$\frac{p\wedge\neg q\Rightarrow p}{p\Rightarrow q}$$ - Правило на контрадикција; $$\frac{p\Rightarrow q,\ p}{q}$$ - Модус поненс

Значи, $\sqrt{2}$ е ирационален број е правилно изведен заклучок, а со тоа теоремата е докажана.

ЗАДАЧИ ОД НИВО **В** И НИВО **Г**

1.Со вистинитосна таблица покажи дека важи дистрибутивниот закон на $\vee$ во однос на $\wedge$ т.е. $p\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ - лева дистрибутивност на $\vee$ во однос на $\wedge$

$(p\wedge q)\vee r\Leftrightarrow(p\vee r)\wedge(q\vee r)$ - десна дистрибутивност на $\vee$ во однос на $\wedge$

2.Со вистинитосна таблица покажи дека важи дистрибутивниот закон на $\wedge$ во однос на $\vee$ т.е. $p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ - лева дистрибутивност на $\wedge$ во однос на $\vee$

$(p\vee q)\wedge r\Leftrightarrow(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$ - десна дистрибутивност на $\wedge$ во однос на $\vee$

3. Правилото на контрапозиција $p\Rightarrow q\Leftrightarrow\neg q\Rightarrow\neg p$ докажи го со:

а) вистинитосна табела.
б) доведување до противречност.
в) трансформација на исказната формула во очигледна тавтологија.

4. Формулата $p\Rightarrow q\Rightarrow\neg q\Rightarrow\neg p$ трансформирај ја во дисјункна форма.

5. Со трансформација, докажи дека формулата $(p\Rightarrow q)\wedge\neg q\Rightarrow(p\Leftrightarrow q)$ е тавтологија.

6. Со трансформација, докажи дека формулата $(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)\Leftrightarrow(p\Rightarrow q\wedge r)$ е тавтологија.

7. Со трансформација, докажи дека формулата $(\neg p\Rightarrow q)\wedge(\neg p\Rightarrow\neg q)\Leftrightarrow p$ е тавтологија.

8. Без употреба на вистинитосни таблици докажи ги еквиваленциите:

$p\wedge(p\vee q)\Leftrightarrow p$ - апсорпција на $\wedge$ во однос на $\vee$
$p\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow p$ - апсорпција на $\vee$ во однос на $\wedge$

9. Љупчо, Јанко, Валентин и Горан на писмена работа по математика ги добиле оценките 2, 3, 4 и 5. Тројца од нив изјавиле:

Горан: „Љупчо доби оценка 5, Јанко доби оценка 2.“
Јанко: „Љупчо доби оценка 3, Валентин доби оценка 5.“
Валентин: „Горан доби оценка 5, Јанко доби оценка 4.“

Одреди која оценка ја добил секој од учениците, ако е познато дека секој излажал еднаш и еднаш ја кажал вистината.

10. Од три моливи (А, В и С) еден е црвен, еден е бел и еден е син. Одговори која боја ја имаат овие моливи, ако само едно од трите тврдења е точно.
- Моливот А е црвен.
- Моливот В не е црвен.
- Моливот С не е син.

11. Докажи го равенството $\left(A\triangle B\right)\setminus C=\left(A\triangle C\right)\setminus\left(B\triangle C\right)$.

12. Докажи го равенството $\left(A\cup B\right)\cap\left(B\cup C\right)\cap\left(C\cup A\right)=\left(A\cap B\right)\cup\left(B\cap C\right)\cup\left(C\cap A\right)$.

13. Ако за страните на триаголникот важи $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$, тогаш триаголникот е рамностран. Докажи.

14. Ако $x,y\in\mathbb{R}$, тогаш $|x+y|\le|x|+|y|$. Докажи.

15. Симетралите на страните на триаголникот се сечат во една точка. Докажи.

16. Симетралите на внатрешните агли на триаголникот се сечат во една точка. Докажи.

17. Кај правоаголниот триаголник ABC, важи $t_a^{\ 2}+t_b^{\ 2}=5t_c^{\ 2}$ само ако t_a, t_b и t_c се должини на тежишните линии во тој триаголник.

18. Ако h_1, h_2 и h_3 се висини во $\triangle ABC$ и $\left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)^2+\left(\dfrac{h_1}{h_3}\right)^2=1$, тогаш тој триаголник е правоаголен. Докажи.

19. Отсечките AN и BM се тежишни линии на $\triangle ABC$, т.е. $\overline{AM}=\overline{MC}$ и $\overline{BN}=\overline{NC}$, а точката T е нивниот пресек. Да се докаже дека $\overline{AT}=\dfrac{2}{3}\cdot\overline{AN}.$

20. Да се докаже дека тежишните линии на триаголникот се сечат во една точка (наречена тежиште на триаголникот).

21. Да се докаже дека правите што се определени со висините на триаголникот се сечат во една иста точка, наречена ортоцентар.

ПИСМЕНА РАБОТА 1

Задачи со заокружување:

1. А **(5)(   )** Која од логичките операции $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ не е комутативна?

А) $\wedge$ Б) $\vee$ В) $\Rightarrow$ Г) $\Leftrightarrow$ Д) Друг одговор

2. Б **(5)(   )** Ако F_1 и F_1 се логички еквивалентни формули, тогаш формулата $F_1 \Leftrightarrow F_2$ е:

А) противречна Б) контрадикција В) неутрална Г) контрапозиција Д) друг одговор

3. В **(5)(   )** Исказот $p \Rightarrow \perp \Leftrightarrow \neg p$ е еквивалентен со:

А) $\perp$ Б) $\neg p$ В) p Г) $\top$ Д) друг одговор

4. Г **(5)(   )** Претпоставката на теоремата со тврдење $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \quad a,b \in \mathbb{R}^+$ е:

А) $a^2+b^2>2 \quad a,b \in \mathbb{R}^+$ Б) $(a-b)^2>0 \quad a,b \in \mathbb{R}^+$ В) $a^2+b^2>\sqrt{ab} \quad a,b \in \mathbb{R}^+$
Г) $a^2-ab+b^2>2 \quad a,b \in \mathbb{R}^+$ Д) друг одговор

Задачи со дополнување:

5. А **(5)(   )** Равенството $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ е еднакво со ________________________.

6. Б **(5)(   )** За да биде следниов исказ $p \Rightarrow q$ теорема, исказот q треба да е _________________ на исказот p.

7. В **(5)(   )** Исказот „Не е вистина дека Скопје е главен град на Р. Македонија“ по упростувањето со формулата __________________, се добива ______________________.

8. Г **(5)(   )** Ако $M_{P(x)}$ и $M_{Q(x)}$ се множества решенија на исказните функции $P(x)$ и $Q(x)$, тогаш множеството решенија на исказната функција $\neg P(x) \Rightarrow Q(x)$ е ______________.

Задачи со целосна постапка:

9. А **(15)(   )** Нека $A=\{x \mid 2 \mid x \wedge 2 \leq x<10\}$, $B=\{x \mid 3 \mid x \wedge 2 \leq x<10\}$, тогаш одреди: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A \triangle B$.

10. Б **(15)(   )** Изврши негација на исказот „$2+3 \neq 6$ или 3 е делител на 6“.

11. В **(15)(   )** Докажи ја импликацијата $2 \mid x \wedge 3 \mid x \wedge 5 \mid x \Rightarrow 30 \mid x.$

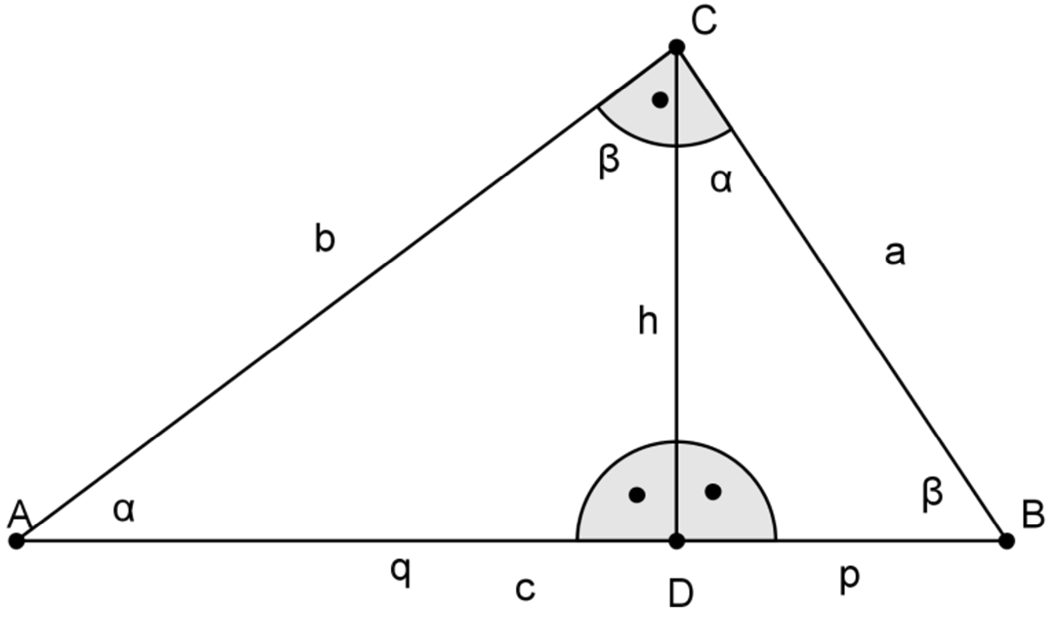
12. Г **(15)(   )** Со помош на логички закони, докажи ја Дедекиндовата тавтологија

$$((p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p))$$

Бодови (Оценка)	0-26 (1)	27-42 (2)	43-60 (3)	61-76 (4)	77-100 (5)

ТЕМА 2.

Тригонометриски функции од остар агол во правоаголен триаголник

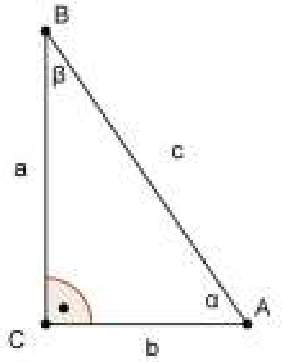


Ниво А

Ученикот треба да знае дека...

НИВО: ПОМНЕЊЕ

Нека е даден правоаголен триаголник ABC со теме на правиот агол во точката C, со катети a,b и хипотенуза c и остри агли α и β (спроти катетата a - аголот α, а спроти катетата b - аголот β).



Меѓу страните на правоаголниот триаголник можни се следните односи:
$\frac{a}{c},\frac{b}{c}$ и $\frac{a}{b}$ и реципрочните односи $\frac{c}{a},\frac{c}{b}$ и $\frac{b}{a}$

Дефинираме:

- тригонометриски функции:

$$\sin\alpha \text{ (синус од острииот агол } \alpha) = \frac{a}{c}\ \frac{\text{(спротивна катета)}}{\text{(хипотенуза)}}$$

$$\cos\alpha \text{(косинус од острииот агол } \alpha) = \frac{b}{c}\ \frac{\text{(прилегната катета)}}{\text{(хипотенуза)}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \text{ (тангенс од острииот агол } \alpha) = \frac{a}{b}\ \frac{\text{(спротивна катета)}}{\text{(прилегната катета)}}$$

- реципрочни тригонометриски функции:

$$cosec\,\alpha \text{ (косеканс од острииот агол } \alpha) = \frac{c}{a}\ \frac{\text{(хипотенуза)}}{\text{(спротивна катета)}}$$

$$\sec\alpha \text{(секанс од острииот агол } \alpha) = \frac{c}{b}\ \frac{\text{(хипотенуза)}}{\text{(прилегната катета)}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \text{ (котангенс од острииот агол } \alpha) = \frac{b}{a}\ \frac{\text{(прилегната катета)}}{\text{(спротивна катета)}}$$

Забелешка: Ќе ги изучуваме трите тригонометриски функции и реципрочната тригонометриска функција $\operatorname{ctg}\alpha$.

Пример 1: Ако катетите во правоаголен триаголник се $a = 4$, $b = 3$ и хипотенузата $c = 5$ тригонометриските функции од аголот α се:

$$\sin\alpha = \frac{4}{5},\ \cos\alpha = 3,\ \ tg\alpha = \frac{4}{3},\ \ ctg\alpha = \frac{3}{4}$$

Аглите се мерат во степени и радијани.

1° (степен) е деведесетти дел од правиот агол. 1 rad (радијан) е агол чии краци од произволна кружница со центар во неговото теме отсекуваат лак еднаков на радиусот. Помали мерки од степенот се: „ ' “ (минута) и „ " “ (секунда) и важи: $1^\circ = 60'$ и $1' = 60''$

Аголот, од степени во радијани се изразува кога ќе се помножи со $\frac{\pi}{180}$

Пример 2: $30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ rad; $45^\circ = 45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$ rad; $60^\circ = 60 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ rad

Аголот, од радијани во степени се изразува кога ќе се помножи со $\frac{180}{\pi}$

Пример 3: $\frac{\pi}{6}$ rad $= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 30^\circ$; $\frac{\pi}{4}$ rad $= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 45^\circ$; $\frac{\pi}{3}$ rad $= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 60^\circ$

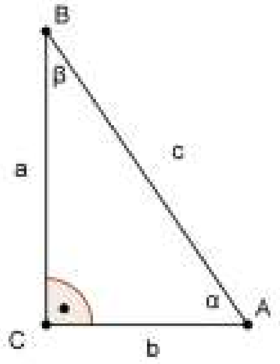
Тригонометриските функции од остар агол ги делиме на:

тригонометриски функции	**тригонометриски кофункции**
sin (синус)	cos (косинус)
cos (косинус)	sin (синус)
tg (тангенс)	ctg (котангенс)
ctg (котангенс)	tg (тангенс)
sec (секанс)	cosec (косеканс)
cosec (косеканс)	sec (секанс)

Аглите чиј збир е 90° се викаат комплементни агли, што значи дека острите агли во правоаголниот триаголник се комплементни.

Пример 4: Ако $\alpha = 20^\circ$, тогаш комплементниот агол $\beta = 70^\circ$

Нека ΔABC е правоаголен триаголник со катети a и b, хипотенуза c и остри агли α и β.



тогаш $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\sin\beta = \frac{b}{c}$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b} \qquad tg\beta = \frac{b}{a}$$

$$ctg\alpha = \frac{b}{a} \qquad ctg\beta = \frac{a}{b}.$$

Точно е тврдењето: Тригонометриската функција од остар агол е еднаква на кофункцијата од нему комплементниот агол, т.е.

$$\sin\alpha = \cos\left(90^\circ - \alpha\right),\ \ \cos\alpha = \sin\left(90^\circ - \alpha\right),\ \ tg\alpha = ctg\left(90^\circ - \alpha\right),\ \ ctg\alpha = tg\left(90^\circ - \alpha\right).$$

Пример 5: $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ$, $\cos 7^\circ = \sin 83^\circ$, $tg15^\circ = ctg75^\circ$, $ctg58^\circ = tg32^\circ$.

Вредностите на тригонометриските функции од аглите $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ и ќе ги прикажеме со следната табела:

Агол функција	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Пример 6: $(tg45^\circ + ctg45^\circ)^2 = (1+1)^2 = 4$

Пример 7: $\dfrac{tg45^\circ + ctg45^\circ}{\sin 30^\circ + \cos 60^\circ} = \dfrac{1+1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2$

За тригонометриските функции од ист остар агол важат следните врски:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	
$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$	$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$
$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$
$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$	
$tg\alpha = \dfrac{1}{ctg\alpha}$	$ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$
$\sin\alpha = \dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$
$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$	$\cos\alpha = \dfrac{ctg\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$

Пример 8: $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1$

$$tg30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg30^\circ = \frac{1}{tg30^\circ} = \sqrt{3}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{tg30^\circ}{\sqrt{1+tg^2 30^\circ}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{1+\frac{3}{9}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{12}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{3}{12}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Пример 9: Ако $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, вредностите на другите тригонометриски функции се:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}\ ,\quad tg\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}\ ,\quad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{4}{3}$$

За тригонометриските функции од остар агол, т.е. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ важат следните тврдења:

Ако $\alpha_2 > \alpha_1$, тогаш $\sin\alpha_2 > \sin\alpha_1$;
ако $\alpha_2 > \alpha_1$, тогаш $\cos\alpha_2 < \cos\alpha_1$;
ако $\alpha_2 > \alpha_1$, тогаш $tg\alpha_2 > tg\alpha_1$;
ако $\alpha_2 > \alpha_1$, тогаш $ctg\alpha_2 < ctg\alpha_1$.

Пример 10: $\sin 42^\circ < \sin 45^\circ$ бидејќи $42^\circ < 45^\circ$

Пример 11: $tg14^\circ - tg20^\circ < 0^\circ$, бидејќи $14^\circ < 20^\circ$

Пример 12: $\frac{tg45^\circ - tg50^\circ}{\cos 45^\circ - \cos 50^\circ} < 0$, бидејќи $tg45^\circ - tg50^\circ < 0$ и $\cos 45^\circ - \cos 50^\circ > 0$

Да се реши правоаголен триаголник, значи да се одредат аглите и страните. При решавањето на правоаголниот триаголник стандардно означен, користиме:

- комплементарност на аглите α и β, т.е. $\alpha + \beta = 90^\circ$.
- дефиниција на тригонометриските функции од остар агол.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ tg\alpha = \frac{a}{b},\ ctg\alpha = \frac{b}{a},\ \sin\beta = \frac{b}{c},\ \cos\beta = \frac{a}{c},\ tg\beta = \frac{b}{a},\ ctg\beta = \frac{a}{b}.$$

- Питагорова теорема $a^2 + b^2 = c^2$.
- калкулатор.

Пример 13: При дадени катети $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, решавањето на триаголникот се состои од наоѓање на хипотенузата $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36+64} = 10$ cm, $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{6}{10} = 0{,}6$.

На калкулатор наоѓаме $\alpha \approx 36^\circ 52'$,тогаш $\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 36^\circ 52' \approx 53^\circ 8'$.

Пример 14: При дадена хипотенуза $c = 10$ cm и $\alpha = 40^\circ$, решавањето на триаголникот се состои од наоѓање на аголот $\beta = 90^\circ - \alpha = 50^\circ$, а со помош на калкулатор наоѓаме $a = c\cdot\sin\alpha = 10\cdot\sin 40^\circ \approx 10\cdot 0{,}64 = 6{,}4$ cm и

$$b = c\cdot\cos\alpha = 10\cdot\cos 40^\circ \approx 10\cdot 0{,}77 = 7{,}7 \text{ cm}$$

Решавањето на правоаголен триаголник има огромна примена во планиметрија, стереометрија и практични проблеми.

Ниво Б

Ученикот покажува дека разбира...

НИВО:РАЗБИРАЊЕ

Пример 15: За триаголникот $\triangle PQR$ со прав агол во Q и катети x, y и хипотенуза z со агол φ спроти y ,тригонометриските функции се:

$$\sin\varphi=\frac{y}{z},\quad \cos\varphi=\frac{x}{z},\quad tg\varphi=\frac{y}{x},\quad ctg\varphi=\frac{x}{y}.$$

Пример 16: Аголот $\alpha=23^\circ14'18''$

-изразен во степени е: $\alpha=23^\circ+\left(\frac{14}{60}\right)^\circ+\left(\frac{18}{3600}\right)^\circ=23{,}235^\circ$;

-изразен во минути е: $\alpha=(23\cdot60)'+14'+\left(\frac{18}{60}\right)'=1394{,}3'$;

-изразен во секунди е: $\alpha=(23\cdot3600)''+(14\cdot60)''+18''=83658''$;

-изразен во радијани е: $\alpha=23{,}235\cdot\frac{\pi}{180}$ rad $=0{,}129\pi$ rad

Пример 17: Аголот $\alpha=0{,}1291018\pi$ rad, изразен во степени е:

$$\alpha=0{,}1291018\pi\cdot\frac{180}{\pi}=23{,}23833^\circ$$

$$\alpha=23^\circ+(0{,}23833\cdot60)'=23^\circ14{,}299'=23^\circ14'+(0{,}299\cdot60)''=23^\circ14'18''.$$

Ако $\sin\alpha=\sin\beta$ или $\cos\alpha=\cos\beta$ или $tg\alpha=tg\beta$ или $ctg\alpha=ctg\beta$ и $\alpha,\beta<90^\circ$, тогаш важи $\alpha=\beta$.

Пример 18: Ако $\sin(\alpha-10^\circ)=\sin(10^\circ-\alpha)$ и $\alpha<90^\circ$ тогаш од $\alpha-10^\circ=10^\circ-\alpha$ добиваме $\alpha=10^\circ$.

Пример 19: Ако $tg(2\alpha-70^\circ)=tg(20^\circ-\alpha)$ и $\alpha<90^\circ$ тогаш од $2\alpha-70^\circ=20^\circ-\alpha$ добиваме $\alpha=30^\circ$.

Пример 20: Одреди го непознатиот агол, ако важи условот $\sin(\alpha-10^\circ)=\cos(\alpha+20^\circ)$.

Согледај го решението:

I начин

Ставајќи $\cos(\alpha+20^\circ)=\sin(90^\circ-\alpha-20^\circ)$,

добиваме: $\sin(\alpha-10^\circ)=\sin(90^\circ-\alpha-20^\circ)$

т.е. $2\alpha=80^\circ$, од каде $\alpha=40^\circ$

II начин

Користиме: $\alpha-10^\circ+\alpha+20^\circ=90^\circ$

$2\alpha=80^\circ$

$\alpha=40^\circ$

Пример 21: Упрости го изразот $\dfrac{11\sin 20^\circ-3\cos 70^\circ}{5\sin 20^\circ+3\cos 70^\circ}$.

Согледај го решението:

I начин

Заменуваме $\cos 70^\circ=\sin 20^\circ$,

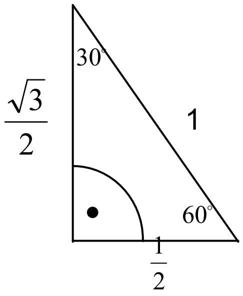
добиваме $\dfrac{11\sin 20^\circ-3\sin 20^\circ}{5\sin 20^\circ+3\sin 20^\circ}=\dfrac{8\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ}=1$

II начин

Заменуваме $\sin 20^\circ=\cos 70^\circ$,

добиваме $\dfrac{11\cos 70^\circ-3\cos 70^\circ}{5\cos 70^\circ+3\cos 70^\circ}=\dfrac{8\cos 70^\circ}{8\cos 70^\circ}=1$

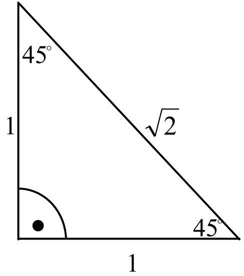
Нека разгледуваме рамностран триаголник со страна 1 и остри агли по 60° и висина $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Половината од рамностраниот триаголник е триаголникот како на скицата.



Со примена на тригонометриски функции и тригонометриски функции од комплементни агли, добиваме:

$$\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2};\quad \cos 30^\circ=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad tg 30^\circ=ctg 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3};\quad ctg 30^\circ=tg 60^\circ=\sqrt{3}.$$

Нека разгледуваме квадрат со страна 1 и дијагонала $\sqrt{2}$. Половината од квадратот е рамнокрак правоаголен триаголник, како на скицата.



Со примена на дефиниција тригонометриски функции и тригонометриски функции од комплементни агли, добиваме:

$$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad tg 45^\circ=ctg 45^\circ=1$$

Пример 22: Вредноста на изразот $\frac{\left(\sin 60^\circ + \cos 30^\circ\right)^2}{tg45^\circ + ctg45^\circ} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{1+1} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2} = \frac{3}{2}$

Пример 23: Вредноста на изразот $\frac{\left(tg60^\circ + ctg30^\circ\right)^2}{\sin 30^\circ + \cos 60^\circ} = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 12$

Основните тригонометриски врски

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

и изведените тригонометриски врски

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}};\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}};\ \cos\alpha = \frac{ctg}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}};\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

имаат примена за:

1) Одредување на останатите тригонометриски функции, ако е позната една од нив.

Пример 24: Ако $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, да се одредат $\sin\alpha, tg\alpha, ctg\alpha.$

I начин: Со дефиницијата на тригонометриски функции

Од $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, добиваме дека прилегнатата катета е $12k$, хипотенузата $13k$, а според Питагоровата теорема наоѓаме дека спротивната катета е $5k$.

Значи, $\sin\alpha = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$; $tg\alpha = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$; $ctg\alpha = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$.

II начин: со основните врски

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \frac{5}{13},\ tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{12}, ctg\alpha = \frac{12}{5}.$$

Пример 25: Ако $tg\alpha = \frac{8}{15}$, да се одредат $\sin\alpha, \cos\alpha, ctg\alpha.$

I начин: Со дефиницијата на тригонометриски функции

Од $tg\alpha = \frac{8}{15}$, добиваме дека спротивната катета е $8k$, прилегнатата катета е $15k$, а според Питагоровата теорема наоѓаме дека хипотенузата е $17k$.

Значи, $\sin\alpha = \frac{8}{17}$; $\cos\alpha = \frac{15}{17}$; $ctg\alpha = \frac{15}{8}$.

II начин: Со изведените врски

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{\frac{8}{15}}{\sqrt{1+\frac{64}{225}}} = \frac{8}{17},\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{64}{225}}} = \frac{15}{17},\ \ ctg\alpha = \frac{12}{5}.$$

III начин: Со систем равенки $\begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{8}{15} \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\sin\alpha = \frac{8}{15}\cos\alpha$, т.е. $\frac{64}{225}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, од каде $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, а $\sin\alpha = \frac{8}{15}\cdot\frac{15}{17} = \frac{8}{17}$.

IV начин: Со пропорциите $tg\alpha = \frac{8}{15}$ и $ctg\alpha = \frac{15}{8}$.

Од $tg\alpha = \frac{8}{15}$ добиваме $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{8}{15}$, т.е. $\sin\alpha : \cos\alpha = 8 : 15$, од каде $\sin\alpha = 8k$, $\cos\alpha = 15k$.

Со замена во основните врски, добиваме: $(8k)^2 + (15k)^2 = 1$

$$64k^2 + 225k^2 = 1$$

$$k = \frac{1}{17}$$

Следува, $\sin\alpha = 8\cdot\frac{1}{17} = \frac{8}{17}$ и $\cos\alpha = 15\cdot\frac{1}{17} = \frac{15}{17}$.

V начин: Со трансформација на основните врски

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad / : \cos^2\alpha$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

Со замена на $tg\alpha = \frac{8}{15}$, добиваме $\frac{64}{225} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, т.е. $\frac{225}{289} = \cos^2\alpha$, од каде $\cos\alpha = \frac{15}{17}$.

$\sin\alpha = tg\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{8}{15}\cdot\frac{15}{17} = \frac{8}{17}$.

2) Упростување на тригонометриски изрази

Пример 26: Изразот $\frac{1+\sin\alpha-\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}$ го упростуваме на следниот начин:

$$\frac{1+\sin\alpha-\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha(\sin\alpha+1)}{1+\sin\alpha} = \sin\alpha$$

3) Докажување на тригонометриски идентитети

Пример 27: Докажи го идентитетот $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

I начин: Со трансформација на левата страна во десната:

$$L = \sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = \sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = \sin^2\alpha\cdot 1 = \sin^2\alpha = D$$

II начин: Со трансформација на двете страни во очигледно неравенство

$$\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)=\sin^2\alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin^4\alpha+\sin^2\alpha-\sin^4\alpha=\sin^2\alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin^2\alpha=\sin^2\alpha$$

III начин: Со трансформација на десната страна во левата:

$$D=\sin^2\alpha=\sin^2\alpha\cdot 1=\sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha=L$$

IV начин: Со трансформација од очигледен идентитет до бараниот идентитет

Согледај го решението: Од $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ со множење со $\sin^2\alpha$ добиваме:

$$\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$$

4) Елиминација на параметар

Пример 28: Елиминирај го параметарот t од равенствата $x=a\sin t$ и $y=b\cos t$

Решение: Од равенствата $\begin{cases}x=a\sin t\\ y=b\cos t\end{cases}$ добиваме $\begin{cases}\sin t=\dfrac{x}{a}\\ \cos t=\dfrac{y}{b}\end{cases}$.

По степенување со 2 се добива : $\begin{cases}\sin^2 t=\dfrac{x^2}{a^2}\\ \cos^2 t=\dfrac{y^2}{b^2}\end{cases}$, а со собирање на последните равенства

се добива $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\sin^2 t+\cos^2 t$, т.е. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

ЗАДАЧИ ОД НИВО **А** И НИВО **Б** :

1. Ако триаголникот е стандардно означен, тогаш $\sin\beta$ е односот:

а) $\frac{a}{c}$ б) $\frac{a}{b}$ в) $\frac{b}{c}$ г) $\frac{c}{a}$ д) друг одговор

2. Во триаголник во кој се дадени катети со должини 5 и 12 и помалиот остар агол α, косинусот од тој агол изнесува ________________.

3. Аголот $\beta = 82^{\circ}7'43''$ изразен во степени е ____________________.

4. Аголот од $0{,}172\pi$ во степени изнесува ______________________.

5. Вредностите на тригонометриските функции $\sin 28^{\circ}, \cos 54^{\circ}, tg 88^{\circ}, ctg 23^{\circ}$ запишани со кофункции се____.

6. Одреди го аголот α од равенството:

а) $\sin(\alpha - 40^{\circ}) = \cos(2\alpha + 10^{\circ})$ б) $tg(2\alpha - 18^{\circ}) = ctg(3\alpha + 18^{\circ})$

7. По упростувањето на изразот $\frac{2\sin 40^{\circ} - 5\cos 50^{\circ}}{7\sin 40^{\circ} + 3\cos 50^{\circ}}$ се добива__________________.

8. Вредноста на $\sin 45^{\circ}$ изнесува:

а) $\frac{\pi}{4}$ б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ в) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ г) $\frac{1}{2}$ д) друг одговор

9. Одреди ја вредноста на изразот $\sin^2 60^{\circ} + \sin^2 30^{\circ}$.

10. Одреди ја вредноста на изразот $\frac{\sin 45^{\circ} + \cos 45^{\circ}}{\cos^2 30^{\circ} + \cos^2 60^{\circ}}$.

11. Вредноста на изразот $tg 45^{\circ} + ctg 45^{\circ} + \sin 30^{\circ} + \cos 60^{\circ}$ е _______________________.

12. Ако $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, тогаш $tg\alpha$ изнесува:

а) $\frac{4}{3}$ б) $\frac{3}{4}$ в) $\frac{3}{5}$ г) $\frac{5}{3}$ д) Друг одговор

13. Ако $tg\alpha = \frac{5}{12}$, тогаш вредноста на $\cos\alpha$ изнесува ____________________________.

14. Ако $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, одреди ги вредностите на другите тригонометриски функции.

15. Ако $tg\alpha = \frac{7}{24}$, одреди ги вредностите на другите тригонометриски функции.

Упрости ги изразите (16,17):

16. а) $tg\alpha \cdot \cos\alpha$ б) $\frac{\sin\alpha}{tg\alpha}$

17. а) $tg\alpha - tg\alpha \cdot \sin^2\alpha$ б) $ctg\alpha - ctg\alpha \cdot \cos^2\alpha$

Трансформирај ја левата страна во десната (18-20):

18. а) $\left(1+tg^2\alpha\right)\cos\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ б) $\left(1+ctg^2\alpha\right)\sin\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

19. а) $tg^2\alpha - tg^2\alpha\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ б) $ctg^2\alpha - ctg^2\alpha\cos^2\alpha = \cos^2\alpha$

20. а) $\frac{\sin^3\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$ б) $\frac{\cos^3\alpha + \sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = ctg\alpha$

21. По елиминација на параметарот t од равенствата $x = 3\cos t$ и $y = 3\sin t$

се добива равенството_________________________________.

22. Подреди ги по големина тригонометриските функции $tg10^\circ, ctg10^\circ, tg50^\circ$, почнувајќи од најмалата.

23. Одреди го знакот на изразот а) $\sin 30^\circ - \cos 10^\circ$ б) $tg40^\circ - ctg70^\circ$

Реши го правоаголниот триаголник (24-26), ако:

24. $c = 5, \alpha = 36^\circ 52'$

25. $a = 16, c = 65$

26. $a : c = 3 : 5, b = 8$

Ниво В

Ученикот треба да го примени своето знаење и разбирање

НИВО: ПРИМЕНА

Нека е даден синусот на аголот α, т.е. $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$. Нема да се изгуби од општоста ако се земе спротивната катета $a = 2t \cdot k$ и хипотенузата $c = \left(1+t^2\right)\cdot k$. За $k=1$ се добива дека $a = 2t$ и $c = 1+t^2$. Катетата $b = 1-t^2$, бидејќи $b^2 = \left(1+t^2\right)^2 - 4t^2 = \left(1-t^2\right)^2$. Значи, $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $tg\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$, $ctg\alpha = \frac{1-t^2}{2t}$.

Пример 29: Ако $ctg\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n} - \frac{n}{m}\right)$ и $m > n > 0$, другите тригонометриски функции ќе бидат:

Од $ctg\alpha = \frac{m^2-n^2}{2mn}$, прилегнатата катета ќе биде $b = m^2 - n^2$, а спротивната $a = 2mn$.

За хипотенузата важи $c^2 = a^2 + b^2 = 4m^2n^2 + 4m^4 - 2m^2n^2 + n^4 = \left(m^2+n^2\right)^2$, т.е. $c = m^2 + n^2$.

Значи, $\sin\alpha = \frac{2mn}{m^2+n^2}$, $\cos\alpha = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$, $tg\alpha = \frac{2mn}{m^2-n^2}$.

Пример 30: Одреди ја вредноста на изразот $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, ако $tg\alpha = 2$.

Решение:

I начин: $a = 2, b = 1, c = \sqrt{5}$.

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}; \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{3}.$$

II начин: $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{tg\alpha - 1}{tg\alpha + 1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}.$

Примената на тригонометриските функции од комплементни агли ја искажуваме со следните примери:

Пример 31: Ако $\alpha+\beta=90^\circ$, тогаш докажи дека $\dfrac{\sin\alpha+\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}=tg\alpha$

Доказ: $L=\dfrac{\sin\alpha+\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha}=tg\alpha=D.$

Пример 32: Ако α,β,γ се остри агли на триаголник, тогаш докажи дека

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\cos\frac{\gamma}{2}$$

Доказ: $L=\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right)=\cos\left(90^\circ-\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\beta}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{180^\circ-\alpha-\beta}{2}\right)=\cos\dfrac{\gamma}{2}=D$

Примената на основните и изведените тригонометриски врски ја искажуваме со следните примери:

Пример 33: Одреди ги тригонометриските функции од аголот α, ако $tg\mathrm{\alpha}=\dfrac{a^2-4}{4a}$, за $a>2$.

Решение: $\sin\alpha=\dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\dfrac{\dfrac{a^2-4}{4a}}{\sqrt{1+\dfrac{\left(a^2-4\right)^2}{16a^2}}}=\dfrac{\dfrac{a^2-4}{4a}}{\dfrac{a^2+4}{4a}}=\dfrac{a^2-4}{a^2+4}$; $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\dfrac{4a}{a^2+4}$

Пример 34: Упрости го изразот $\dfrac{1-\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)}{\cos^4\alpha}$.

Решение: $\dfrac{1-\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)}{\cos^4\alpha}=\dfrac{1^2-\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)}{\cos^4\alpha}=\dfrac{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)}{\cos^4\alpha}=$

$$=\frac{\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=2tg^2\alpha.$$

Пример 35: Докажи го тригонометрискиот идентитет

$$\frac{1}{\sin^2\mathrm{\alpha}\cos^2\mathrm{\alpha}}=tg^2\mathrm{\alpha}+ctg^2\mathrm{\alpha}+2.$$

Доказ: I начин: Левата страна да се трансформира во десната:

а) $L=\dfrac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}+\dfrac{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=$

$=tg^2\alpha+ctg^2\alpha+2=D$

б) $L=\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{tg^2\alpha+ctg^2\alpha+2}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(tg^2\alpha+ctg^2\alpha+2\right)}=\frac{tg^2\alpha+ctg^2\alpha+2}{\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}=$

$=\frac{tg^2\alpha+ctg^2\alpha+2}{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2}=tg^2\alpha+ctg^2\alpha+2=D$

в) $L=\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}=tg^2\alpha+1+ctg^2\alpha+1=$

$=tg^2\alpha+ctg^2\alpha+2=D$

г) $L=\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{1+ctg^2\alpha}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{1+tg^2\alpha}}=\frac{\left(1+tg^2\alpha\right)\left(1+ctg^2\alpha\right)}{1}=$

$=tg^2\alpha+ctg^2\alpha+2=D$

II начин: Десната страна да се трансформира во левата

$$D=tg^2\alpha+ctg^2\alpha+2=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+2=\frac{\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=L$$

III начин: Двете страни да се трансформираат во очигледно равенство

$$\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=tg^2\alpha+ctg^2\alpha+2.$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+2$$

$$\Updownarrow$$

$$1=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$1=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$1=1$$

IV начин: Со користење на познати идентитети

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\ \Rightarrow\ \begin{cases} tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\\ ctg^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases}$$

Со собирање на равенствата се добива $\dfrac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + ctg^2\alpha + 2.$

V начин: Со трансформација на идентитетот $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ во дадениот

а)

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \ \ /^{\,2}$$
$$1^2 = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2$$
$$1 = \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha \ \ / : \sin^2\alpha\cos^2\alpha$$
$$\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + ctg^2\alpha + 2.$$

б)

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \ \ / : \ \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + ctg^2\alpha + 2$$

VI начин: Со користење на дефиниција на тригонометриски функции

а) $L = \dfrac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\dfrac{a^2}{c^2}\cdot\dfrac{b^2}{c^2}} = \dfrac{c^4}{a^2b^2} = \dfrac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a^2b^2} = \dfrac{a^4+2a^2b^2+b^4}{a^2b^2} =$

$$= \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 = tg^2\alpha + ctg^2\alpha + 2 = D$$

б) $\dfrac{1}{\dfrac{a^2}{c^2}\cdot\dfrac{b^2}{c^2}} = \dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} + 2 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{c^4}{a^2b^2} = \dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} + 2 \ \ / \, a^2b^2 \quad\Leftrightarrow\quad c^4 = a^4 + b^4 + a^2b^2 \quad\Leftrightarrow$

$$c^4 = \left(a^2+b^2\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad c^4 = c^4.$$

Пример 36: Елиминирај го параметарот t од равенките: $\begin{array}{l} x = 5 + 3\cos t \\ y = 7 + 3\sin t \end{array}$

Решение:

$$\begin{cases} 3\cos t = x - 5 \\ 3\sin t = y - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 t = \dfrac{(x-5)^2}{9} \\ \sin^2 t = \dfrac{(y-7)^2}{9} \end{cases} \ \text{т.е.}\ \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{9} = 1 \ \text{или}\ (x-5)^2 + (y-7)^2 = 9$$

Монотоноста на функциите ќе ја искажеме со следниот пример:

Пример 37: Изрази во кои граници се наоѓа аголот β за да важат неравенствата:

а) $ctg\beta < \sqrt{3}$ б) $\cos\beta > \frac{1}{2}$ в) $\frac{1}{2} < \sin\beta < 1$

Решение: а) $ctg\beta < ctg60^\circ$ б) $\cos\beta > \cos 60^\circ$ в) $\sin 30^\circ < \sin\beta < \sin 90^\circ$

$\beta > 60^\circ$ $\beta < 60^\circ$ $\beta \in (30^\circ, 90^\circ)$

$\beta \in (60^\circ, 90^\circ)$ $\beta \in (0^\circ, 60^\circ)$

Примената на решавањето на триаголник ќе ја искажеме со следните примери:

Пример 38 Одреди го периметарот на правоаголникот со дијагонала d и агол α меѓу дијагоналата и основата a.

Решение:
$$\left.\begin{array}{l}\frac{b}{d} = \sin\alpha \Rightarrow b = d\sin\alpha \\ \frac{a}{d} = \cos\alpha \Rightarrow a = d\cos\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow L = 2d(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

Пример 39 Одреди ја височината на дрво со сенка долга 10 m, ако од крајот на сенката врвот на дрвото се гледа под агол од 70°.

Решение: Нека височината на дрвото ја означиме со h. Тогаш, $tg70^\circ = \frac{h}{10}$, т.е. $h = 10tg70^\circ$ или $h \approx 27,47$ m.

Ниво Г

Ученикот треба да користи логичко следство

НИВО: АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ

Докажи дека аглите α и β во правоаголен триаголник се комплементни агли ако и само ако тригонометриската функција од остриот аголот е кофункција од комплементниот агол, т.е.

$$\alpha+\beta=90^\circ \Leftrightarrow \sin\alpha=\cos\beta$$
$$\alpha+\beta=90^\circ \Leftrightarrow \cos\alpha=\sin\beta$$
$$\alpha+\beta=90^\circ \Leftrightarrow tg\alpha=ctg\beta$$
$$\alpha+\beta=90^\circ \Leftrightarrow ctg\alpha=\sin\beta$$

Доказ: $\Rightarrow$:

$$\alpha+\beta=90^\circ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin\alpha=\dfrac{a}{c}=\cos\beta \\ \cos\alpha=\dfrac{b}{c}=\sin\beta \\ tg\alpha=\dfrac{a}{b}=ctg\beta \\ ctg\alpha=\dfrac{b}{a}=tg\beta \end{array}\right.$$

$\Leftarrow$:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha=\dfrac{a}{c}=\cos\beta \\ \cos\alpha=\dfrac{b}{c}=\sin\beta \\ tg\alpha=\dfrac{a}{b}=ctg\beta \\ ctg\alpha=\dfrac{b}{a}=tg\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+\beta=90^\circ$$

Пример 40: Ако $\alpha+\beta=90^\circ$ и $\sin\alpha+\cos\beta=1$, одреди ги аглите α и β.

Решение: Од $\alpha+\beta=90^\circ \Rightarrow \cos\beta=\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha+\sin\alpha=1$, т.е. $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, од каде $\alpha=30^\circ$ и $\beta=60^\circ$.

Докажи дека:

$$\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$
$$\cos 30^\circ=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$tg30^\circ=ctg60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$ctg30^\circ=tg60^\circ=\sqrt{3}$$
$$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$tg45^\circ=ctg45^\circ=1$$

Доказ: Нека ΔABC е рамностран со страна a и агли по 60° со висина $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ која ја добиваме со примена на Питагорова теорема.

Имаме: $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$ $\quad tg30^\circ = ctg60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

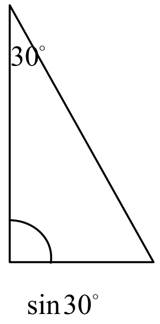
$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad ctg30^\circ = tg60^\circ = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

Дијагоналата на квадратот со страна a го дели квадратот на два рамнокраки правоаголни триаголници со агли од 45° и хипотенуза $a\sqrt{2}$.

Имаме: $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$tg45^\circ = ctg45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

Пример 41: За правоаголниот триаголник даден на скицата, одреди ги вредностите на тригонометриските функции од острите агли.



Решение: Хипотенузата изнесува $2\sin 30^\circ$, а другата катета е $\sin 30^\circ \cdot \sqrt{3}$

$$\sin 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{2\sin 30^\circ} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ \cdot \sqrt{3}}{2\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$tg30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = ctg60^\circ$$

$$ctg30^\circ = \frac{\sin 30^\circ \cdot \sqrt{3}}{\sin 30^\circ} = \sqrt{3} = tg60^\circ$$

Докажи ги основните и изведените врски

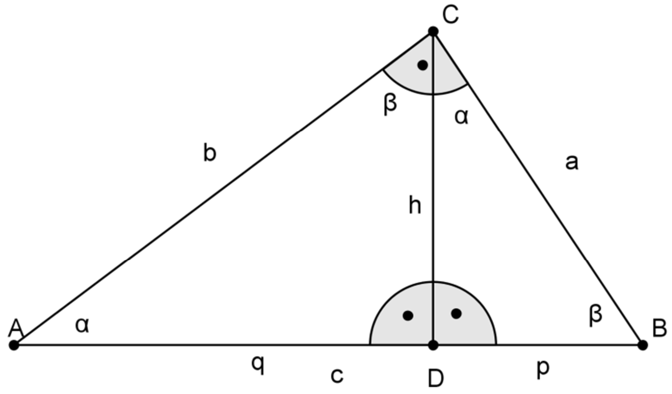
1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Доказ:

I начин: Од $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ и $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

II начин:



Според скицата, од $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$, имаме:

$$\begin{cases}\sin\alpha=\frac{a}{c}\\ \sin\alpha=\frac{p}{a}\\ \cos\alpha=\frac{b}{c}\\ \cos\alpha=\frac{q}{b}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin^2\alpha=\frac{p}{c}\\ \cos^2\alpha=\frac{q}{c}\end{cases}\Rightarrow \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{p}{c}+\frac{q}{c}=1.$$

2) $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

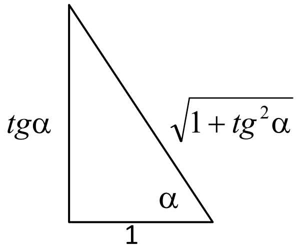
Доказ: Од $tg\alpha=\frac{a}{b}\Rightarrow tg\alpha=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}\Rightarrow tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, а од $ctg\alpha=\frac{b}{a}\Rightarrow ctg\alpha=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}\Rightarrow ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

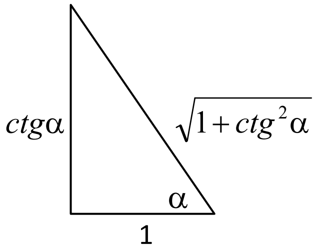
3) $tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$

Доказ: Од $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$ и $tg\alpha=\frac{a}{b}, ctg\alpha=\frac{b}{a}\;\Rightarrow\; tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$

$$tg\alpha=\frac{1}{ctg\alpha}\;;\; ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}.$$

4) Од правоаголните триаголници на скицата, имаме:





$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \qquad\qquad \cos\alpha = \frac{ctg\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \qquad\qquad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$$

Доказ: Од $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ со делење со $\cos^2\alpha$ се добива $tg^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{ctg\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$$

Од $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ со делење со $\sin^2\alpha$ се добива $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

Пример 42: Упрости го изразот: $\dfrac{1+\cos\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{2}{\cos\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha} - \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$

Нека $A = \dfrac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha} + \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha + \sin^2\alpha + 1 - \cos\alpha - \sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}$

Сега за целиот израз имаме:

$$\frac{1+\cos\alpha+\sin^2\alpha - 2\cos\alpha - \sin\alpha - \sin^2\alpha - 1 + \cos\alpha + \sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{-\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha} = -tg^2\alpha.$$

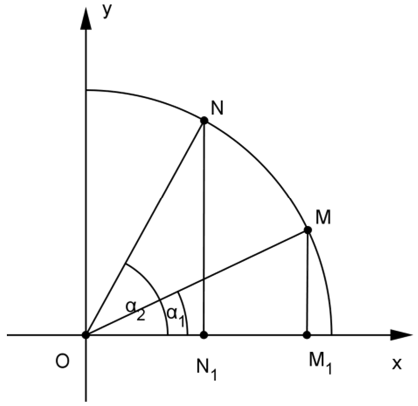
Нека $\alpha_2 > \alpha_1 \wedge \alpha_2, \alpha_1 \in \left(0, 90^\circ\right)$.Тогаш, $\sin\alpha_2 > \sin\alpha_1$

$\cos\alpha_2 > \cos\alpha_1$

$tg\alpha_2 > tg\alpha_1$

$ctg\alpha_2 > ctg\alpha_1.$

Доказ: Нека разгледуваме правоаголни триаголници со константна хипотенуза $R = c$.



Тогаш очигледно е дека $\sin\alpha_2 = \dfrac{\overline{NN_1}}{\overline{ON}} > \dfrac{\overline{MM_1}}{\overline{OM}} = \sin\alpha_1$; $\cos\alpha_2 = \dfrac{\overline{ON_1}}{\overline{ON}} < \dfrac{\overline{OM_1}}{\overline{OM}} = \cos\alpha_1$

$$tg\alpha_2 = \frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_2} > \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = tg\alpha_1; \quad ctg\alpha_2 = \frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2} < \frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} = ctg\alpha_1.$$

Пример 43: Одреди го аголот $\beta \in \left(0^\circ, 90^\circ\right)$ т.ш. $\sin\beta > \frac{1}{2}$ и $\cos\beta > \frac{1}{2}$.

Решение: $\beta \in \left(30^\circ, 90^\circ\right)$ и $\beta \in \left(0^\circ, 60^\circ\right) \Rightarrow \beta \in \left(30^\circ, 60^\circ\right)$.

Пример 44: Одреди го аголот $\beta \in \left(0^\circ, 90^\circ\right)$ т.ш. $tg\beta + ctg\beta \le 2$.

Решение: $tg\beta + \frac{1}{tg\beta} \le 2$

$\Rightarrow tg^2\beta - 2tg\beta + 1 \le 0$

т.е. $(tg\beta - 1)^2 \le 0$ од што следува $tg\beta = 1$ т.е. $\beta = 45^\circ$.

Пример 45: Одреди ги страните на правоаголниот триаголник со даден агол α и збир од катетите $a + b$.

Решение: Од $\frac{a}{b} = tg\alpha$ и својството на пропорција, имаме $\frac{a+b}{b} = \frac{tg\alpha + 1}{1}$

$$\Rightarrow b = \frac{a+b}{tg\alpha + 1} \Rightarrow a = btg\alpha,\ c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

ЗАДАЧИ ОД НИВО **В** И НИВО **Г**

1. Одреди ја вредноста на изразот $\frac{tg\alpha - \cos\alpha}{\cos\beta - ctg\beta}$, ако $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\alpha + \beta = 90^\circ$

2. Одреди ја вредноста на изразот $\frac{\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ}$.

3. Ако α, β и γ се остри агли на триаголник, докажи дека $ctg\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = tg\frac{\alpha}{2}$.

4. Докажи дека $tg^2\alpha = \frac{p}{q}$ во правоаголен триаголник.

5. Одреди ги останатите тригонометриски функции, ако $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Одреди ги останатите тригонометриски функции, ако $tg\alpha = \sqrt{5}$.

7. Одреди ги останатите тригонометриски функции, ако $\cos\alpha = \frac{a^4 - b^4}{a^4 + b^4}$, $a > b > 0$.

8. Пресметај: $\dfrac{3tg^2\frac{\pi}{6} + ctg^2\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi}{3} - \cos^2\frac{\pi}{4}}$.

Упрости ги изразите: (9-11)

9. $\frac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{(\sin\alpha - \cos\alpha)\sin^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha}$

10. $\frac{1 + \sin\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{1 + 4\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{1 + 3\sin\alpha - \cos\alpha}{1 - \cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$

11. $\frac{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1}{\cos^4\alpha}$

Докажи ги тригонометриските идентитети: (12,13)

12. $\frac{2}{1-\sin\alpha}-\frac{1}{1+\sin\alpha}-\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{3tg\alpha}{\cos\alpha}$

13. $2-\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha$

Докажи дека: (14,15)

14. $tg1^\circ\cdot tg2^\circ\cdot tg3^\circ\cdot\ldots\cdot tg87^\circ\cdot tg88^\circ\cdot tg89^\circ=1$

15. $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\ldots+\sin^2 87^\circ+\sin^2 88^\circ+\sin^2 89^\circ=44\frac{1}{2}$

16. Докажи дека за правоаголен триаголник $\left(\gamma=90^\circ\right)$, важи: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$.

(користи дека $\sin 90^\circ=1$)

17. Реши ја равенката $\sqrt{3^x}-2^x+1=0$.

18. Користејќи рамнокрак триаголник, докажи дека $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$; $tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ за $2\alpha<90^\circ$.

19. Одреди ги аглите на ΔABC со страни $a=39, b=20$ и $c=42$.

20. Одреди ги страните на ΔABC, ако $h_c=28, \beta=33^\circ 30'$ и $\gamma=78^\circ 40'$.

21. Нека T е множество од должините на страните и големините на аглите на правоаголниот триаголник, т.е . $T=\left\{a,b,c,\alpha,\beta,90^\circ\right\}$. Одреди ги елементите на T, ако: $a=102, c=321$.

ПИСМЕНА РАБОТА 2

Задачи со заокружување:

1. А **(5)( )** Вредноста на $tg45^\circ$ изнесува:

А) $\sqrt{3}$ Б) 1 В) $\frac{1}{2}$ Г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ Д) Друг одговор

2. Б **(5)( )** Ако $\alpha+\beta=90^\circ$ и $\sin\alpha+\cos\beta=1$, тогаш, аголот β изнесува:

А) 60° Б) 30° В) 45° Г) 75° Д) Друг одговор

3. В **(5)( )** Ако $ctg\alpha=\frac{12}{5}$, тогаш $\sin\alpha$ изнесува:

А) $\frac{5}{12}$ Б) $\frac{12}{13}$ В) $\frac{5}{13}$ Г) $\frac{13}{12}$ Д) Друг одговор

4. Г **(5)( )** Ако $\alpha+\beta=90^\circ$, тогаш $\cos^2\alpha+\cos^2\beta$ изнесува:

А) $\frac{1}{2}$ Б) $\frac{1}{4}$ В) 0 Г) 1 Д) Друг одговор

Задачи со дополнување:

5. А **(5)( )** Ако $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, тогаш $\cos 30^\circ=$ __________ .

Ако $tg60^\circ=\sqrt{3}$, тогаш $ctg30^\circ=$ __________..

6. Б **(5)( )** Ако $tg(\alpha+30^\circ)=2-ctg(60^\circ-\alpha)$, тогаш $\cos(60^\circ-\alpha)=$ ____________..

7. В **(5)( )** Ако $\frac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{3\sin\alpha-\cos\alpha}=2$, тогаш вредноста на α изнесува ____________.

8. Г **(5)( )** Ако $tg\alpha+ctg\alpha=4$, тогаш $tg^4\alpha+ctg^4\alpha$ изнесува__________________.

Задачи со целосна постапка:

9. А **(15)(   )** Ако $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, определи ги вредностите на $\cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha.$

10. Б **(15)(   )** Упрости ги изразите:

а) $\frac{\sin^3\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$ б) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$ в) $\frac{1}{1-\sin\alpha} + \frac{1}{1+\sin\alpha}$

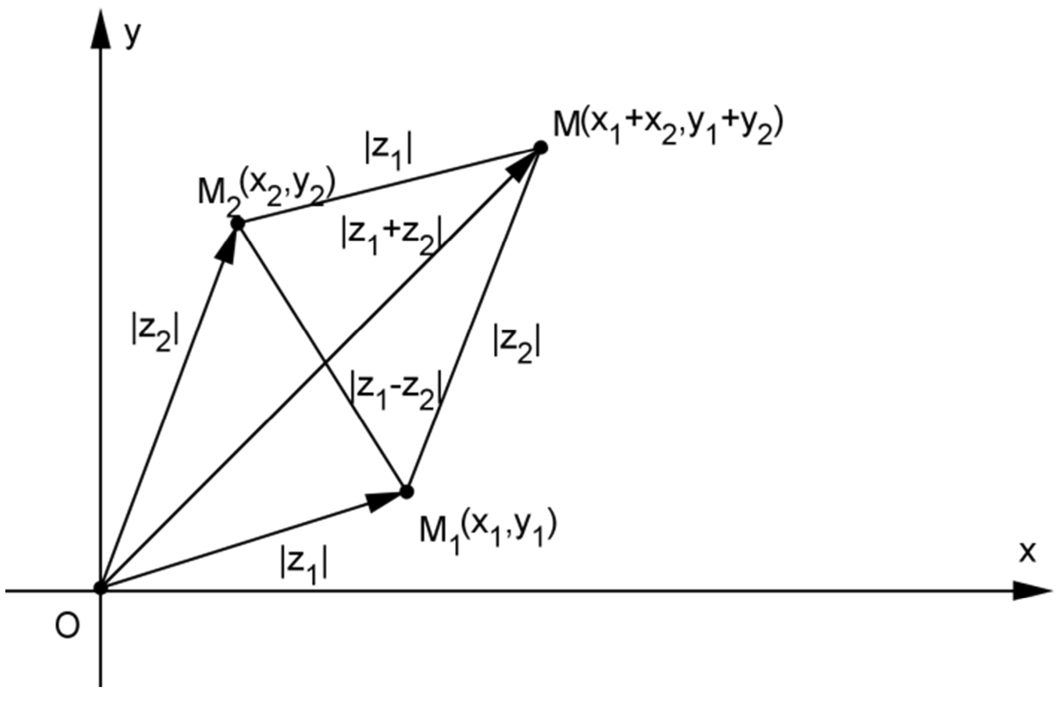
11. В **(15)(   )**Одреди ги страните на правоаголен триаголник со плоштина 9 cm^2 и агол $\alpha = 15^\circ$.

12. Г **(15)(   )** Користејќи ги дефинициите на тригонометриските функции, докажи дека висината во правоаголен триаголник е геометриска средина од проекциите на катетите врз хипотенузата и која било катета е геометриска средина од хипотенузата и проекцијата на таа катета врз хипотенузата.

Бодови(Оцена)	0-26 (1)	27-42 (2)	43-60 (3)	61-76 (4)	77-100 (5)

ТЕМА 3.

Комплексни броеви



Ниво А

Ученикот треба да знае дека...

НИВО: ПОМНЕЊЕ

- Равенката $x^2+1=0$ нема решение во множеството реални броеви $\mathbb{R}$.
- Бројот i таков што $i^2 \overset{def}{=} -1$ е едно решение на равенката $x^2+1=0$.
- Бројот i се вика имагинарна единица и $i \notin \mathbb{R}$.
- Броевите од видот bi , каде $b \in \mathbb{R}$, i е имагинарна единица се викаат имагинарни броеви.

Пример 1: Броевите $2i, 5i, -3i, -\frac{1}{2}i$ се имагинарни броеви.

- Бројот $z=a+bi$, каде $a,b \in \mathbb{R}$, i е имагинарна единица се вика алгебарски (стандарден облик) на комплексен број и притоа $a=\mathrm{Re}(z)$ се нарекува реален дел на комплексниот број z , а $b=\mathrm{Im}(z)$ се нарекува имагинарен дел на комплексниот број z.

Пример 2: $z_1=2+3i$; $z_2=2$; $z_3=3i$

$$\mathrm{Re}(z_1)=2,\ \mathrm{Re}(z_2)=2,\ \mathrm{Re}(z_3)=0$$
$$\mathrm{Im}(z_1)=3,\ \mathrm{Im}(z_2)=0,\ \mathrm{Im}(z_3)=3$$

- Множеството $\mathbb{C}=\{a+bi \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ е множество од комплексни броеви коишто претставуваат точки од рамнина која се вика комплексна рамнина или Коши – Гаусова рамнина со оски Re и Im.
- Комплексниот број $z=a+bi$ може да се претстави како подреден пар реални броеви $z=(a,b)$, каде $a=\mathrm{Re}(z)$, $b=\mathrm{Im}(z)$.

Пример 3: Комплексните броеви $z_1=3+4i,\ z_2=0+0i,\ z_3=-5,\ z_4=-3i,\ z_5=-5+2i$ запишани како подредени парови реални броеви се:
$z_1=(3,4);\ z_2=(0,0);\ z_3=(-5,0);\ z_4=(0,-3);\ z_5=(-5,2).$

- Првите четири степени на имагинарната единица се: $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$.

Пример 4: Вредноста на збирот $i+i^2+i^3+i^4$ изнесува $i-1-i+1=0$.

Нека $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$ е комплексен број, тогаш:

1) $-z=-a-bi$ е спротивен број на комплексниот број $z=a+bi$;

2) $\bar{z}=a-bi$ е конјугирано комплексен број на комплексниот број $z=a+bi$, т.е. броевите $z=a+bi$ и $\bar{z}=a-bi$ се конјугирано комплексни;

3) $\rho=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ е модул комплексниот број.

Пример 5: Нека $z=-3+4i$ е комплексен број, тогаш:

1) $-z=3-4i$ е спротивен број на комплексниот број $z=-3+4i$;

2) $\bar{z}=-3-4i$ е конјугирано комплексен број на комплексниот број $z=-3+4i$;

3) $\rho=|z|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$ е модул комплексниот број $z=-3+4i$.

Два комплексни броеви $z_1=a+bi, z_2=c+di$ се еднакви, ако и само ако броевите имаат исти реални делови и исти имагинарни делови, т.е. $z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$

Пример 6: Нека $x+2i=-3+yi$, тогаш од еднаквоста на броевите, добиваме: $x=-3, y=2.$

Два комплексни броеви $z_1=a+bi, z_2=c+di$ се собираат/одземаат, така што се собираат/одземаат реалните делови и се собираат/одземаат имагинарните делови, т.е.

$$z_1\pm z_2=(a\pm c)+(b\pm d)i\ .$$

Пример 7: За комплексните броеви $z_1=-3+4i, z_2=7-5i$ збирот и разликата се:

$$z_1+z_2=4-i\,,\, z_1-z_2=-10+9i.$$

Производот на комплексните броеви $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ е еднаков на $z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(bc+ad)i$.

Пример 8: Нека $z_1=3+2i, z_2=-4+5i$, тогаш $z_1\cdot z_2=(-12-10)+(-8+15)i=-22+7i.$

Количникот на комплексните броеви $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ е еднаков на

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\,,\ c^2+d^2\neq 0\,.$$

Пример 9: Нека $z_1=3-2i, z_2=5+3i$, тогаш $\frac{z_1}{z_2}=\frac{9}{34}+\frac{-19}{34}i.$

Квадратот на комплексниот број $z=a\pm bi$ е еднаков на $z^2=(a\pm bi)^2=a^2-b^2\pm 2abi$.

Пример 10: Нека $z_1 = 2 - 3i$, тогаш $z^2 = (2-3i)^2 = 4 - 9 - 12i = -5 - 12i.$

- За модулот на комплексниот број $z = a + bi$, важи:

$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, т.е. $|z|^2 = a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi)$, $|z|^2 = z^2$.

- Нека $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, тогаш $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ и $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Ниво Б

Ученикот покажува дека разбира...

НИВО: РАЗБИРАЊЕ

- Равенката $x^2+4=0$ нема решение во множеството реални броеви $\mathbb{R}$, но има две решенија во множествто од комплексни броеви $\mathbb{C}$.

Пример 11: Равенката $x^2+4=0$ се запишува како $x^2-4i^2=0$, т.е. $(x-2i)(x+2i)=0$ и нејзините решенија се $x_1=2i$, $x_2=-2i$.

- Комплексен квадратен корен од бројот $a\in\mathbb{R}$ е множество со два елементи.

Пример 12: Комплексен квадратен корен од бројот 4 , т.е. $\sqrt{4}$ изнесува 2 ; -2. Навистина, од $\sqrt{4}=x$ имаме $4=x^2$ т.е. $x_1=2,\ x_2=-2.$

Пример 13: Комплексен квадратен корен од бројот -4 , т.е. $\sqrt{-4}$ изнесува $2i$; $-2i.$ Навистина, од $\sqrt{-4}=x$ имаме $x^2=-4$ т.е. $x_1=2i, x_2=-2i.$

односно $\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}=\sqrt{4i^2}=\pm 2i.$

Пример 14: Комплексен корен од бројот 0 , т.е. $\sqrt{0}$ изнесува 0. Навистина, од $\sqrt{0}=x$ имаме $x^2=0$ т.е. $x_1=0, x_2=0.$

- Збирот и разликата на имагинарните броеви ai и bi , т.е. $ai\pm bi=ci$; $a,b,c\in\mathbb{R}$ е имагинарен број, при што $c=a+b.$

Пример 15: Збирот и разликата на броевите $8i$ и $-5i$ е $3i$ и $13i$ соодветно.

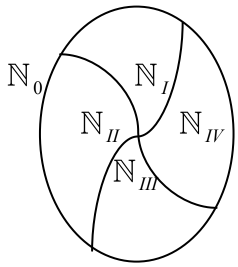
- Производот и количникот на имагинарните броеви ai и bi се реални броеви, т.е.

$$ai\cdot bi=abi^2=-ab\in\mathbb{R};\quad \frac{ai}{bi}=\frac{a}{b}\in\mathbb{R} \text{ и } b\neq 0.$$

Пример 16: Збирот, разликата, производот и количникот од броевите $8i$ и $-2i$, изнесува: $8i+(-2i)=6i$; $8i-(-2i)=10i$; $8i\cdot(-2i)=-16i^2=16\ \ -2i$; $\frac{8i}{-2i}=-4.$

- Множеството од природни броеви $\mathbb{N}$ може да се разбие на четири дисјунктни подмножества:

$$\mathbb{N}_I=\{4k+0\mid k\in\mathbb{N}\};\ \mathbb{N}_{II}=\{4k+1\mid k\in\mathbb{N}_0\};\ \mathbb{N}_{III}=\{4k+2\mid k\in\mathbb{N}_0\};\ \mathbb{N}_{IV}=\{4k+3\mid k\in\mathbb{N}_0\}$$



Пример 17:

$\mathbb{N}_I = \{0,4,8,12,...\}$; $\mathbb{N}_{II} = \{1,5,9,13,...\}$; $\mathbb{N}_{III} = \{2,6,10,14,...\}$; $\mathbb{N}_{IV} = \{3,7,11,15,...\}$

Степенот на имагинарната единица $i^n \in \{-1,1,-i,i\}$, $n \in \mathbb{N}$ т.е.

$$i^{4k+0} = \left(i^4\right)^k \cdot i^0 = i^0 = 1;$$
$$i^{4k+1} = \left(i^4\right)^k \cdot i^1 = i^1 = i;$$
$$i^{4k+2} = \left(i^4\right)^k \cdot i^2 = i^2 = 1;$$
$$i^{4k+3} = \left(i^4\right)^k \cdot i^3 = i^3 = -i.$$

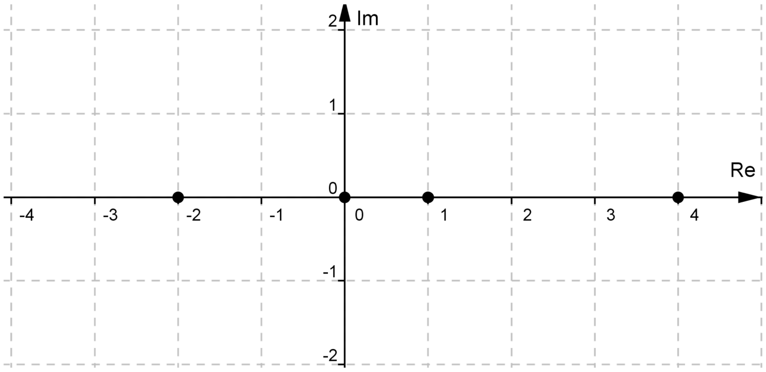
Пример 18: Вредноста на збирот $i^5 + i^6 + i^7 + i^8$ изнесува $i - 1 - i + 1 = 0$.

Множеството реални броеви $\mathbb{R}$ е вистинско подмножество на множеството од комплексни броеви, т.е. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Пример 19: Реалните броеви $-2,0,1,4$ може да се запишат како комплексни броеви:

$z_1 = -2 + 0i$; $z_2 = 0 + 0i$; $z_3 = 1 + 0i$; $z_4 = 4 + 0i$

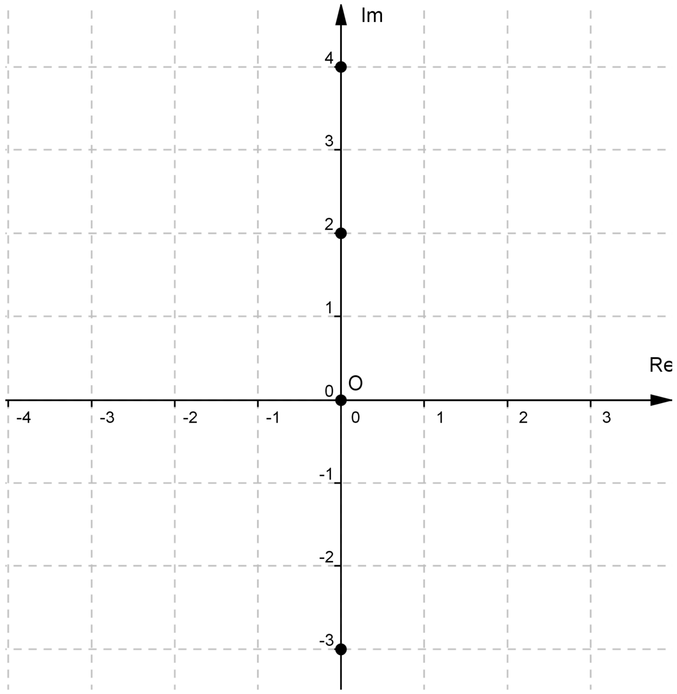
Графички се претставуваат во комплексната рамнина на Re - оската.



Множеството од имагинарни броеви $\mathbb{J}$ е вистинско подмножество на множеството од комплексни броеви, т.е. $\mathbb{J} \subset \mathbb{C}$.

Пример 20: Имагинарните броеви $-3i, 2i, 4i$ може да се запишат како комплексни броеви: $z_1 = 0 - 3i$; $z_2 = 0 + 2i$; $z_3 = 0 + 4i$

Графички се претставуваат во комплексната рамнина на Im - оската.



Ако $z=a+bi$, тогаш:

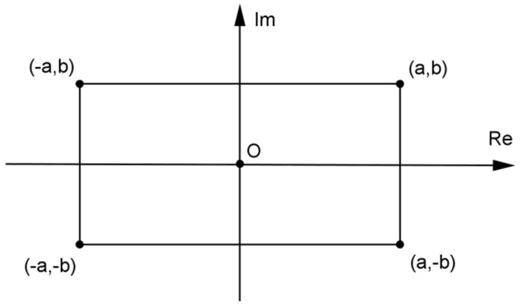
1) z и $\overline{z}$ се конјугирано комплексни броеви и во комплексната рамнина се симетрични точки во однос на $x-$оската.

2) z и $-z$ се спротивни броеви и во комплексната рамнина се симетрични точки во однос на координатниот почеток О.

3) $-z$ и $-\overline{z}$ се конјугирано комплексни броеви и во комплексната рамнина се симетрични точки во однос на $x-$оската.

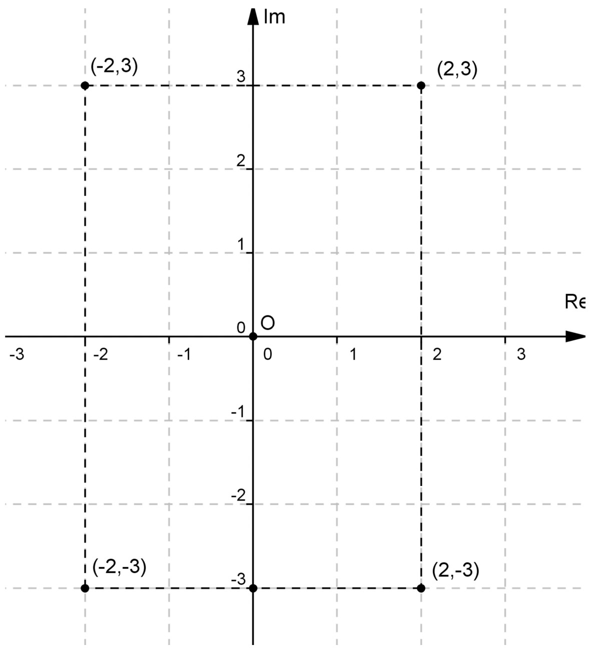
4) $\overline{z}$ и $-\overline{z}$ се спротивни броеви и во комплексната рамнина се симетрични точки во однос на координатниот почеток О.

или графички:

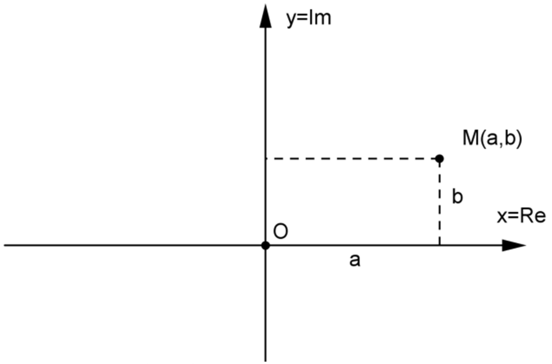


каде што $z=(a,b)$, $\overline{z}=(a,-b)$, $-\overline{z}=(-a,b)$, $-z=(-a,-b)$.

Пример 21: Нека $z=2+3i$ е даден комплексен број, тогаш броевите $\overline{z},-z,-\overline{z},\overline{\overline{z}}$ се $z=(2,3)=\overline{\overline{z}}$; $\overline{z}=(2,3)$; $-z=(-2,-3)$; $-\overline{z}=(-2,3)$ и во комплексната рамнина претставени графички се:



Подредениот пар броеви (a,b) претставен на скицата, претставува:



1. координати на точка $M(a,b)$
2. комплексен број $z=(a,b)$
3. координати на радиус - вектор $\overrightarrow{OM}=(a,b)$

Модулот на векторот $\overrightarrow{OM}=\sqrt{a^2+b^2}$ и модулот на комплексниот број $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ се еднакви, т.е. $\overrightarrow{OM}=|z|$.

Геометриско место на точки од рамнината еднакво оддалечени од точка $C(p,q)$ е кружница со равенка $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$. Ако $C(0,0)$ тогаш кружницата е централна со равенка $x^2+y^2=r^2$.

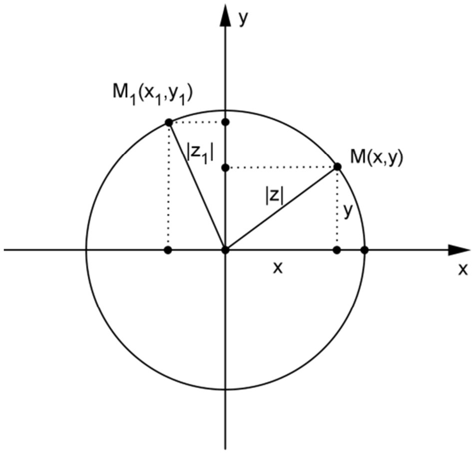
Пример 22: Подредениот пар $\left(-3,4\right)$ претставува:

а) координати на точка $M\left(-3,4\right)$

б) радиус–вектор $\overrightarrow{OM}=\left(-3,4\right)$ со модул $\overrightarrow{OM}=\sqrt{\left(-3\right)^2+4^2}=5$

в) комплексен број $z=-3+4i$ со модул $\left|z\right|=\sqrt{\left(-3\right)^2+4^2}=5$

Нека $z=x+yi$. Од $\left|z\right|=\sqrt{x^2+y^2}$ т.е. $x^2+y^2=\left|z\right|^2$ и $\left|z\right|=const.$, добиваме дека геометриското место од точки за кои важи $x^2+y^2=\left|z\right|^2$ е кружница со центар во координатниот почеток и радиус $r=\left|z\right|$.



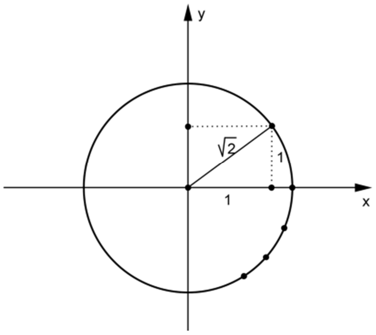
Пример 23:

а) Скицирај го геометриското место на точки на комплексните броеви што имаат модул $\sqrt{2}$, т.е. $\left|z\right|=\sqrt{2}$.

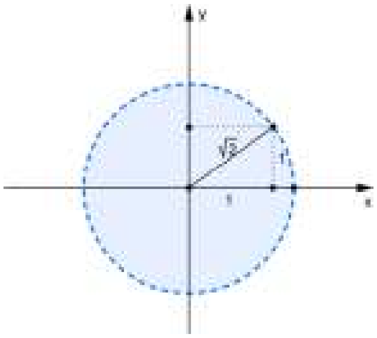
Значи, $x^2+y^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$, т.е. $x^2+y^2=2$, а тоа е кружница со радиус $\sqrt{2}$. (црт. 1)

б) $\left|z\right|<\sqrt{2}$ во рамнината претставува геометриско место на точки во кругот со радиус $\sqrt{2}$. (црт. 2)

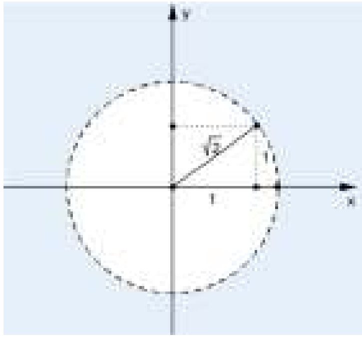
в) $\left|z\right|>\sqrt{2}$ во рамнината претставува геометриско место на точки надвор од кругот со радиус $\sqrt{2}$. (црт. 3)



(црт. 1)



(црт. 2)



(црт. 3)

ЗАДАЧИ ОД НИВО **А** И НИВО **Б** :

1. Имагинарната единица i, во комплексната рамнина е претставена со точката ____________.

2. Од дефиницијата $i^2 = -1$, се сложуваме за $i = \sqrt{-1}$, т.е. i да се користи место $\sqrt{-1}$. Запиши ги броевите $\sqrt{-4}, \sqrt{-9}, \sqrt{-3}$ со помош на i.

3. Множеството од вредности на степенот i^n, $n \in \mathbb{N}$, каде i е имагинарна единица има:

А) 2 елементи. Б) 4 елементи. В) 3 елементи. Г) бесконечно многу. Д) друг одговор.

4. Комплексниот број $z = 0 + 0i = (0,0)$ (комплексна нула), имагинарниот број bi, за $b = 0$ има исто значење како и реалниот број _______.

5. Упрости го секој од следните изрази:

а) i^{13} б) i^{66} в) $(2i)^3$ г) $(-3i)^2$ д) $(-2i)^3$

6. Одреди ги двата квадратни корени за секој од следните броеви:

а)-4 б) -196 в) -361 г) -1024

7. Одреди по едно решение за секоја од следните равенки:

а) $x^5 = i$ б) $x^6 = 1$ в) $x^3 = -27i$ г) $x^3 = i$

8. Упрости ги производите:

а) $(4i)\cdot(7i)$ б) $(-11i)\cdot(-4i)$ в) $4\cdot(-7i)$ г) $(-6)\cdot(3i)\cdot(5i)$

9. Кој од следните комплексни броеви е еднаков на $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i$?

А) $\frac{3}{4}+2i$ Б) $0{,}75+5i$ В) $7{,}5+0{,}5i$ Г) $\frac{6}{8}+\frac{4}{8}i$ Д) Друг одговор

10. Ако збирот на полиномите $a+bx$ и $c+dx$ е $a+c+(b+d)x$, тогаш збирот на комплексните броеви $a+bi$ и $c+di$ е __________________________.

11. Ако $\mathrm{Re}(z) = -3$ и $\mathrm{Im}(z) = 5$, тогаш комплексниот број $z =$ ______________________.

12. Користејќи ја дефиницијата за собирање на комплексни броеви, пресметај:

а) $(2+3i)+(5+6i)$ б) $(-2-3i)+(-5-6i)$ в) $(8-6i)+(-8+6i)$ г) $(-2+3i)+(5-6i)$

13. Упрости ги изразите:

а) $(2-3i)-(4+5i)$ б) $(4+5i)-(4-5i)$ в) $(4-3i)-(4-3i)$ г) $(-2+8i)-(7+10i)$

14. Користејќи ја дефиницијата за множење на комплексни броеви, пресметај:

а) $(5+2i)\cdot(4+i)$ б) $(5+3i)\cdot(4-7i)$ в) $(1-i)\cdot(12+4i)$ г) $(-4+i)\cdot(3+11i)$

15. Пресметај:

а) $\frac{2}{1-i}$ б) $\frac{2}{1+i}$ в) $\frac{1-i}{1+i}$ г) $\frac{2+i}{2-i}$

16. Одреди го збирот и производот:

а) $(3{,}5)+(4{,}2)$ б) $(9,-5)+(-8{,}5)$ в) $(-3,-8)\cdot(-3{,}8)$ г) $(0{,}1)\cdot(0{,}1)$

17. Претстави ги комплексните броеви $z_1=3+4i$, $z_2=-4+2i$, $z_3=1+0i$, $z_4=0+2i$ и $z_5=0+0i$ во комплексната рамнина.

18. Претстави ги радиус-векторите $\overrightarrow{OM_1}=(2,3)$, $\overrightarrow{OM_2}=(3,-4)$, $\overrightarrow{OM_3}=(-5,1)$ и $\overrightarrow{OM_4}=(-2,-5)$ во рамнина, а потоа запиши ги подредените парови како комплексни броеви во алгебарска форма.

19. Одреди го збирот на радиус-векторите $\overrightarrow{OM_1}=(5,2)$ и $\overrightarrow{OM_2}=(2,4)$, а потоа збирот на комплексните броеви $z_1=5+2i$ и $z_2=2+4i$. Што заклучуваш?

20. Напиши ги конјугираниот и спротивниот број на дадениот комплексен број:

а) $z=3-4i$ б) $z=-2+5i$ в) $z=0+i$ г) $z=0+0i$

21. Нека $z=2-7i$, тогаш одреди:

а) $\overline{z}$ б) $\overline{\overline{z}}$ в) $\overline{\overline{\overline{z}}}$ г) $-\overline{\overline{z}}$

22. Нека $z_1=2+5i$ и $z_2=3-2i$, тогаш одреди:

а) z_1+z_2 б) $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ в) $\overline{z_1+z_2}$ г) $\overline{z_1}+\overline{z_2}$

Што забележуваш?

23. Нека $z_1 = 6 - 8i$ и $z_2 = 3 + 4i$, тогаш одреди:

а) $|z_1|$ б) $|z_2|$ в) $z_1 \cdot z_2$ г) $|z_1 \cdot z_2|$ д) $|z_1| \cdot |z_2|$

24. Нека $z = \sqrt{7} - \sqrt{2}i$, тогаш одреди:

а) $|z|$ б) $|\overline{z}|$ в) $|-z|$ г) $|-\overline{z}|$

Што забележуваш?

25. Одреди ги x и y од равенствата:

а) $2x + (y-1)i = 4 - 3i$ б) $x + 2 - yi = 3 - i$ в) $x + 3 - 2yi = 4 - 6i$

26. Запиши ги во производ збировите од квадрати:

а) $x^2 + 9$ б) $4x^2 + 25$

Ниво В

Ученикот треба да го примени своето знаење и разбирање

НИВО: ПРИМЕНА

Потребата за проширување на множеството од реални броеви потребата од разложувањето на збирот од квадратите во производ. Имено од формулата $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ и од дефиницијата $i^2=1$ добиваме:

$$a^2+b^2=a^2-i^2b^2=a^2+(bi)^2=(a-bi)(a+bi)\ .$$

Ставајќи $z=a-bi$ и $\overline{z}=a+bi$, добиваме $a^2+b^2=z\cdot\overline{z}$. Бидејќи $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, добиваме

$$|z|^2=z\cdot\overline{z}.$$

Пример 24: Бројот 10 може да се запише како производ од два конјугирано комплексни броеви на следните начини:

$$10=9+1=9-i^2=(3-i)(3+i)$$

$$10=8+2=8-\left(i\sqrt{2}\right)^2=2(2-i)(2+i)$$

$$10=7+3=7-\left(i\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{7}-i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+i\sqrt{3}\right)$$

$$10=5+5=5-5i^2=5(1-i)(1+i)$$

Пример 25: По кратењето на дропката $\frac{x^2+9}{x-3i}$ се добива

$$\frac{x^2+9}{x-3i}=\frac{x^2-9i^2}{x-3i}=\frac{(x-3i)(x+3i)}{x-3i}=x+3i\text{, за } x\neq 3i.$$

Реципрочната вредност на i и $a+bi$, изнесува:

$$i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{1}{0+i}\cdot\frac{-i}{-i}=\frac{-i}{i^2}=-i$$

$$(a+bi)^{-1}=\frac{1}{a+bi}=\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

Пример 26: Реципрочната вредност на $3-4i$, изнесува:

$$\left(3-4i\right)^{-1}=\frac{1}{3-4i}=\frac{1}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}=\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i$$

Количникот на броевите $a+bi$ и $c+di$ изнесува $\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.

Може да се одреди и на следниот начин: $\frac{a+bi}{c+di}=u+vi$, па $a+bi=uc+cvi+dui-dv$

$$\Rightarrow\begin{cases}cu-dv=a\\ du+cv=b\end{cases}\Rightarrow\ u=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}=\mathrm{Re}\left(\frac{a+bi}{c+di}\right);\ v=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}=\mathrm{Im}\left(\frac{a+bi}{c+di}\right),\text{ т.е}$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Пример 27: Нека $z_1=2-3i$, одреди комплексен број $z=x+yi$ т.ш. $\mathrm{Re}\left(z\cdot z_1\right)=18$ и $\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z_1}\right)=\frac{1}{13}$.

Согледај го решението:

$z\cdot z_1=\left(2-3i\right)\left(x+yi\right)=2x-3xi+2yi-3yi^2=2x+3y-\left(3x-2y\right)i$,

$\frac{\overline{z}}{z_1}=\frac{x-yi}{2-3i}=\frac{2x+3y}{13}+\frac{3x-2y}{13}i$. Значи, $\frac{3x-2y}{13}=\frac{1}{13}$

Добиваме $\begin{cases}2x+3y=18\\ 3x-2y=1\end{cases}$ од каде $\begin{cases}x=3\\ y=4\end{cases}$, т.е. $z=3+4i$

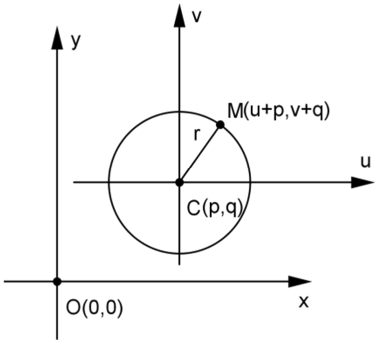
Формулите за модул од производ и количник $\left|z_1\cdot z_2\right|=\left|z_1\right|\cdot\left|z_2\right|$ и $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}$ можат да се воопштат: $\left|\frac{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n}{w_1\cdot w_2\cdot\ldots\cdot w_m}\right|=\frac{\left|z_1\right|\cdot\left|z_2\right|\cdot\ldots\cdot\left|z_n\right|}{\left|w_1\right|\cdot\left|w_2\right|\cdot\ldots\cdot\left|w_m\right|}$, т.е. $\left|\frac{z^n}{w^m}\right|=\frac{\left|z\right|^n}{\left|w\right|^m}$.

Пример 28: Одреди го модулот од комплексниот број $\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^8}{(1+i)^2\left(\sqrt{7}-i\sqrt{2}\right)^6}$.

Согледај го решението $\left|\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^8}{(1+i)^2\left(\sqrt{7}-i\sqrt{2}\right)^6}\right| = \frac{\left|\left(\sqrt{3}-i\right)^8\right|}{\left|(1+i)^2\right|\left|\left(\sqrt{7}-i\sqrt{2}\right)^6\right|} = \frac{2^8}{2\cdot 3^6} = \frac{2^7}{3^6}.$

Нека $z = x + yi$ и нека $|z - p - qi| = r$ каде што $p, q \in \mathbb{R}$. Тогаш добиваме $|x + yi - p - qi| = r$, т.е. $|x - p + (y - q)i| = r$.

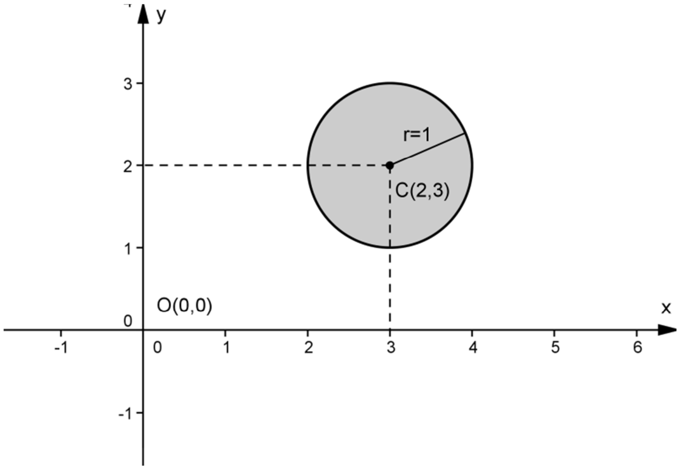
Ако $x - p = u$ и $y - q = v$, тогаш $|u + vi| = r$, т.е. $u^2 + v^2 = r^2$ е кружница.



Заклучуваме дека од $|x - p + (y - q)i| = r$ добиваме кружница $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ со центар $C(p, q)$ и радиус r.

Пример 29: Скицирај го множеството решенија на неравенката $|z - 3 - 2i| \leq 1$.

Решение: Ако $z = x + yi$, тогаш $|x - 3 + (y - 2)i| \leq 1$, т.е. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 1$.



Ниво Г

Ученикот треба да користи логичко следство

НИВО: АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ

Комплексниот број $z = x + yi$, каде $x = \operatorname{Re}(z), y = \operatorname{Im}(z)$ е запишан во алгебарска т.е. стандардна форма.

$z = (x, y)$ е комплексен број запишан како подреден пар реални броеви.

$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ е тригонометриска форма на комплексен број, каде што ρ е модул, а φ е аргументот на комплексниот број.

$z = \rho \cdot e^{i\varphi}$ е експоненцијална форма на комплексен број, каде што ρ е модул, а φ е агрументот на комплексниот број. Ако $\rho = 1$, тогаш $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и се вика Ојлерова формула.

Пример 30: Докажи дека: $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ и $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$

Од Ојлеровата формула $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, т.е. $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

со собирање се добива $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, а со одземање се добива $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$.

Нека $z = x + yi$ и $\bar{z} = x - yi$ каде $x = \operatorname{Re}(z),\ y = \operatorname{Im}(z)$. Тогаш:

а) $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ и $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$ т.е. $2\operatorname{Re}(z) = z + \bar{z}$ и $2i\operatorname{Im}(z) = z - \bar{z}$

б) $\bar{\bar{z}} = z$ в) $\bar{\bar{\bar{z}}} = \bar{z}$

г) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, каде $z_1 = x + yi$ и $z_2 = u + vi$

д) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, каде $z_1 = x + yi$ и $z_2 = u + vi$

Доказ: а) Со собирање на равенките $z = x + yi$ и $\bar{z} = x - yi$ се добива

$2x = z + \bar{z}$, т.е. $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, од каде $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, а) со одземање се добива $2yi = z - \overline{z}$, т.е. $y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$, од каде $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

б) $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x + yi}} = \overline{x - yi} = x + yi = z$

в) $\overline{\overline{\overline{z}}} = \overline{\overline{\overline{x + yi}}} = \overline{\overline{x - yi}} = \overline{x + yi} = x - yi = \overline{z}$

г) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{x + yi + u + vi} = \overline{x + u + (y + v)i} = x + u - (y + v)i = x - yi + u - vi = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

д) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x + yi) \cdot (u + vi)} = \overline{xu - yv + (xv + yu)i} = xu - yv - (-xv - yu)i = (x - yi)(u - vi) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Пример 31: Равенствата $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ и $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ важат и поопшто:

$$\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \ldots + \overline{z_n} \text{ и } \overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \ldots \cdot \overline{z_n}$$

Нека $z = x + yi$ и $z_2 = u + vi$ и нека $|z_1| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z_1 \overline{z_1}}$, $|z_2| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{z_2 \overline{z_2}}$.

Тогаш: а) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ б) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Доказ:

а) $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{z_1 z_2 \overline{z_1 z_2}} = \sqrt{z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1}} \sqrt{z_2 \overline{z_2}} = |z_1| \cdot |z_2|$, т.е. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

б) $|z_1| = \left|z_1 \cdot \dfrac{z_2}{z_2}\right| = \left|\dfrac{z_1}{z_2} \cdot z_2\right| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| \cdot |z_2|$, т.е. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Пример 32: Равенството $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ важи и општо: $|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n|$.
Ако $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$, тогаш важи $|z^n| = |z \cdot z \cdot \ldots \cdot z| = |z| \cdot |z| \cdot \ldots \cdot |z| = |z|^n$.

Пример 33: Нека z_1, z_2, z_3 се комплексни броеви и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$. Тогаш,

$$\left|\frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = r$$

Доказ: $r^2 = |z_1|^2 = z_1\overline{z_1} \Rightarrow \frac{\overline{z_1}}{r^2} = \frac{1}{z_1}$, $r^2 = |z_2|^2 = z_2\overline{z_2} \Rightarrow \frac{\overline{z_2}}{r^2} = \frac{1}{z_2}$, $r^2 = |z_3|^2 = z_3\overline{z_3} \Rightarrow \frac{\overline{z_3}}{r^2} = \frac{1}{z_3}$

Значи, $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = z_1z_2z_3\left(\frac{\overline{z_1}}{r^2} + \frac{\overline{z_2}}{r^2} + \frac{\overline{z_3}}{r^2}\right) = \frac{z_1z_2z_3}{r^2}\left(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}\right)$, т.е.

$|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| = \frac{|z_1z_2z_3|}{r^2}\left|\overline{z_1 + z_2 + z_3}\right| = \frac{r^3}{r^2}|z_1 + z_2 + z_3|$. Добиваме $\left|\frac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = r.$

Нека треба да определиме квадратен корен од $z = u + vi$, т.е. $\sqrt{u + vi}$. Значи треба да најдеме број $a + bi$ каде што $a, b \in \mathbb{R}$, т.ш. $(a + bi)^2 = u + vi$, $u, v \in \mathbb{R}$.

Од еднаквоста на комплексните броеви $a^2 - b^2 + 2abi = u + vi$, имаме:

$a^2 - b^2 = u$ и $2abi = vi$, т.е. $b = \frac{v}{2a}, a \neq 0$

Значи, $4a^4 - 4ua^2 - v^2 = 0$, т.е. ако $a^2 = T$ имаме:

$4T^2 - 4uT - v^2 = 0$, т.е.

$$4T^2 - 4uT + u^2 - u^2 - v^2 = 0$$

$$(2T - u)^2 = u^2 + v^2$$

$|2T - u| = \sqrt{u^2 + v^2} \Rightarrow T = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + v^2}}{2}$. Бидејќи $u - \sqrt{u^2 + v^2} < 0$, следува $T = \frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}$.

Значи, $a^2 = \frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}$, т.е. $a = \pm\sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}}$.

Добивме дека $a = \pm\sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}}$ и $b = \frac{v}{2a},\ a \neq 0$ каде $\sqrt{u + vi} = a + bi.$

Пример 34: Да одредиме $\sqrt{5 - 12i} = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Решение: $(a + bi)^2 = 5 - 12i$

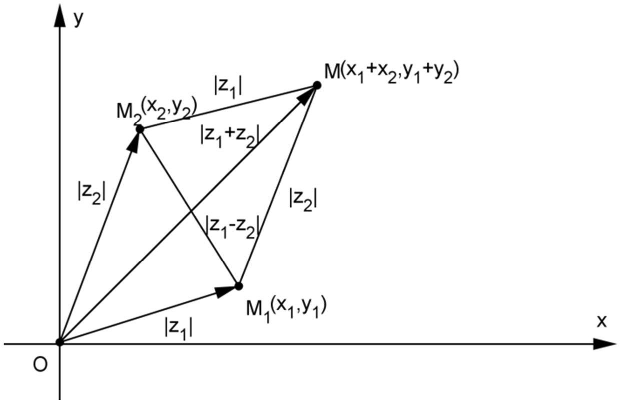
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ b = -\frac{6}{a}(a \neq 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{36}{a^2} = 5 \\ b = -\frac{6}{a}(a \neq 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 5a^2 - 36 = 0 \\ b = -\frac{6}{a}(a \neq 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 - 9)(a^2 + 4) = 0 \\ b = -\frac{6}{a}(a \neq 0) \end{cases}$$

Се добива дека: $a_1 = 3, a_2 = -3$ и $b_1 = -2, b_2 = 2$.

Значи, квадратниот корен има вредности: $3 - 2i$ и $-3 + 2i$

Нека се дадени точките $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Во рамнината XOY ги формираме векторите: $\overrightarrow{OM_1} = (x_1, y_1), \overrightarrow{OM_2} = (x_2, y_2)$ и $\overrightarrow{OM} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Ги разгледуваме комплексните броеви $z_1=(x_1,y_1), z_2=(x_2,y_2)$ и $z_1+z_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)$, како на дадената скица.



Важи:

1) $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

2) $|z_1-z_2| \ge \left||z_1|-|z_2|\right|$

Доказ: Од формулата за модул, важи $-|z| \le \operatorname{Re}(z) \le |z|$ и $-|z| \le \operatorname{Im}(z) \le |z|$.

Исто така $2\operatorname{Re}(z)=z+\overline{z}$ и $2\operatorname{Im}(z)=z-\overline{z}$.

1) $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{z_1+z_2}=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$$

Од $\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) \le \left|z_1\overline{z_2}\right|=|z_1|\left|\overline{z_2}\right|=|z_1||z_2|$, добиваме $|z_1+z_2|^2 \le |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$

т.е. $|z_1+z_2|^2 \le \left(|z_1|+|z_2|\right)^2$

т.е. $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

2) $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)\overline{z_1-z_2}=(z_1-z_2)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2}=$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2-\left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}\right)=|z_1|^2+|z_2|^2-2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$$

Од $\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) \le \left|z_1\overline{z_2}\right|=|z_1||z_2|$, добиваме $|z_1-z_2|^2 \ge |z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|$

т.е. $|z_1-z_2|^2 \ge \left(|z_1|-|z_2|\right)^2$

ЗАДАЧИ ОД НИВО **В** И НИВО **Г** :

1. Пресметај: $\sqrt{-36}-\sqrt{-16}-\sqrt{-64}+\sqrt{-49}$.

Сведи ги во облик $x+yi$, изразите (2- 5):

2. а) $(8+4i)+(7-2i)+(-6+i)$ б) $(7+3i)-(2+8i)+(9-12i)$

3. а) $(3+i)(2+3i)-(1-i)^2$ б) $(5+i)(1-2i)+(5+3i)^2$

4. а) $\frac{2+3i}{2-3i}$ б) $\frac{5-2i}{1-i}$

5. а) $\frac{1-3i}{1+i}-\frac{i}{2+i}$ б) $\frac{(1+i)(3+2i)}{2+i}$

6. Одреди ги $\mathrm{Re}(z)$ и $\mathrm{Im}(z)$, ако $z=\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}+i^{24}+i^{33}+i^{39}$.

7. Одреди ги $\mathrm{Re}(z)$ и $\mathrm{Im}(z)$, ако $z=\frac{3-2i}{2+i}+\frac{2-i}{3+i}$.

8. Ако $f(z)=z^2-4iz-7-4i$, одреди го $f(2+3i)$.

9. Ако $f(z)=2+z+3z^2$, одреди го $f(z)$, ако $z=3+2i.$

10. Реши ја по z равенката: а) $(2+i)z+2z-3=4+6i$ б) $\bar{z}+4z=20+18i$

11. Даден е комплексниот број $z_1=2+i$. Одреди комплексен број $z=x+yi$, ако е исполнета конјункцијата $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z_1}\right)=-\frac{3}{5}$ и $\mathrm{Im}\left(\bar{z}\cdot z_1\right)=1$.

Одреди ги реалните броеви x и y од равенките (12-13):

12. а) $3x+xi-2y=12-iy-i$ б) $5x-3yi+2i=6-ix-y$

13. а) $(x+iy)(3-7i)=2+4i$ б) $(x+iy)(2+i)=1+3i$

14. Разложи на комплексни множители: а) x^2+49 б) $a+b$ в) $25.$

15. Одреди го модулот на комплексните броеви z, $\overline{z}$, $-z$, $-\overline{z}$, ако $z = 8 - 15i$.

16. Одреди го модулот на комплексниот број: а) $\frac{1-3i}{1+i} - \frac{i}{2+i}$ б) $\frac{1+i}{2+i}(3+2i)$

17. Докажи дека $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 2$

18. Докажи дека равенството $\sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}} = \sqrt{6}$ важи барем за по една вредност на корените.

19. Докажи дека $\left(\sqrt{2}+i\right)^6 + \left(\sqrt{2}-i\right)^6 = -46$.

20. Ако $z = 2 + 11i$, тогаш $\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}} = 4$. Докажи дека равенството важи барем за по една вредност на корените.

21. Нека се дадени точките $M_1\left(x_1, y_1\right)$ и $M_2\left(x_2, y_2\right)$ и нека $M\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2\right)$, тогаш четириаголникот OM_1MM_2 е паралелограм.

а) Докажи со помош на Питагорова теорема дека $\overline{OM}^2 + \overline{M_1M_2}^2 = 2\left(\overline{OM_1}^2 + \overline{OM_2}^2\right)$

б) Докажи со помош на комплексни броеви дека $\left|z_1 + z_2\right|^2 + \left|z_1 - z_2\right|^2 = 2\left(\left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2\right)$

в) Изврши вреднување на постапката.

ПИСМЕНА РАБОТА 3

Задачи со заокружување:

1. А **(5)(   )** Имагинарниот дел на комплексниот број $z=-2i-7$ е:

А) 7 Б) -7 В) -2 Г) $-2i$ Д) Друг одговор

2. Б **(5)(   )** Реалниот дел на комплексниот број $z=\frac{1}{4}-\frac{i-1}{2}$ е:

А) $\frac{3}{4}$ Б) $\frac{1}{4}$ В) $-\frac{1}{2}$ Г) $\frac{1}{8}$ Д) Друг одговор

3. В **(5)(   )** Модулот на комплексниот број $z=\frac{-6+8i}{\sqrt{3}-i}$ изнесува:

А) $\frac{2i}{\sqrt{2}}$ Б) 5 В) 10 Г) $-\frac{6}{\sqrt{3}}$ Д) Друг одговор

4. Г **(5)(   )** Нека $z=1-i$, тогаш $\left(\overline{\overline{\overline{-z}}}\right)^6$ изнесува:

А) 8 Б) $-64i$ В) 64 Г) $-8i$ Д) Друг одговор

Задачи со дополнување:

5. А **(5)(   )** Ако комплексните броеви $z_1=x-i$ и $z_2=-1+yi$ се еднакви, тогаш
$x=$ __________; $y=$ ____________.

6. Б **(5)(   )** Реалните броеви се точки од ________________ , а комплексните броеви се точки од ________________.

7. В **(5)(   )** Нека $M_1(3,1)$ и $M_2(5,5)$ се точки од рамнината, тогаш $z_1=3+i$, $z_2=5+5i$ и
$|z_1+z_2|=$ ______. $\overrightarrow{OM_1}=(3,1)$ и $\overrightarrow{OM_2}=(5,5)$ и $\left|\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_1}\right|=$ _________.

8. Г **(5)(   )** Последиците $\operatorname{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$ и $\operatorname{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$ се добиваат од причината
________________ и ________________ .

Задачи со целосна постапка:

9. А **(15)( )** Нека $z_1 = 2 - 3i, z_2 = -3 + 4i$, тогаш одреди: а) $z_1 + z_2$ б) $z_1 - z_2$ в) $z_1 \cdot z_2$

10. Б **(15)( )** Скицирај го и штрафирај множеството од точки од рамнината за кои важи $|z| \leq 1$ и $|z-1| \leq 1$.

11. В **(15)( )** Одреди го реалниот и имагинарниот дел од комплексниот број $\frac{1+3i}{(-1-i)^2} + \frac{(-4+i)(-4-i)}{1+i}$.

12. Г **(15)( )** Ако $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, докажи дека $z^2 + z + 1 = 0$ и $z^3 = 1$.

Бодови (Оценка)	0-26 (1)	27-42 (2)	43-60 (3)	61-76 (4)	77-100 (5)

ТЕМА 4.

Квадратни равенки, дискриминанта и виетови формули

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$${x_1}^2 + {x_2}^2 = p^2 - 2q$$

$${x_1}^3 + {x_2}^3 = 3pq - p^3$$

$$\left|x_1 - x_2\right| = \sqrt{p^2 - 4q}\ ,\ p^2 > 4q$$

Ниво А

Ученикот треба да знае дека...

НИВО: ПОМНЕЊЕ

Равенката од видот $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in R$ и $a \neq 0$ е општ вид на квадратна равенка, каде:

ax^2 е квадратен член.
bx е линеарен член.
c е слободен член.

при што: a е коефициент од квадратниот член.
b е коефициент од линеарниот член.
c е коефициент кој се вика слободен член.

Од општиот облик на квадратната равенка може да се одредат коефициентите:

Пример 1: За квадратната равенка $3x^2 - 4x + 7 = 0$ коефициентите се: $a = 3, b = -4, c = 7$.

Ако $a \neq 0, b = 0, c = 0$ равенката е од видот $ax^2 = 0$ со решенија $x_1 = 0, x_2 = 0$ се нарекува тривијален вид на квадратна равенка.

Пример 2: За квадратната равенка $3x^2 = 0$ решенијата се $x_1 = 0, x_2 = 0$.

Ако $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$ равенката е од видот $ax^2 + bx = 0$ еквивалентна со равенката производ $x(ax + b) = 0$ и се вика мешовито квадратна равенка со решенија $x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$

Пример 3: Од квадратната равенка $2x^2 - 5x = 0$ се добива $x(2x - 5) = 0$ со решенија $x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{2}$.

Ако $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$ равенката е од видот $ax^2 + c = 0$, ако $\frac{c}{a} \leq 0$ со решенија $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и се вика чисто квадратна равенка.

Пример 4: Решенијата на квадратната равенка $2x^2 - 18 = 0$ се $x_1 = -3, x_2 = 3$.

Забелешка 1: Претходните квадратни равенки се викаат непотполни квадратни равенки.

- Ако $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ равенката е од видот $ax^2 + bx + c = 0$ и се вика полна квадратна равенка чии решенија се $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $b^2 \geq 4ac$ т.е.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Пример 5: Коефициентите на квадратната равенка $x^2 + x - 6 = 0$ се $a = 1, b = 1, c = -6$, а решенијата се:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}, \text{ т.е. } x_1 = -3 \text{ и } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \text{ т.е. } x_2 = 2.$$

- Ако $a = 0; b, c \in R$ и $b \neq 0$ равенката $ax^2 + bx + c = 0$ се сведува на $bx + c = 0$ и се вика линеарна равенка.

Пример 6: Решение на равенката $2x - 11 = 0$ е $x = \dfrac{11}{2}$.

Забелешка 2: Квадратната равенка секогаш има по две решенија - реални (еднакви или различни) или две нереални решенија.

- Изразот $b^2 - 4ac$ означен со D, т.е. $D = b^2 - 4ac$ се вика дискриминанта на квадратна равенка и во зависност од нејзиниот знак може да се определува природата на решенијата на дадената квадратна равенка.

- Ако $D > 0$ решенијата се реални и различни.

Пример 7: Коефициентите на квадратната равенка $x^2 - 4x + 3 = 0$ се $a = 1, b = -4, c = 3$, дискриминантата е $D = 16 - 12 = 4 > 0$, а решенијата се реални и различни.

- Ако $D = 0$ решенијата се реални и еднакви.

Пример 8: Коефициентите на квадратната равенка $x^2 - 4x + 4 = 0$ се $a = 1, b = -4, c = 4$, дискриминантата е $D = 16 - 16 = 0$, а решенијата се реални и еднакви.

- Ако $D < 0$ решенијата не се реални.

Пример 9: Коефициентите на квадратната равенка $x^2+4x+5=0$ се $a=1, b=4, c=5$, дискриминантата е $D=16-20$, а решенијата не се реални.

Забелешка 3: Нереалните претставуваат конјугирано комплексни броеви.

Квадратната равенка $ax^2+bx+c=0 \quad a,b,c \in R$, $a \neq 0$ по делењето со a се трансформира во видот $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ и ставајќи $p=\frac{b}{a}, q=\frac{c}{a}$ се добива равенката $x^2+px+q=0$ која се вика нормален вид на квадратна равенка и оттука лесно се одредуваат коефициентите p и q.

Пример 10: Од квадратната равенка $2x^2-4x+7=0$, по делењето со 2 добиваме квадратна равенка во нормален вид $x^2-2x+\frac{7}{2}=0$, од каде $p=-2$ и $q=\frac{7}{2}$.

Големиот француски математичар Франсоа Виет ги докажал формулите $x_1+x_2=-p$ и $x_1 \cdot x_2=q$ кои во негова чест се наречени Виетови формули, каде x_1 и x_2 се решенија, а p и q се коефициентите од нормалниот облик на квадратната равенка.

Пример 11: Во квадратната равенка $x^2-7x+11=0$, $x_1+x_2=7$ и $x_1 \cdot x_2=11$.

Квадратниот трином ax^2+bx+c, $a \neq 0$ се трансформира во производ со формулата $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ каде a,b и c се коефициенти, а x_1 и x_2 се реални нули на квадратниот трином.

Забелешка 4: Нулите на квадратниот трином ax^2+bx+c се, всушност, решенија на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$.

Пример 12: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ при што $x_1=2$ и $x_2=3$ се нули на квадратниот трином x^2-5x+6.

Ниво Б Ученикот покажува дека разбира...

НИВО: РАЗБИРАЊЕ

Секоја непотполна квадратна равенка може да се реши со формулата за потполна квадратна равенка

Пример 13: $2x^2 = 0$; $a = 2, b = 0, c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 0}}{2 \cdot 2} \quad x_1 = 0,\ x_2 = 0.$$

Пример 14: $3x^2 - 7x = 0$; $a = 3, b = -7, c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 0}}{2 \cdot 3} \quad x_1 = \frac{7}{3},\ x_2 = 0.$$

Пример 15: $3x^2 - 12 = 0$; $a = 3, b = 0, c = -12$

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 + 144}}{2 \cdot 3} \quad x_1 = 2,\ x_2 = -2.$$

Пример 16: $3x^2 + 12 = 0$; $a = 3, b = 0, c = 12$

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm i \cdot \sqrt{144}}{2 \cdot 3} \quad x_1 = 2i,\ x_2 = -2i.$$

Определувањето на природата на решенијата на квадратната равенка може да се запише пократко со симболи, т.е.

- ако $D > 0$; $x_1, x_2 \in R$ и $x_1 \neq x_2$
- ако $D = 0$; $x_1, x_2 \in R$ и $x_1 = x_2$
- ако $D < 0$; $x_1, x_2 \in C$ и $x_1 = \overline{x_2}$

Забелешка 5: Ако $D \geq 0$ решенијата се реални.

Ако покрај непознатата x во равенката има и други променливи, тие се викаат параметри.

Пример 17: Во равенката $x^2-(m+n)x+mn=0$, m и n се параметри.

Равенките со параметри подобро е да се решаваат со одредување на дискриминантата $D=b^2-4ac$, а потоа со формулата $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Пример 18: Дадена е квадратната равенка $x^2-3mx+2m^2=0, m\in R^+$.

$a=1, b=-3m, c=2m^2$, $D=b^2-4ac=9m^2-8m^2=m^2$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{3m\pm\sqrt{m^2}}{2}$$

Решенијата се $x_1=2m$, $x_2=m$.

Ако е дадена квадратна равенка со параметар, тогаш може да се одредува видот на равенката во зависност од параметарот.

Пример 19: Ако параметарот $m=0$, тогаш равенката $m^2x^2-2x+1=0$ е линеарна, а ако, пак, параметарот $m\neq 0$, тогаш равенката $m^2x^2-2x+1=0$ е квадратна.

Пример 20: Ако квадратната равенка $x^2-(m+2)x+m-1=0$ е од видот $ax^2+c=0$ тогаш вредноста на параметрот m се одредува од равенката $m+2=0$, т.е. $m=-2$.

Забелешка 6: Ако се знае решение на квадратната равенка, тогаш може на местото на непознатата да се замени конкретната вредност на променливата.

Пример 21: Ако $x_1=2$ е едно решение квадратната равенка $mx^2-3x+m+1=0$ тогаш со замена на x во равенката, добиваме $m\cdot 4-3\cdot 2+m+1=0$, т.е. $m=1$.

Нека $x^2+px+q=0$ е равенка во нормален вид, при што важат Виетовите формули $x_1+x_2=-p$ и $x_1\cdot x_2=q$, тогаш во решавањето на задачи можат да се користат формулите:

$x_1^2+x_2^2=p^2-2q$ - збир на квадратите на решенијата.

$x_1^3+x_2^3=3pq-p^3$ - збир на кубовите на решенијата.

$|x_1-x_2|=\sqrt{p^2-4q}$ - разлика од решенијата.

Пример 22: Збирот од квадратите и кубовите на решенијата на квадратната равенка $x^2-2x+3=0$ изнесува:

$$x_1^2+x_2^2=p^2-2q=(-2)^2-2\cdot 3=4-6=-2$$

$$x_1^3+x_2^3=3pq-p^3=3\cdot(-2)\cdot 3-(-2)^3=-18+8=-10$$

Забелешка 7: Ако квадратните равенки се поедноставни, решенијата може да се одредуваат напамет.

Пример 23: Решенијата на квадратната равенка $x^2-7x+12=0$ се $x_1=4$, $x_2=3$, бидејќи $x_1+x_2=7$ и $x_1\cdot x_2=12$.

Ако x_1 и x_2 се решенија на некоја квадратна равенка во нормален вид $x^2+px+q=0$, тогаш таа може да се одреди одредувајќи ги p и q.

Пример 24: Ако $x_1=2$, $x_2=-7$,тогаш

$$p=-(x_1+x_2)=-(2-7)=5$$
$$q=x_1\cdot x_2=2\cdot(-7)=-14 \quad ,$$

па равенката чии решенија беа дадени е $x^2+5x-14=0$.

Забелешка 8: Трансформацијата на квадратен трином во производ, т.е. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ може да се користи и за разложување на полиноми од видот $ax^3+bx^2+cx=x(ax^2+bx+c)=ax(x-x_1)(x-x_2)$.

Пример 25: Полиномот x^3-2x^2-3x разложен на множители е $x(x^2-2x-3)=x(x-3)(x+1)$ бидејќи нули на триномот x^2-2x-3 се $x_1=3$, $x_2=-1$.

ЗАДАЧИ ОД НИВО **А** И НИВО **Б**

Реши ги квадратните равенки:

1. $6x^2=0$ 2. $-3x^2=0$ 3. $-2\frac{1}{3}x^2=0$

4. $x(x-2)=0$ 5. $(x-3)(x+2)=0$ 6. $(x-2)(x+1)=0$

7. $x^2+x=0$ 8. $x^2-7x=0$ 9. $2x^2-9x=0$

10. $3x^2-4x=0$ 11. $x^2-9=0$ 12. $x^2+9=0$

13. $3x^2-7=0$ 14. $9x^2+4=0$ 15. $x^2-5x+6=0$

16. $x^2-7x+10=0$ 17. $x^2+x-6=0$ 18. $x^2+x-12=0$

19. $x^2+x-20=0$ 20. $x^2-x-30=0$ 21. $x^2+7x+10=0$

22. $x^2-6x+13=0$ 23. $x^2+10x+34=0$ 24. $x^2-14x+58=0$

25. $6x^2-x-2=0$ 26. $6x^2+5x-6=0$ 27. $12x^2+23x+10=0$

28. $30x^2-x-1=0$

29. Одреди ја природата на решенијата на квадратната равенка:

а) $x^2-7x-3=0$ б) $x^2-12x+36=0$ в) $x^2-6x+10=0$

30. Одреди го m така што равенката $mx^2+(m-1)x+m-1=0$ има две решенија $x_1=x_2=0$.

31. Одреди го m така што равенката $mx^2+(m+2)x=0$ е од видот $ax^2=0$.

32. Одреди го m така што равенката $(m-1)x^2+(m-2)x+m-3=0$ да биде чисто квадратна(од видот $ax^2+c=0$).

33. Одреди го m така што равенката $(m-2)x^2-(m-3)x+m=0$ да биде од видот $ax^2+c=0$.

34. Одреди го m така што равенката $mx^2-(m-3)x-2m=0$ да нема квадратен член.

35. Одреди го m така што равенката $mx^2 - (m-2)x + 3 - m = 0$ да биде мешовито квадратна (од видот $ax^2 + bx = 0$).

36. Одреди ги p и q од квадратната равенка $x^2 - 2x + 7 = 0.$

37. Одреди ги p и q од квадратната равенка $3x^2 - 6x + 3 = 0.$

38. Одреди ги p , q и a од квадратната равенка $x^2 - 4x + a = 0$,ако $x_1 = 1$.

39. Состави квадратна равенка $x^2 + px + q = 0$ ако $x_1 = 2, x_2 = -5.$

40. Одреди го знакот на решенијата на квадратната равенка $x^2 - 7x + 10 = 0$,без да ја решаваш.

41. Трансформирај во производ: $x^2 + x - 20$.

42. Трансформирај во производ: $2x^2 + 3x - 2$.

43. Трансформирај во производ: $6x^3 - x^2 - 2x$.

Ниво В

Ученикот треба да го примени своето знаење и разбирање

НИВО: ПРИМЕНА

Пример 26: Квадратната равенка $x^2-5x+6=0$ може да се реши на повеќе начини, и тоа:

I начин

Со примена на разложување на полиноми на прости множители.
Имаме:

$$x^2-5x+6=x^2-3x-2x+6=x(x-3)-2(x-3)=(x-3)(x-2)$$

Равенката $(x-3)(x-2)=0$ е равенка производ од неа следува $x-3=0$ или $x-2=0$ т.е. $x_1=3$, $x_2=2$. Множеството решенија е $M=\{2,3\}$.

II начин

Со дополнување до квадрат од бином, имаме:

$$x^2-5x+6=x^2-5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+6=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(x-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)=(x-3)(x-2)$$

Значи, множеството решенија е $M=\{2,3\}$.

III начин

Со решавање како чисто квадратна равенка, имаме:

$$x^2-5x+6=0$$

$$x^2-5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+6=0$$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

По коренувањето добиваме:

$\left|x-\frac{5}{2}\right|=\frac{1}{2}$ од каде:

$x-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$ или $x-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$

$x=3$ или $x=2$ т.е. $M=\{2,3\}$.

IV начин

Со воведување на смената $x-\frac{5}{2}=t$, т.е. $x=t+\frac{5}{2}$.

Добиваме:

$$\left(t+\frac{5}{2}\right)^2-5\left(t+\frac{5}{2}\right)+6=0$$

односно $t^2-\frac{1}{4}=0$, т.е. $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=-\frac{1}{2}$ од каде $x_1=3$, $x_2=2$, т.е. $M=\{2,3\}$.

V начин

Со користење на еднаквост на множители.
Имаме:

$$x^2-5x+6=0$$
$$x^2-5x=-6$$
$$x(x-5)=-6$$
$$-6=-3\cdot 2=3\cdot(-2)=-1\cdot 6=1\cdot(-6)=2\cdot(-3)=-2\cdot 3=6\cdot(-1)=-6\cdot 1$$

Се согледува дека $x_1=3$, $x_2=2$, т.е. $M=\{2,3\}$.

VI начин

Со користење на делење на полиноми.
Делителите на слободниот член на полиномот x^2-5x+6 се: $\{\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 6\}$. Со проба се добива дека $x=3$ е една нула, т.е. $x-3$ е еден множител.

$$(x^2-5x+6):(x-3)=x-2$$
$$\pm x^2 \mp 3x$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$-2x+6$$
$$\mp 2x \pm 6$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$0$$

т.е. $(x-3)(x-2)=0$. Множеството решенија е $M=\{2,3\}$.

V начин и VI начин не се универзални, туку специјални начини.

VII начин

Со користење на формулата $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Во нашиот случај имаме $a=1, b=-5, c=6$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$ т.е. $x_1 = 3, x_2 = 2$ Значи, $M = \{2,3\}$.

При решавање на дробно-рационални равенки секогаш треба да се одредува дефиниционо множество.

Пример 27: $x - 5 = \frac{1}{x} - \frac{1}{5}$

За $x \neq 0$ т.е. $D = \mathbb{R} / \{0\}$ множиме со $5x,$ па добиваме $5x^2 - 25x = 5 - x$.

Забелешка 9: Пред да се примени формулата за решавање на квадратната равенка за полесно одредување на коефициентите a,b,c истата треба да се сведе во општиот облик $ax^2 + bx + c = 0$.

Равенката од претходниот пример во општ облик е: $5x^2 - 24x - 5 = 0$, па $a = 5, b = -24, c = -5$. Следува

$x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{576+100}}{10}$ т.е. $x_{1,2} = \frac{24 \pm 26}{10}$; $x_1 = 5 \in D, x_2 = -\frac{1}{5} \in D$; $M = \left\{-\frac{1}{5}, 5\right\}$.

Пример 28: Квадратната равенка $\frac{5-x}{x+5} + \frac{5+x}{5-x} = \frac{100}{25-x^2}$ за $x \neq \pm 5$ т.е. $D = R \setminus \{-5,5\}$ по множењето со најмалиот заеднички именител $25 - x^2$ се трансформира во

$$(5-x)^2 + (5+x)^2 = 100$$

По степенувањето се добива: $25 - 10x + x^2 + 25 + 10x + x^2 = 100$

$$2x^2 = 50$$

$$x^2 = 25$$

$$x_1 = -5 \notin D, x_2 = 5 \notin D\,,$$

што значи равенката нема решение.

Забелешка 10: Во посложените квадратни равенки или квадратни равенки со параметри прво ќе ја одредуваме дискриминантата $D = b^2 - 4ac$, па потоа решенијата со формулата $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Пример 29: Дадена е квадратната равенка со коефициенти ирационални броеви $x^2 - \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{6} = 0$, при што $a = 1, b = -\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right), c = \sqrt{6}$.

Ја одредуваме дискриминантата:

$$D = b^2 - 4ac = \left(-\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 - 4\sqrt{6}\right) = \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{6} + \sqrt{2}^2 = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2$$

Сега, $x_{1,2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} \pm \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}{2}$, т.е. $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = \sqrt{2}$

Пример 30: Квадратната равенка $x^2 - 3mx + 2m^2 + m - 1 = 0$ при што $m \in R$ е параметар и $a = 1, b = -3m, c = 2m^2 + m - 1$ има дискриминанта

$$D = (-3m)^2 - 4(2m^2 + m - 1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$$

$$\sqrt{D} = |m-2| \qquad \text{т.е.}$$

Решенијата се:

1) За $m > 2$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{3m \pm (m-2)}{2}$

$x_1 = \dfrac{4m-2}{2} = 2m-1; \quad x_2 = \dfrac{2m+2}{2} = m+1$

2) За $m = 2$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{6 \pm 0}{2} = 3$

$x_1 = x_2 = 3$

3) За $m < 2$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{3m \mp (m-2)}{2}$

$x_1 = m+1; \quad x_2 = 2m-1$

Значи за $m \neq 2$ множеството решенија е $M = \{2m-1, m+1\}$, а за $m = 2$ множеството решенија е $M = \{3\}$.

Пример 31: Дадена е квадратната равенка $mx^2 - 2x + 3 = 0$, $m \in R$. Ќе ја одредиме природата на решенијата во зависност од дискриминантата $D = b^2 - 4ac = 4 - 12m.$

а) Равенката има реални и различни решенија за $4 - 12m > 0$, т.е. $m \in \left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$

б) Равенката има двоен корен за $4 - 12m = 0$, т.е. $m = \dfrac{1}{3}$

в) Равенката има реални решенија за $4 - 12m \geq 0$, т.е. $m \in \left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right]$

г) Равенката има комплексни решенија за $4 - 12m < 0$, т.е. $m \in \left(\dfrac{1}{3}, \infty\right)$

д) Равенката има само едно реално решение, ако $m = 0$, т.е. $x = \dfrac{3}{2}$.

Пример 32: Квадратната равенка $x^2 + 2(3-m)x + 2m - 3 = 0$, $m \in R$ и $D = 4(3-m)^2 - 4(2m-3)$ има реални и еднакви решенија за $D = 0$, т.е. се добива равенката $(3-m)^2 - (2m-3) = 0$ или $m^2 - 8m + 12 = 0$ чии решенија се $m_1 = 2, m_2 = 6.$

Забелешка 11: Виетовите формули кога квадратната равенка е во нормален облик $x^2+px+q=0$ се $x_1+x_2=-p, x_1\cdot x_2=q$.

Формулите за збир на квадрати и кубови се:

$$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=p^2-2q$$

$x_1^{\,3}+x_2^{\,3}=3pq-p^3$ и разликата меѓу решенијата

$$|x_1-x_2|=\sqrt{p^2-4q}$$

имаат огромна примена за решавање на задачите.

I. Примена: Составување квадратна равенка со реални коефициенти ако се познати нејзините решенија

- Ги одредуваме $p=-(x_1+x_2)$, $q=x_1x_2$
- Ги заменуваме во квадратната равенка $x^2+px+q=0$

Пример 33: Нека $x_1=1-\sqrt{3}$ и $x_2=1+\sqrt{3}$

Значи $p=-2, q=-2$, па $x^2-2x-2=0$ е квадратна равенка чии решенија се x_1 и x_2

Пример 34: Дадено е $x_1=3-2i$ кое е решение на квадратна равенка со реални коефициенти. Оттука, $x_2=3+2i$.

Значи $p=-6$, $q=13$. Бараната равенка е $x^2-6x+13=0$.

II. Примена: Одредување на бројна вредност на израз зависен од решенијата на дадена квадратна равенка без да се решава истата.

- Од равенката ги одредуваме p и q.
- Изразот го трансформираме како функција од p и q.

Пример 35: Нека е дадена квадратна равенка $2x^2-10x+5=0$.

Треба да ја пресметаме вредноста на изразите $M=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}; N=\frac{x_1^{\,2}}{x_2}+\frac{x_2^{\,2}}{x_1}; R=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$

Значи $p=-5; q=\frac{5}{2}$, па

$$M=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1{}^2+x_2{}^2}{x_1x_2}=\frac{p^2-2q}{q}=\frac{40}{5}=8$$

$$N=\frac{x_1{}^2}{x_2}+\frac{x_2{}^2}{x_1}=\frac{x_1{}^3+x_2{}^3}{x_1x_2}=\frac{3pq-p^3}{q}=35$$

$$R=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}=-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{q}=-\frac{2\sqrt{15}}{5}.$$

III. Примена: Одредување на параметар од дадена квадратна равенка без да се решава истата, ако меѓу решенијата е дадена релација која може да се трансформира преку p и q.

- Ги одредуваме p и q од квадратната равенка.
- Ја трансформираме релацијата преку p и q.
- Ги заменуваме вредностите на p и q во релацијата и го одредуваме параметарот.

Пример 36: Нека е дадена равенката $x^2-mx-m^2-5=0$ и релацијата $2x_1+2x_2-x_1x_2=8$. Одреди го параметарот m.

Решение: Ги одредуваме $p=-m$ и $q=-m^2-5$, а релацијата ја трансформираме во $-2p-q=8$. Добиваме $2m+m^2+5=8$ т.е. $m^2+2m-3=0$ од каде се добива $m_1=-3$, $m_2=1$.

Пример 37: Нека е дадена равенката $mx^2-(2m+1)x+1=0$ и релацијата $x_1x_2(x_2+x_1)=4$ т.е. $-p\cdot q=4$. Одреди го параметарот m.

Решение: За $m\neq 0$; $p=-\frac{2m+1}{m}; q=\frac{1}{m}$

Значи $\frac{2m+1}{m}\cdot\frac{1}{m}=4$ т.е. $4m^2-2m-1=0$ од каде $m_1=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $m_2=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

IV. Примена: Одредување на параметар од дадена квадратна равенка без да се решава истата, ако меѓу решенијата е дадена релација која не може да се трансформира преку p и q.

- Ги одредуваме p и q од равенката.
- Составуваме систем од три равенки со три непознати.
- Го одредуваме параметарот од системот.

Пример 38: Нека е дадена квадратна равенка $2x^2+5x+2m^2-4m+2=0$ и релацијата $x_1-2x_2=1$. Одреди го параметарот m.

Решение: Формираме систем од три равенки со три непознати

$$\begin{cases} x_1-2x_2=1 \\ x_1+x_2=-\dfrac{5}{2} \\ x_1x_2=m^2-2m+1 \end{cases}$$

Од $\begin{cases} x_1-2x_2=1 \\ x_1+x_2=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$ добиваме $x_1=2$, $x_2=\dfrac{1}{2}$,а од $m^2-2m+1=0$ добиваме

$m_1=0$, $m_2=2$.

Пример 39: Дадена е равенката $(m+3)x^2-3mx+2m=0$,за $m\neq-3$, а и релацијата $2x_1-x_2=3$. Одреди го параметарот m.

Решение: Од равенката, добиваме: $p=-\dfrac{3m}{m+3};q=\dfrac{2m}{m+3}$.

Значи $\begin{cases} 2x_1-x_2=3 \\ x_1+x_2=\dfrac{3m}{m+3} \\ x_1x_2=\dfrac{2m}{m+3} \end{cases}$

Од системот $\begin{cases} 2x_1-x_2=3 \\ x_1+x_2=\dfrac{3m}{m+3} \end{cases}$ добиваме: $x_1=\dfrac{2m+3}{m+3}$ и $x_2=\dfrac{m-3}{m+3}$

Значи $\dfrac{2m+3}{m+3}.\dfrac{m-3}{m+3}=\dfrac{2m}{m+3}$од каде се добива $m=-1$.

V. Примена: Одредување на релација меѓу решенијата на дадена квадратна равенка со параметар која нема да зависи од параметарот.

- Ги одредуваме p и q.
- Го елиминираме параметарот од Виетовите формули и добиваме релација меѓу p и q.
- Во релацијата меѓу p и q истите ги заменуваме преку x_1 и x_2, па добиваме релација меѓу решенијата.

Пример 40: Дадена е равенката $mx^2-(2m-1)x+m+2=0$. Состави релација меѓу решенијата.

Решение: За $m\neq 0$, $p=-\frac{2m-1}{m}$, $q=\frac{m+2}{m}$ добиваме $\begin{cases} mp+2m=1 \\ mq-m=2 \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} m=\frac{1}{p+2} \\ m=\frac{2}{q-1} \end{cases}$ од

$\frac{1}{p+2}=\frac{2}{q-1}$ добиваме $q-2p-5=0$ или $2(x_1+x_2)+x_1x_2=5.$

Пример 41: Нека е дадена равенката $x^2-2(a+1)x+3a+2=0$. Состави релација меѓу решенијата.

Решение: $p=-2(a+1), q=3a+2$. Значи $a=\frac{-2-p}{2}$ или $a=\frac{q-2}{3}$, од каде $\frac{-2-p}{2}=\frac{q-2}{3}$ па добиваме $-3p-2q=2$ т.е. $3(x_1+x_2)-2x_1x_2=2$ е бараната релација.

VI. Примена: Составување на квадратна равенка по y чии решенија се дадени и зависни од решенијата на дадена квадратна равенка по x без да се решава истата.

- Ги одредуваме p и q од дадената равенка.
- Ги трансформираме p_1 и q_1 од равенката $y^2+p_1y+q_1=0$ преку p и q.
- Ги одредуваме p_1 и q_1 и ја формираме равенката по y.

Пример 42: Дадена е равенката $4x^2-13x+3=0$ и $y_1=\frac{x_1}{x_2}$ и $y_2=\frac{x_2}{x_1}$.

Состави квадратна равенка по y.

Решение: Ги одредуваме $p=-\frac{13}{4}$ и $q=\frac{3}{4}$

Сега $p_1 = -\left(y_1 + y_2\right) = -\frac{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}}{x_1 x_2} = -\frac{p^2 - 2q}{q} = \frac{145}{12}$

$$q_2 = y_1 y_2 = \frac{x_1}{x_2}.\frac{x_2}{x_1} = 1$$

Бараната равенка е: $y^2 - \frac{145}{12}y + 1 = 0$, т.е. $12y^2 - 145y + 12 = 0$

Пример 43: Нека е дадена равенката $6x^2 - 5x + 1 = 0$ и $y_1 = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}$ и $y_2 = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1}$. Состави квадратна равенка по y.

Решение: $p = -\frac{5}{6}$ и $q = \frac{1}{6}$ ги одредуваме од горната равенка.

Сега $p_1 = -\left(y_1 + y_2\right) = -\left(\frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} + \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1}\right) = -\frac{2q - 2}{q + p + 1} = 5$; $q_1 = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}.\frac{x_2 + 1}{x_2 - 1} = \frac{q - p + 1}{q + p + 1} = 6$

Значи: $y^2 + 5y + 6 = 0$ е бараната равенка.

VII. Примена: Трансформацијата на квадратен трином во производ.

Ќе ја применуваме формулата за трансформација на квадратен трином во производ. $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\cdot\left(x - x_2\right)$

- Ги одредуваме нулите на триномот.
- Со замена во горната формула добиваме производ.

Пример 44: $6x^2 + x - 2 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right).3\left(x + \frac{2}{3}\right) = \left(2x - 1\right)\left(3x + 2\right)$,

бидејќи $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = -\frac{2}{3}$ се нули на триномот.

Пример 45: Дропката $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9} = \frac{\left(x - 2\right)\left(x + 3\right)}{\left(x - 3\right)\left(x + 3\right)} = \frac{x - 2}{x - 3}$ за $x \neq -3$ ја скративме, но претходно триномот и биномот ги разложивме во производ.

Ниво Г

Ученикот треба да користи логичко следство

НИВО: АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ

1. Докажи дека решенијата на квадратната равенка $ax^2 = 0, a \neq 0$ се $x_1 = 0, x_2 = 0$, т.е. множеството решенија е $M = \{0\}$.

Доказ: Од $ax^2 = 0$, по делењето со $a \neq 0$ добиваме $x^2 = 0$. По коренувањето добиваме $\sqrt{x^2} = 0$, од каде со користење на $\sqrt{x^2} = |x|$, се добива $|x| = 0$, а од дефиницијата за апсолутна вредност $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x \leq 0 \end{cases}$ се добива $x_1 = 0, x_2 = 0$, т.е. $M = \{0\}$.

2. Докажи дека решенијата на квадратната равенка $ax^2 + c = 0, a \neq 0, b = 0$ се $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Доказ: Од $ax^2 + c = 0, a \neq 0$ добиваме $x^2 = -\frac{c}{a}$. По коренувањето се добива $|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, т.е. $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

3. Докажи дека квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ се решава со формулата $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Доказ: Од $ax^2 + bx + c = 0$ по делењето со a добиваме $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Со додавање и одземање на $\frac{b^2}{4a^2}$, добиваме: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$, т.е.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

За $b^2 > 4ac$	За $b^2 = 4ac$	За $b^2 < 4ac$
$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x + \frac{b}{2a} = \pm 0$	$x + \frac{b}{2a} = \pm i\frac{\sqrt{\lvert b^2 - 4ac \rvert}}{2a}$

Запишуваме $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, т.е. $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

3’.

Докажи дека квадратната равенка $\frac{a-x}{x+a}+\frac{a+x}{a-x}=\frac{4a^2}{a^2-x^2}$, $a\in R$ нема решенија.

Доказ: За $x\neq\pm a$ имаме: $(a-x)^2+(a+x)^2=4a^2$

$$a^2-2ax+x^2+a^2+2ax+x^2=4a^2$$

$$x^2=a^2$$

$x=\pm a$, значи $M=\varnothing$.

3’’.

Докажи дека равенката $\frac{1}{x+m}+\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-m}+\frac{1}{x-n}=0$, $a\in R$, $m\neq 0, n\neq 0$ има решение $x=0.$

Доказ 1: За $x=0$ имаме: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{-m}+\frac{1}{-n}=0$ т.е. $0=0$.

Доказ 2: $\frac{2x}{x^2-m^2}+\frac{2x}{x^2-n^2}=0$

$x\left(\frac{2}{x^2-m^2}+\frac{2}{x^2-n^2}\right)=0$ заради $\frac{2}{x^2-m^2}+\frac{2}{x^2-n^2}\neq 0$ следува $x=0.$

4. Докажи ја теоремата на Виет: Броевите x_1 и x_2 се корени на квадратната равенка $x^2+px+q=0$ ако и само ако $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q.$

Доказ:

$P\Rightarrow Q$: Ако x_1 и x_2 се корени на квадратната равенка $x^2+px+q=0$, тогаш

$x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$.

P: Броевите x_1 и x_2 се корени на квадратната равенка $x^2+px+q=0$

$\Downarrow$

$r_1: x_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ и $x_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$

$\Downarrow$

$r_2: x_1+x_2=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}+\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$

$$x_1 . x_2 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} . \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

$\Downarrow$

$$Q : \begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

Според хипотетичниот силогизам, $\frac{P \Rightarrow r_1, r_1 \Rightarrow r_2, r_2 \Rightarrow Q}{P \Rightarrow Q}$, $P \Rightarrow Q$ е правилно изведен заклучок, а според модус поненс $\frac{P \Rightarrow Q, P}{Q}$, Q е правилно изведен заклучок, т.е. теоремата $P \Rightarrow Q$ е докажана.

$Q \Rightarrow P$: Ако за броевите x$_1$ и x$_2$ важат равенствата $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, тогаш x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2 + px + q = 0$.

Q :За броевите x$_1$ и x$_2$ важат равенствата $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, за $p, q \in \mathbb{R}$.

$\Downarrow$

$s_1 : (-p - x_2)x_2 = q$ и $(-p - x_1)x_1 = q$

$\Downarrow$

$s_2 : {x_2}^2 + px_2 + q = 0$ и ${x_1}^2 + px_1 + q = 0$

$\Downarrow$

P : x_1 и x_2 се корени на равенката x^2+ px + q = 0.

Според хипотетичниот силогизам $\frac{Q \Rightarrow s_1, s_1 \Rightarrow s_2, s_2 \Rightarrow P}{Q \Rightarrow P}$, $Q \Rightarrow P$

е правилно изведен заклучок, а според модус поненс $\frac{Q \Rightarrow P, Q}{P}$, P е правилно изведен заклучок, т.е. теоремата $Q \Rightarrow P$ е докажана.

Бидејќи $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$ е тавтологија теоремата $P \Leftrightarrow Q$ е докажана.

5. Докажи ги релациите:

$$x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = q$$
$${x_1}^2 + {x_2}^2 = p^2 - 2q$$
$${x_1}^3 + {x_2}^3 = 3pq - p^3$$
$$|x_1 - x_2| = \sqrt{p^2 - 4q} \quad , \; p^2 > 4q$$

Доказ:

Збирот од квадратите на решенијата ќе биде:

$${x_1}^2 + {x_2}^2 = {x_1}^2 + 2x_1x_2 + {x_2}^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q$$

Збирот од кубовите на решенијата ќе биде:

$${x_1}^3 + {x_2}^3 = (x_1 + x_2)({x_1}^2 - x_1x_2 + {x_2}^2) = -p(p^2 - 3q) = 3pq - p^3$$

Разликата од решенијата ќе биде:

$x_1 - x_2 = \dfrac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} - \dfrac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \sqrt{p^2 - 4q}$ или $x_2 - x_1 = -\sqrt{p^2 - 4q}$ т.е.

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{p^2 - 4q}$$

6. Докажи дека $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ т.е. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Доказ:

$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ т.е. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

7. а) Дадена е квадратната равенка $(k-1)x^2 + (k-5)x - (k+2) = 0 \; k \in R, k \neq 1$ и неравенката $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ > 2. Одреди го параметарот k.

Решение:

За $k \neq 1$, $p = \dfrac{k-5}{k-1}$, $q = -\dfrac{k+2}{k-1}$ ги заменуваме во неравенката $\dfrac{-p}{q} > 2$ и добиваме $\dfrac{k-5}{k+2} > 2$ т.е. $\dfrac{k+9}{k+2} < 0$ од каде добиваме $k \in (-9, -2)$.

б) Нека е дадена квадратната равенка $x^2 - (m+3)x + m + 2 = 0$

и системот неравенки $\begin{cases} \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} > \dfrac{1}{2} \\ {x_1}^2 + {x_2}^2 < 5 \end{cases}$. Одреди го параметарот m.

Решение: $p = -(m+3)$ и $q = m+2$

$$\begin{cases} -\dfrac{p}{q} > \dfrac{1}{2} \\ p^2 - 2q < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{m+3}{m+2} > \dfrac{1}{2} \\ (m+3)^2 - 2(m+2) < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{m+4}{2(m+2)} > 0 \\ m^2 + 4m < 0 \end{cases}$$

Со решавање на системот неравенки добиваме $m \in$ (-2,0).

8. Испитај на природата и знакот на решенијата на дадената квадратна равенка $(k-3)x^2 - 2(k-2)x + k = 0$ со реален параметар k.

Решение: За $k \neq 3$, $p = -\dfrac{2(k-2)}{k-3}$, $q = \dfrac{k}{k-3}$, $D = \dfrac{-4k+16}{(k-3)^2}$.

Ја формираме табелата на знаците на p, q и D.

k -∝ 0 2 3 4 +∝

<table>
<tr><td>D</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td colspan="2">+ 0 -</td></tr>
<tr><td>q</td><td colspan="2">+ 0 -</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>p</td><td>-</td><td colspan="2">- 0 +</td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

Имаме:

1^0 За $k \in$(-∝,0) ∪(3,4) решенијата се позитивни, т.е. $0 < x_1 < x_2$.

2^0 За $k \in$(0,2) решенијата се со различни знаци, т.е. $x_1 < 0 < x_2$ и при тоа $|x_1| < |x_2|$.

3^0 За $k \in$(2,3) решенијата се со различни знаци, т.е. $x_1 < 0 < x_2$, но сега $|x_1| > |x_2|$.

4^0 За $k \in$(4, ∝) решенијата се конјугирано комплексни.

Разликуваме четири гранични случаи:

1. За $k=0, x_1=0, x_2>0$ т.е. $k=0, x_1=0<x_2$. Во овој случај равенката е од видот $-3x^2+4x=0$ ($x=0$ или $x=\frac{4}{3}$).

2. За $k=2$ корените се спротивни броеви, т.е. $x_1<0<x_2$ и притоа $|x_1|=|x_2|=\sqrt{2}$.

3. За $k=3$ равенката е линеарна од видот $-2x+3=0$ $\left(x=\frac{3}{2}\right)$.

4. За $k=4$, $D=0$, па равенката има двоен позитивен корен $x_1=x_2=2$.

ЗАДАЧИ ОД НИВО **В** И НИВО **Г**

Реши ги квадратните равенки:

1. $x+\frac{1}{x}=2+\frac{1}{2}$

2. $x-\frac{1}{3}=3-\frac{1}{x}$

3. $\frac{1}{10}-\frac{1}{2x}=10-2x$

4. Одреди го m така што равенката $(m-1)x^2=0$ е еквивалентна со $|x|=0$.

5. Одреди го m така што равенката $mx^2-(m-1)x+m-2=0$ има две решенија кои се спротивни броеви.

6. Одреди го m така што равенката $mx^2-(5-m)x+4-m=0$ има решенија $x_1=0, x_2\neq 0$.

7. Одреди го m така што равенката $m^2x^2-(m+2)x-3-m=0$ да биде во облик $ax^2+bx=0$.

8. Одреди го m така што равенката $mx^2-(m+1)x+m^2-4=0$ нема слободен член.

9. Одреди го m така што равенката $x^2+mx+1=0$ има реални и еднакви решенија.

10. Одреди го m така што равенката $x^2+mx+4=0$ има двоен корен.

11. Одреди го m така што равенката $x^2+mx+9=0$ за множеството решенија да има еден елемент.

12. Одреди го m така што равенката $x^2-2mx+\left(m^2+m\right)=0$ има дискриминанта еднаква на нула.

13. Одреди го m така што триномот $x^2-2mx+m=0$ може да се запише како полн квадрат.

14. Одреди го m така што равенката $mx^2+2mx-(4-m)=0$ има реални решенија.

15. Одреди го m така што равенката $mx^2+2mx-(3-m)=0$ има реални и различни решенија.

16. Одреди го m така што равенката $x^2-4mx+(3-4m)=0$ има конјугирано комплексни решенија.

17.Одреди го збирот и производот на решенијата на квадратната равенка $2x^2-4x+11=0.$

18.Реши ја квадратната равенка $\left|x^2-8x+12\right|=x^2-8x+12.$

19.Одреди го збирот и производот на решенијата на квадратната равенки $(x-4)(3-x)=0.$

20. Состави квадратна равенка со рационални коефициенти $x^2+px+q=0$ ако $x_1=2+\sqrt{7}, x_2=2-\sqrt{7}.$

21. Состави квадратна равенка со реални коефициенти $x^2+px+q=0$ ако $x_1=2-3i.$

22. Ако x_1 и x_2 се решенија на квадратната равенка $2x^2-3x+4=0$, без да ја решаваш равенката, определи ја вредноста на изразот: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

23. Ако x_1 и x_2 се решенија на квадратната равенка $2x^2-4x+7=0$, без да ја решаваш равенката, определи ја вредноста на изразот $x_1^3+x_2^3$.

24. Каков знак имаат решенијата на квадратната равенка $x^2+x-12=0$, без ги одредуваш истите?

25. Каков знак имаат p и q за решенијата да се негативни при $p^2-4q\geq 0$?

26. Одреди го p за решенијата на квадратната равенка $x^2-px+q=0$ да бидат спротивни броеви.

27. Одреди ги p и q за решенијата на квадратната равенка $x^2+px+q=0$ да бидат спротивни реални броеви.

28. Одреди ги p и q за решенијата на квадратната равенка $x^2+px+q=0$ да бидат спротивни комплексни броеви.

29. Скрати ја дропката:

а) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$ б) $\frac{6x^2-5x-6}{2x^2-x-3}$

30. Одреди дефиниционо множество и покажи дека $x=0$ е решение на равенката

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=0.$$

31. Реши ја равенката $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=2\frac{1}{6}$. (упатство: воведи смена)

32. Реши ја квадратната равенка $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}$.

33. Одреди го дефиниционото множество и множеството решенија на равенката:

$$\frac{3-x}{x+3}+\frac{3+x}{3-x}=\frac{36}{9-x^2}$$

34. Реши ја квадратната равенка $x^2-\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)x+\sqrt[6]{72}=0$.

35. Реши ја квадратната равенка $\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}=2$ и дискутирај ги решенијата во зависност од параметрите $a,b\in R$.

36. Дадена е равенката $2x^2-(a+b)x+\sqrt{ab}(a+b-2x)=0$, каде a и b се реални броеви. Докажи дека едното решение е аритметичка, а другото геометриска средина на броевите a и b.

37. Во равенката $3mx^2+2(3m+4)x+3m-5=0$ одреди го параметарот m така што решенијата да бидат еднакви.

38. Одреди ги сите реални вредности на параметарот a за кои равенката
$\frac{x-a}{x-2}+\frac{10}{x+2}+\frac{44}{x^2-4}=0$ има реални решенија.

39. Ако a,b,c се мерни броеви на страните на еден триаголник, тогаш корените на равенката $b^2x^2+\left(b^2+c^2-a^2\right)x+c^2=0$ се комплексни. Докажи.

40. Докажи дека следните искази се еквивалентни:

Ако $D=0$ тогаш квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$ има:

А) реални и еднакви решенија.
Б) двоен корен.
В) множеството решенија има со еден елемент.
Г) ax^2+bx+c е полн квадрат.

41. На претходните страни дадени се 7 начини за решавање квадратна равенка. Вреднувај ги начините за решавање квадратна равенка.

42. Ако $b = 2k$ во $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, тогаш $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

43. Ако $a + b + c = 0$, одреди ги решенијата на равенката $ax^2 + bx + c = 0.$

44. Во равенките $x^2 - ax + b - 4 = 0$ и $y^2 - by + a - \frac{1}{4} = 0$ одреди ги реалните броеви a и b така што решенијата на една од тие равенки се еднакви на реципрочните вредности на решенијата на другата равенка.

45. Во равенката $x^2 - (m + 1)x + m = 0$ одреди го реалниот параметар m така што разликата од квадратите на решенијата да биде 15. За така најденото m реши ја равенката.

46. Докажи ја теоремата: Ако x_1, x_2 се решенија на квадратната равенка $x^2 + px + q = 0$ тогаш $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$ со:

А) синтетички доказ; Б) аналитички доказ;

В) со правило на контрапозиција; Г) вреднувај ги претходните докази.

ПИСМЕНА РАБОТА 4

Заокружи ја буквата пред точниот одговор:

1. А **(5)(   )** За која вредност на $m\in\mathbb{R}$, квадратната равенка $mx^2-x=0$ е непотполна?
А) $m=0$ Б) $m\neq 2$ В) $m\neq 0$ Г) $m\neq 4$ Д) Друг одговор

2. Б **(5)(   )** Дадена е квадратна равенка $x-5=\frac{1}{5}-\frac{1}{x}$. Со $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и едно решение $x_1=5$, другото решение е:

А) $\frac{1}{5}$ Б) -5 В) $-\frac{1}{5}$ Г) 5 Д) Друг одговор

3. В **(5)(   )** Квадратната равенка со реални коефициенти кај која едното решение е $x_1=2-3i$ е:

А) $x^2-4x+13=0$ Б) $x^2-2x-3=0$ В) $x^2+4x-13=0$
Г) $x^2+2x+3=0$ Д) Друг одговор

4. Г **(5)(   )** Ако x_1, x_2 се решенија на квадратната равенка $x^2-x+m=0, m\in\mathbb{R}$ и ако важи $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=1$, тогаш параметарот m е:

А) 3 Б) 2 В) 1 Г) 4 Д) Друг одговор

Дополни:

5. А **(5)(   )** Решенијата на квадратната равенка $18x^2-2=0$ се ______________________.

6. Б **(5)(   )** Дефиниционото множество на квадратната равенка $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x+2}{x-1}=1$ е_______.

7. В **(5)(   )** Ако едно решение на квадратната равенка $2x^2+3x-m=0$ е $-\frac{1}{2}$, тогаш вредноста на m е ______________.

8. Г **(5)(   )** По кратењето на дропката $\frac{x^2-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{6}}{x^2-\left(\sqrt{3}+1\right)x+\sqrt{3}}$ се добива________________.

Реши ги задачите:

9. А **(15)(   )** Дадена е квадратната равенка $x^2+x-42=0$.
а) Одреди ги коефициентите.
б) Замени ги коефициентите во формулата за решавање на квадратна равенка.
в) Одреди ги решенијата.

10. Б **(15)(   )** Одреди го параметарот $m\in\mathbb{R}$, така што решенијата на квадратната равенка $x^2+2x+m-1=0$ да бидат:
а) реални и различни б) реални и еднакви в) конјугирано комплексни

11. В **(15)(   )** Дадена е квадратната равенка $4-\frac{1}{x}=x-\frac{1}{4}$.
а) Одреди го дефиниционото множество D.
б) Ослободи се од именителите и трансформирај ја квадратната равенка во општ вид.
в) Одреди ги решенијата.

12. Г **(15)(   )** Докажи ја еквиваленцијата: $x^2+px+q=0\Leftrightarrow\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)=0$
а) директно; б) со контрапозиција.

Бодови (Оценка)	0-26 (1)	27-42 (2)	43-60 (3)	61-76 (4)	77-100 (5)

ТЕМА 5.

Равенки што се сведуваат на решавање квадратни равенки

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}\ ,\ D_1=[-1,\infty)\cup[1,\infty)$$

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}-\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)^2=0$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}}=0 \quad \text{или} \quad \sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}-1=0$$

$$D_2=[1,\infty)\ ,\ D=D_1\cap D_2=[1,\infty)$$

$$x^4+x^2+1-2x^3-2x^2+2x=0$$

$$x^2-x-1=0$$

$$x_1=1\in D \qquad x_{2,3}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\in D \qquad x_{4,5}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\notin D$$

Ниво А

Ученикот треба да знае дека...

НИВО: ПОМНЕЊЕ

- Равенката од видот $P(x)+\dfrac{1}{P(x)}=a$, со смената $P(x)=y$ се сведува на квадратна равенка

Пример 1: Равенката $x^2-3+\dfrac{1}{x^2-3}=5$ со смената $x^2-3=y$ се сведува на квадратна равенка $y+\dfrac{1}{y}=5$, т.е. $y^2-5y+1=0$.

- Равенката $\dfrac{P(x)}{Q(x)}+\dfrac{Q(x)}{P(x)}=c$, каде $P(x)$ и $Q(x)$ се полиноми со степени не поголеми од 2, а c е константа, со смената $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=y$, се сведува на претходниот тип.

Пример 2: Равенката $\dfrac{x^2+5x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2+5x}=\dfrac{37}{6}$ со смената $\dfrac{x^2+5x}{x+1}=y$ се сведува на равенката $y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{37}{6}$.

- Равенката од четврти степен со една променлива која содржи само степени со парни показатели се вика биквадратна равенка и е од обликот:

$$ax^4+bx^2+c=0 \quad (a\neq 0)$$

т.е. $a(x^2)^2+bx^2+c=0$, која е квадратна по x^2.

- Биквадратната равенка се решава со формулата:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\,,\ x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Пример 3: Решенијата на квадратната равенка $2x^4-6x^2+3=0$ се одредуваат од

формулата: $x_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{36-24}}{6}}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{36-24}}{6}}$.

За полиномот $P(x)=ax^4+bx^2+c$ важи трансформацијата:

$$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4),$$

каде x_1, x_2, x_3, x_4 се нули на полиномот.

Пример 4: Нулите на полиномот $P(x)=x^4-5x^2+4$ се $x_1=1, x_2=2, x_3=-1, x_4=-2$. Тогаш, $P(x)=(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)$.

Равенките кај кои непознатата се наоѓа барем еднаш под знакот на корен се викаат ирационални равенки.

Пример 5: Равенката $\sqrt{x-1}+2=5$ е ирационална равенка.

Равенката од видот $\sqrt{P(x)}=Q(x)$ е еквивалентна со системот:

$$P(x)\geq 0, Q(x)\geq 0, P(x)=Q^2(x)$$

Пример 6: Равенката $\sqrt{x-3}=7-x$ е еквивалентна со системот:

$$x-3\geq 0,\ 7-x\geq 0,\ x-3=(7-x)^2$$

При решавање на ирационална равенка најчесто го користиме следниот редослед:

1) одредуваме дефиниционо множество;
2) се ослободуваме од корените степенувајќи ја равенката потребен број пати;
3) ја решаваме добиената равенка;
4) проверуваме кои од решенијата припаѓаат на дефиниционото множество или
5) добиените решенија ги проверуваме во почетната равенка.

Равенката од видот $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, каде $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$ и $a\neq 0$ или $b\neq 0$ или $c\neq 0$ ја нарекуваме квадратна равенка со две непознати.

Пример 7: Равенката $x^2+y^2-2x+5y-11=0$ е квадратна равенка со две непознати.

Системот $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \\ px+qy+r=0 \end{cases}$, каде p,q и r се реални броеви, е систем од една квадратна и една линеарна равенка со две непознати.

Пример 8: Системот $\begin{cases} 2x^2+3xy+5y^2-4x+3y-7=0 \\ 2x-3y+4=0 \end{cases}$ е систем од една квадратна и една линеарна равенка со две непознати.

Подредениот пар (x_0, y_0) за кој двете равенки преминуваат во вистинити искази се вика решение на системот.

Пример 9: Подредениот пар $(1,1)$ е решение на системот равенки $\begin{cases} x^2 + y^2 - x + y = 2 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$

Систем равенки со две непознати се решава секогаш со замена на линеарната во квадратната равенка.

Пример 10: Системот равенки $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ се решава со замена $x = 3 + 2y$

од линеарната равенка во квадратната равенка и се добива $(3+2y)^2 + y^2 = 4$.

Ниво Б Ученикот покажува дека разбира...

НИВО: РАЗБИРАЊЕ

Равенкатата од видот $P(x)+\frac{1}{P(x)-c}=a$ со смената $P(x)=y$ се сведува на равенката $y+\frac{1}{y-c}=a$.

Со смената $P(x)-c=y$ се сведува на равенката $y+c+\frac{1}{y}=a$.

Со смената $P(x)-c=y+c_1$ се сведува на равенката $y+c+c_1+\frac{1}{y+c_1}=a$.

Пример 11: Равенката $x^2+4x-\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{44}{9}$,

со смената $x^2+4x=y$ се сведува на $y-\frac{1}{y+4}=\frac{44}{9}$;

со смената $x^2+4x+4=y$ се сведува на $y-4-\frac{1}{y}=\frac{44}{9}$;

со смената $x^2+4x+2014=y$ се сведува на $y-2014+\frac{1}{y-2000}=\frac{44}{9}$ итн.

Равенката $\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{Q(x)}{P(x)}=c$, претходно запишана како $\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{1}{\frac{P(x)}{Q(x)}}=c$ со смената $\frac{P(x)}{Q(x)}=y$ сведува на равенката $y+\frac{1}{y}=c$.

Исто така, равенката $\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{Q(x)}{P(x)}=c$ се множи со $\frac{P(x)}{Q(x)}$, па се добива

$$\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)^2+1=c\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Потоа со смената $\frac{P(x)}{Q(x)}=y$ се сведува на квадратната равенка $y^2+1=cy$.

Пример 12: Равенката $\frac{x^2+5x}{x+1}+\frac{x+1}{x^2+5x}=\frac{37}{6}$ ја множиме со $\frac{x^2+5x}{x+1}$ па добиваме $\left(\frac{x^2+5x}{x+1}\right)^2+1=\frac{37}{6}\cdot\frac{x^2+5x}{x+1}$. Со смената, $\frac{x^2+5x}{x+1}=y$ се добива квадратната равенка $y^2+1=\frac{37}{6}y$.

Нулите на биквадратната равенка $ax^4+bx^2+c=0$ може да се одредат со воведување на смената $x^2=y$. Се добива $ay^2+by+c=0$.

Пример 13: Решенијата на равенката $x^4-5x^2+4=0$ се одредуваат со користење на смената $x^2=y$. Со решавање на $y^2-5y+4=0$, добиваме $y_1=4, y_2=1$, од каде $x^2=4$, т.е. $x_1=2$, $x_2=-2$ и $x^2=1$, т.е. $x_3=1$, $x_4=-1$.

Даден е полиномот $P(x)=ax^4+bx^2+c$. Со смената $x^2=y$ добиваме квадратен трином $P(y)=ay^2+by+c$.

$P(y)=a(y-y_1)(y-y_2)$, т.е.

$P(x)=a(x^2-y_1)(x^2-y_2)$, односно

$P(x)=a(x-\sqrt{y_1})(x+\sqrt{y_1})(x-\sqrt{y_2})(x+\sqrt{y_2})$, ако $y_1,\ y_2>0$.

Пример 14: Полиномот $P(x)=x^4-13x^2+36$ трансформиран во производ е
$P(x)=(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$, бидејќи
после смената $x^2=y$, равенката се трансформира во $y^2-13y+36=0$, од каде $y_1=9, y_2=4$, т.е. $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=2$, $x_4=-2$.

Пример 15: Решението на ирационалната равенка $\sqrt{x-1}=2$, за $x-1\geq 0$, односно $x\geq 1$, т.е. $x\in[1,\infty)$, се добива од $x-1=2^2$, од каде $x=5$ и $5\in[1,\infty)$.

При решавањето на ирационална равенка треба да се прави проверка на решението, бидејќи некогаш е тешко наоѓањето на дефиниционо множество.

Пример 16: Реши ја ирационалната равенка $\sqrt{x^2+\sqrt{x^2-1}}=-x$ и провери го решението.

Имаме, $x^2-1\geq 0$; $x^2+\sqrt{x^2-1}\geq 0$; $-x\geq 0$.

Со степенување на равенката $\sqrt{x^2+\sqrt{x^2-1}}=-x$, имаме $x^2+\sqrt{x^2-1}=x^2$, т.е. $\sqrt{x^2-1}=0$, од каде $x_1=1, x_2=-1$.

Проверка за $x = -1$:

$$\sqrt{(-1)^2 + \sqrt{(-1)^2 - 1}} = -(-1)$$

$$\sqrt{1+0} = 1$$

$$1 = 1$$

$x = -1$ е решение

Проверка за $x = 1$:

$$\sqrt{1^2 + \sqrt{1^2 - 1}} = -1$$

$$\sqrt{1+0} = -1$$

$$1 = -1$$

$x = 1$ не е решение

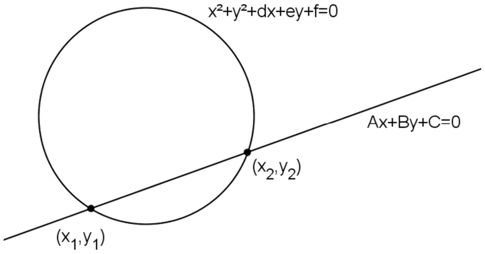
Пример 17: Ирационалната равенка $\sqrt{2-x} + \sqrt{x-3} = 2$ од условот $2 - x \geq 0$ и $x - 3 \geq 0$ има дефиниционо множество $D = \varnothing$, а тоа значи дека нема решение.

Понекогаш, при решавањето на ирационални равенки се воведува нова променлива.

Пример 18: Равенката $x^2 + x - 2\sqrt{x^2 + x} = 1$ со дефиниционо множество $D = (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$ и смена $x^2 + x = y^2$; $y \geq 0$ се сведува на квадратната равенка $y^2 - 2y = 1$.

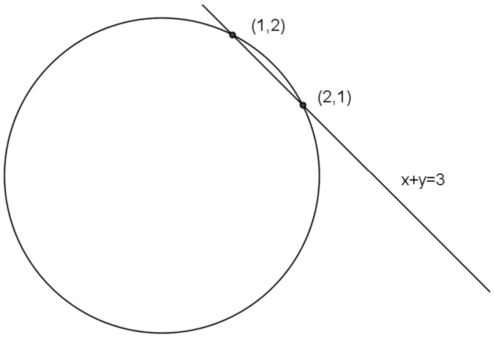
Равенка од втор степен со две променливи определува крива (кружница, елипса и др.) која во пресек со права може да има:

1) Две заеднички точки

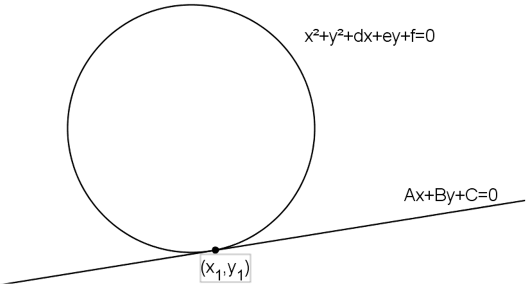


Значи, системот $\begin{cases} x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$ има две решенија $M = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$

Пример 19: Системот $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ има две решенија $M = \{(1,2), (2,1)\}$

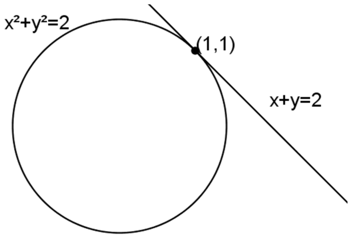


2) Една заедничка точка



Значи, системот $\begin{cases} x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$ има едно решение $M = \{(x_1, y_1)\}$

Пример 20: Системот $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ има едно решение $M = \{(1,1)\}$



Пример 21: Системот $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}$ го решаваме со замената $x = 5 - y$ во квадратната равенка и добиваме:

$$(5 - y)^2 + y^2 = 15$$

$$25 - 10y + y^2 + y^2 = 13$$

$$2y^2 - 10y + 12 = 0$$

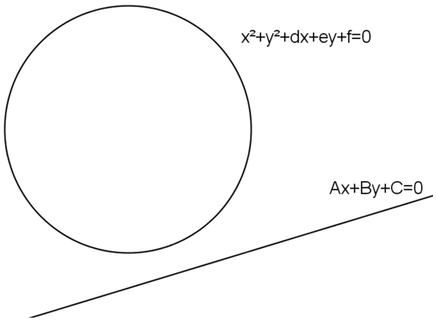
$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

$$y_1 = 3 \qquad x_1 = 2$$

$$y_2 = 2 \qquad x_2 = 3$$

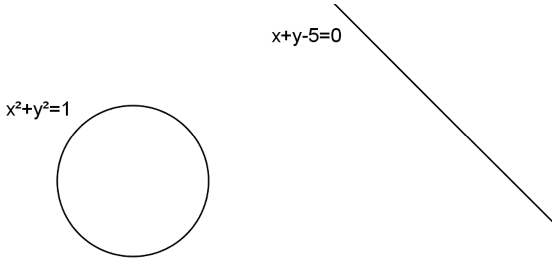
Значи, подредените парови $(2,3)$ и $(3,2)$ се решенија на системот, т.е. $M = \{(2,3), (3,2)\}$ е решение на системот.

3) Нема заеднички точки



Значи, системот $\begin{cases} x^2+y^2+dx+ey+f=0 \\ Ax+By+C=0 \end{cases}$ нема решение

Пример 22: Системот $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=5 \end{cases}$ нема решение, $M=\varnothing$.



ЗАДАЧИ ОД НИВО **А** И НИВО **Б**

1. Равенката $\frac{2}{x-1}+x-1=4$, $x\neq 1$ со смената ___________ се сведува на ___________.

2. Определи која од следните равенки е биквадратна:

а) $x^4+x^3+x^2+x+1=0$; б) $x^4+x^2+4=0$; в) $x^4+x+2=0$

г) $x^4+x^2+x=0$; д) друг одговор

3. Кој од броевите е едно решение на биквадратната равенка $x^4-3x^2+2=0$:

а) 1 б) 0 в) 2 г) -3 д) друг одговор

4. Ако броевите $\pm 3, \pm 5$ се нули на полиномот $P(x)=ax^4+bx^2+c$, тогаш полиномот запишан во производ е: $P(x)=$ ____.

5. Запиши барем една смена со која равенката $x^2+3x-7+\frac{3}{x^2+3x+7}=1$ се сведува на квадратна. $y=$ ______________________.

6. Решенија на биквадратната равенка $x^4+3x^2-4=0$ се____________________.

7. Определи која од квадратните равенки е ирационална:

а) $\sqrt{2}+x=x\sqrt{3}$ б) $\sqrt{x^2}-2\sqrt{2^2}-4=0$ в) $2-\sqrt{x}=7x$

г) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x=\sqrt{5}$ д) друг одговор

8. Одговори која од вредностите е решение на равенката $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=1$:

а) 1 б) 6 в) -2 г) 0 д) друг одговор

9. Дефиниционо множество на равенката $\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[5]{x+2}=7$ е $D=$_______.

10. Дефиниционо множество на равенката $\sqrt[3]{x-2}-\sqrt{x-2}=3$ е $D=$_______.

11. Бројот на решенија на равенката $\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}+\sqrt{x-4}=3$ е:

а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) друг одговор

12. Бројот на степенувања со кои може да се реши равенката $\sqrt{x} = 3 - \sqrt{x+1}$

е____________.

13. Ирационалната равенка $x - \sqrt{x} - 6 = 0$ може да се реши без степенување, со користење на смената ______________________.

14. Равенката $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ е равенка од __________________, со

_____ непознати, а равенката $px + qy = r$ е __________________ равенка со ________

непознати.

15. Множеството $M_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9\}$ е множество од _______________________ за кои исказната функција со две променливи преминува во ___________________ исказ.

16. Множеството $M_2 = \{(x, y) \mid x + y - 7 = 0\}$ е множество од _______________________ за кои исказната функција со две променливи преминува во ___________________ исказ.

17. Множеството $M = M_1 \cap M_2$ (од зад. 15 и зад.16)е множество решенија на системот _______________.

Реши ги биквадратните равенки:

18. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

19. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

Реши ги ирационалните равенки:

20. $\sqrt{x-2} - 4 = 0$

21. $\sqrt[3]{2-x} - 1 = 0$

Реши ги системите равенки:

22. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x + y = 7 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ x - y = 3 \end{cases}$

24. Состави биквадратна равенка така што збирот на плоштината на квадратот со страна x и неговата реципрочната вредност е 2.

25. Запиши равенка според следниот текст: „Разликата од корените на два последователни природни броеви деливи со 3 е 1“.

26. Одреди ги пресечните точки на кривата $x^2 + y^2 = 13$ и правата $x + y = 5$.

Ниво В

Ученикот треба да го примени своето знаење и разбирање

НИВО: ПРИМЕНА

Равенките може да ги решаваме и во множеството на комплексни броеви.

Пример 23: Реши ја равенката од четврти степен $3x^2-7x-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}=0$.

По групирањето добиваме: $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$ за $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Од смената $x+\frac{1}{x}=y$ определуваме $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ и добиваме:

$$3(y^2-2)-7y=0$$

$$3y^2-7y-6=0$$

$$y_1=3,\ y_2=-\frac{2}{3}.$$

Од $x+\frac{1}{x}=3$ се добива $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, а од $x+\frac{1}{x}=-\frac{2}{3}$ се добива $x_{3,4}=\frac{-1\pm 2i\sqrt{2}}{2}$.

Пример 24: Реши ја биквадратната равенка $x^4+8x^2-9=0$:
а) со формула; б) со смена.

а) $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ $\qquad$ $x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-8-\sqrt{100}}{2}}$ $\qquad$ $x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{-8+\sqrt{100}}{2}}$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{-9}$ $\qquad$ $x_{3,4}=\pm\sqrt{1}$

$x_{1,2}=\pm 3i$ $\qquad$ $x_{3,4}=\pm 1$

б) Од $x^2=y$, т.е. $x^4=y^2$, добиваме:

$y_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{100}}{2}$, т.е. $y_1=-9$, $y_2=1$ од каде $x_{1,2}=\pm 3i$, $x_{3,4}=\pm 1$

Трансформацијата на полиномот $P(x)=ax^4+bx^2+c$ во производ, т.е $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$ се користи за скратување на дропки.

Пример 25: Од дропката $\frac{a^4-16}{a^4-13a^2+36}$, по разложувањето се добива дропката $\frac{(a-2)(a+2)(a-2i)(a+2i)}{(a-2)(a+2)(a-3)(a+3)}$, од каде по кратењето се добива $\frac{a^2+4}{a^2-9}$, за $a \neq \pm 2$.

Често пати при решавање на ирационални равенки се користат нови променливи.

Пример 26: Равенката $x^2-x+\sqrt{x^2-x+9}=3$ со смената $x^2-x+9=y^2$ за $y \geq 0$ се трансформира во квадратната равенка $y^2+y-12=0$, чии решенија се:
$y_1=-4$ (не одговара, бидејќи треба $y \geq 0$) $y_2=3$

За $y=3$ важи $x^2-x+9=9$

$$x^2-x=0$$

$x(x-1)=0$, т.е. $x_1=0, x_2=1$

Проверка: $0^2-0+\sqrt{0^2-0+9}=3$, т.е. $3=3$

$1^2-1+\sqrt{1^2-1+9}=3$, т.е. $3=3$

Некои ирационални равенки се решаваат со две степенувања.

Пример 27: Равенката $\sqrt[3]{4+x}+\sqrt[3]{4-x}=2$, $D=\mathbb{R}$ ја степенуваме на трети степен и добиваме:

$$4+x+4-x+3\sqrt[3]{4+x}\sqrt[3]{4-x}\left(\sqrt[3]{4+x}+\sqrt[3]{4-x}\right)=8,$$

т.е. $\sqrt[3]{4+x}\sqrt[3]{4-x}=0$, од каде $x_1=4$, $x_2=-4$.

Пример 28: Системот равенки $\begin{cases} x^2-y^2=16 \\ x-y=2 \end{cases}$ се решава со замена на втората равенка $x=2+y$ во првата.

$(2+y)^2-y^2=16$ т.е. $4+4y+4^2-y^2=16$, од каде $y=3$, а $x=5$.

Значи, $M=\{(5,3)\}$.

Пример 29: Системот равенки $\begin{cases} \dfrac{x^2+y+1}{y^2+x+1}=\dfrac{3}{2} \\ x-y=1 \end{cases}$ после замената $x=1+y$ се трансформира во $\dfrac{(1+y)^2+y+1}{y^2+1+y+1}=\dfrac{3}{2}$, т.е. $\dfrac{y^2+3y+2}{y^2+y+2}=\dfrac{3}{2}$, односно во равенката $y^2-3y+2=0$, од каде $y_1=1$, $y_2=2$, а $x_1=2$, $x_2=3$.

Значи, $M=\{(2,1),(3,2)\}$.

Квадратната равенка $ax^2+bxy+cy^2=0$ се вика хомогена квадратна равенка. По делењето со y^2 за $y\neq 0$ се добива $a\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+b\left(\dfrac{x}{y}\right)+c=0$, а со смената $\dfrac{x}{y}=z$ се добива квадратна равенка по непознатата z.

Пример 30: Системот равенки $\begin{cases} 4x^2+2xy+6x=27 \\ x^2-5xy+6y^2=0 \end{cases}$ е систем од две квадратни равенки од кои втората е хомогена. За $y\neq 0$ хомогената равенка со смената $\dfrac{x}{y}=z$ се трансформира во $z^2-5z+6=0$, која има решенија $z_1=2$, $z_2=3$.

Ги добивме системите: $\begin{cases} 4x^2+2xy+6x=27 \\ \dfrac{x}{y}=2 \end{cases} \vee \begin{cases} 4x^2+2xy+6x=27 \\ \dfrac{x}{y}=3 \end{cases}$.

Решенијата се: $\left\{\left(\dfrac{9}{5},\dfrac{9}{10}\right);\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right);\left(\dfrac{-9\pm 9\sqrt{15}}{14},\dfrac{-3\pm 3\sqrt{15}}{14}\right)\right\}$.

При решавањето на текстуални задачи можеме да постапиме по следниот редослед:

1) се означуваат непознатите (една, две или три);
2) се формираат равенки меѓу непознатите спрема дадените услови;
3) се решаваат равенките;
4) се проверуваат добиените решенија дали ги задоволуваат дадените услови.

Пример 31: Две цевки полнат базен за $1\frac{7}{8}$ часа, а првата цевка може сама да го наполни базенот за два часа побрзо од втората. За кое време секоја цевка сама ќе го наполни истиот базен?

Согледај го решението: Нека за $x\ (x>0)$ часови базенот го полни првата. Тогаш, втората цевка би го наполнила за $x+2$ часа.

Значи, $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)\cdot 1\frac{7}{8}=1$, т.е. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{8}{15}$ за $x\in\mathbb{R}^{+}$.

Ја добиваме квадратната равенка $4x^2-7x-15=0$, т.е. $x_1=3$, $x_2=-\frac{5}{2}\notin\mathbb{R}^{+}$.

Значи, едната цевка сама може да го полни празниот базен за 3 часа, а другата за 5 часа.

Пример 32: Површината на правоаголник е 60 cm^2, а дијагоналата е 13 cm. Одреди ги страните на правоаголникот.

Согледај го решението: Нека должината е $x\ (x>0)$, тогаш ширината е $\frac{60}{x}$.

Од Питагоровата теорема, имаме: $x^2+\left(\frac{60}{x}\right)^2=13^2$, т.е. $x^4-169x^2+3600=0$ е биквадратна равенка. Нека $x^2=y\ \ (y>0)$, добиваме:

$$y^2-169y+3600=0$$
$$y_1=144 \qquad y_2=25$$
$$\text{т.е.}\ \ x_1=12 \qquad x_2=5$$

Значи, страните на правоаголникот се 12 cm и 5 cm.

Пример 33: Два многуаголника имаат вкупно 20 страни и 95 дијагонали. Колку страни има секој од тие многуаголници?

Согледај го решението: Нека x и y $(x>0, y>0)$, се бројот на страните на многуаголниците.

Тогаш го формираме системот $\begin{cases}\frac{x(x-3)}{2}+\frac{y(y-3)}{2}=95\\ x+y=20\end{cases}$, т.е. $\begin{cases}x^2+y^2-3x-3y=190\\ x+y=20\end{cases}$

со решение $x=15$, $y=5$.

Значи, многуаголниците се 15-аголник и 5-аголник.

Ниво Г

Ученикот треба да користи логичко следство

НИВО: АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ

Реши ја равенката $\frac{21}{x^2-4x+10}-\left(x^2-4x+6\right)=0$ во множеството на комплексните броеви со најмалку две смени, а потоа оцени ги смените.

Согледај го решението: Од $x^2-4x+10\neq 0$, имаме $D=\mathbb{C}\setminus\left\{2-i\sqrt{2},2+i\sqrt{2}\right\}$.

1) Воведуваме нова непозната $x^2-4x=y$, значи

$$\frac{21}{y+10}-y-6=0\,,\ D=\mathbb{R}\setminus\left\{-10\right\}$$

Добиваме квадратна равенка $y^2-16y+39=9$ чии решенија се $y_1=-3$, $y_2=-13$.
За $y=-3$ ја добиваме равенката $x^2-4x+3=0$ чии решенија се $x_1=1, x_2=3$, а
за $y=-13$ ја добиваме равенката $x^2-4x+13=0$ чии решенија се $x_{3,4}=2\pm 3i$.

2) Воведуваме нова непозната $x^2-4x+10=y$, значи

$$\frac{21}{y}-y+4=0\quad,\ D=\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$$

Добиваме квадратна равенка $y^2-4y-21=0$ чии решенија се $y_1=7$, $y_2=-3$.
За $y=7$ ја добиваме равенката $x^2-4x+3=0$ чии решенија се $x_1=1, x_2=3$, а
за $y=-3$ ја добиваме равенката $x^2-4x+13=0$ чии решенија се $x_{3,4}=2\pm 3i$.

За различни смени се добиваат различни квадратни равенки по y, а по замената на вредностите на y_1 и y_2 се добиваат исти квадратни равенки по x. Значи, различните смени немаат значајни предности.

Нека е дадена биквадратната равенка $ax^4+bx^2+c=0$ и нека x_1, x_2, x_3 и x_4 се решенија на таа равенка. Докажи дека $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ и $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=\frac{c}{a}$.

Доказ: Воведуваме смена $x^2=y$ и добиваме квадратна равенка $ay^2+by+c=0$ со решенија y_1 и y_2. Тогаш, $x_1=\sqrt{y_1}, x_2=-\sqrt{y_1}, x_3=\sqrt{y_2}, x_4=-\sqrt{y_2}$.

Значи, $x_1+x_2+x_3+x_4=\sqrt{y_1}-\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}-\sqrt{y_2}=0$,

$$x_1x_2x_3x_4=\sqrt{y_1}\left(-\sqrt{y_1}\right)\sqrt{y_2}\left(-\sqrt{y_2}\right)=y_1y_2=\frac{c}{a}.$$

Пример 34: Биквадратната равенка $x^4-\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)x^2+1=0$ со смената $x^2=y$ се сведува на квадратната равенка $y^2-\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)y+1=0$ која има решенија

$y_1=a^2$, $y_2=\frac{1}{a^2}$.

Множеството решенија е $M=\left\{a,-a,\frac{1}{a},-\frac{1}{a}\right\}$.

Пример 35 Равенката од четврти степен $x(x-1)(x-2)(x-3)=1680$ после множењето на првиот со четвртиот и вториот со третиот множител се трансформира во равенката $(x^2-3x)(x^2-3x+2)=1680$.

Со смената $x^2-3x=y$ се добива квадратната равенка $y^2+2y-1680=0$ чии решенија се $y_1=40$, $y_2=-42$.

Множеството решенија е $M=\left\{-5,8,\frac{3\pm i\sqrt{159}}{2}\right\}$.

Равенствата $f(x)=g(x)$ и $f^2(x)=g^2(x)$ не се еквивалентни. Равенството $f(x)=g(x)$ е еквивалентно со конјункцијата $f^2(x)=g^2(x)$ и $f(x)\cdot g(x)\geq 0$.

Пример 36 : Да се реши ирационалната равенка $x^2+x-2\sqrt{x^2+x}=0$ со:

1) степенување;
2) воведување на нова променлива.

1) Дадената равенка ја трансформираме во $-2\sqrt{x^2+x}=-(x^2+x)$. Дефиниционото множество го бараме од $x^2+x\geq 0$, т.е. $D=(-\infty,-1]\cup[0,\infty)$.

Ако $f(x)=2\sqrt{x^2+x}$ и $g(x)=x^2+x$ може да степенуваме и добиваме:

$$4(x^2+x)=(x^2+x)^2 \text{ т.е.}$$

$$x^4+2x^3-3x^2-4x=0$$

$$x(x^3+2x^2-3x-4)=0$$

$x_1=0$, а со проба $x_2=-1$

За да ги најдеме другите решенија ќе поделиме:

$$\begin{array}{l}
(x^3+2x^2-3x-4):(x+1)=x^2+x-4\\
\underline{-x^3\pm x^2}\\
\qquad x^2-3x-4\\
\qquad \underline{\pm x^2\pm x}\\
\qquad\qquad -4x-4\\
\qquad\qquad \underline{\mp 4x\mp x}\\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Значи, $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$ $\qquad x_1,x_2,x_3,x_4\in D$

2) Ако воведеме смена $x^2+x=y^2$, добиваме $y^2-2y=0$ за $y\ge 0$, па $y_1=0$, $y_2=2$.

Од $x^2+x=0$ добиваме $x_1=0$, $x_2=-1$, а од $x^2+x=4$ добиваме $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Пример 37: Реши ја ирационалната равенка $\sqrt[3]{2+x}+\sqrt[3]{2-x}=1$ и изврши проверка.

Согледај го решението: $D=\mathbb{R}$ и по степенувањето, добиваме:

$2+x+3\sqrt[3]{2+x}\sqrt[3]{2-x}\left(\sqrt[3]{2+x}+\sqrt[3]{2-x}\right)+2-x=1$, т.е.

$\sqrt[3]{2+x}\sqrt[3]{2-x}=-1$, а со повторно степенување се добива $x^2=5$, т.е.

$x_1=\sqrt{5}, x_2=-\sqrt{5}.$

Проверка:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\frac{16+8\sqrt{5}}{8}}+\sqrt[3]{\frac{16-8\sqrt{5}}{8}}=\frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{5}\right)^3}}{2}+\frac{\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{5}\right)^3}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1$$

Пример 38: Реши ја ирационалната равенка $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}$,

$D_1=[-1,\infty)\cup[1,\infty)$ со соодветна трансформација.

Запишуваме, $\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}-\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)^2=0$

т.е. $\sqrt{\frac{x-1}{x}}\left(\sqrt{x+1}-1-\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)=0$, од каде

$\sqrt{\frac{x-1}{x}}=0$ или $\sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}-1=0$

$x_1=1\in D$ $\sqrt{x(x+1)}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x}$ / ² за $x>0$

$D_2=[1,\infty)$, па $D=D_1\cap D_2=[1,\infty)$

$$x(x+1)-2\sqrt{x\left(x^2-1\right)}+x-1=x$$

$$x(x+1)-1=2\sqrt{x\left(x^2-1\right)}$$ / ( )²

$$x^2(x+1)^2-2x(x+1)+1=4x\left(x^2-1\right)$$

$$x^4+2x^3+x^2-2x^2-2x+1=4x^3-4x$$

$$x^4+x^2+1-2x^3-2x^2+2x=0$$

$$\left(x^2-x-1\right)^2=0$$

$x^2-x-1=0$ т.е. $x_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\in D$, $x_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\notin D$

Системот $\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1 \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=d_2 \end{cases}$ од две квадратни равенки со две непознати може да се сведе на решавање на два системи со две непознати и тоа од една линеарна и една квадратна равенка.

Добиваме, $\begin{cases} a_1d_2x^2+b_1d_2xy+c_1d_2y^2=d_1d_2 \\ -a_2d_1x^2-b_2d_1xy-c_2d_1y^2=-d_1d_2 \end{cases}$

Значи, $(a_1d_2-a_2d_1)x^2+(b_1d_2-b_2d_1)xy+(c_1d_2-c_2d_1)y^2=0$ е хомогена која за $y\neq 0$ со смената $\frac{x}{y}=z$ се сведува на квадратната равенка:

$$(a_1d_2-a_2d_1)z^2+(b_1d_2-b_2d_1)z+c_1d_2-c_2d_1=0$$

Пример 39: Системот $\begin{cases} 2x^2-3xy+2y^2=4 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$ е систем од две квадратни равенки со две непознати. Ако првата равенка ја помножиме со 7, а втората со -4 и ги собереме помножените равенки, се добива:

$10x^2-25xy+10y^2=0$, т.е.

$2x^2-5xy+2y^2=0$ која со смената $\frac{x}{y}=z$, за $y\neq 0$ се сведува на $2z^2-5z+2=0$ чии решенија се $z_1=2$, $z_2=\frac{1}{2}$.

Се добиваат системите:

$\begin{cases} 2x^2-3xy+2y^2=4 \\ \frac{x}{y}=2 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 2x^2-3xy+2y^2=4 \\ \frac{x}{y}=\frac{1}{2} \end{cases}$

чии решенија се: $M_1=\{(\pm 2,\pm 1)\}$, $M_2=\{(\pm 1,\pm 2)\}$, а множеството решенија е: $M=\{(\pm 2,\pm 1),(\pm 1,\pm 2)\}$.

Пример 40: Даден е системот $\begin{cases} x^2+y^2=12 \\ y=ax+4 \end{cases}$ од една квадратна и една линеарна равенка, каде $a\in\mathbb{R}$ е параметар. Вредноста на параметарот a т.ш.

1) системот има едно решение

2) системот има две решенија

3) системот има три решенија,

изнесува:

1) $x^2+(ax+y)^2=12$, т.е. $(1+a^2)x^2+8ax+4=0$

Од $D=0$ имаме $3a^2-1=0$ т.е. $a_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $a_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Графички значи дека правата ја допира кружницата.

2) $a \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$

Графички значи дека правата ја сече кружницата.

3) $a \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Графички значи дека правата и кружницата немаат заеднички точки.

ЗАДАЧИ ОД НИВО **В** И НИВО **Г**

Реши ги равенките во множеството на комплексните броеви:

1. $2x^2 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 16$ 2. $-2x^2 + 7x + \frac{7}{x} - \frac{2}{x^2} = 9$ 3. $6\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 24 = 0$

Реши ги квадратните равенки со користење на соодветна смена:

4. $\frac{x^2 + x - 2}{x} + \frac{x}{x^2 + x - 2} = 2$ 5. $\frac{x^2 + 3x}{x} - \frac{8x}{x^2 + 3x} = 2$ 6. $\frac{6}{x^2 + 3x + 2} + \frac{8}{x^2 + 3x - 4} = 1$

7. Реши ја равенката: $\left(\frac{2x^2 - 1}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{2x^2 - 1}{x}\right) + 3 = 0$

8. Реши ја равенката: $x^4 - \left(m^6 + \frac{1}{m^6}\right)x^2 + 1 = 0$

9. Дадена е равенката $x^4 - \left(m^{2014} + \frac{1}{m^{2014}}\right)x^2 + 1 = 0$. Докажи дека важи релацијата $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1x_2x_3x_4 - 1 = 0$.

10. Скрати ја дропката $\frac{3m^5 - 5m^3 + 2m}{3m^4 - 11m^2 + 6}$.

11. Состави равенка од четврти степен чии решенија се: а) $\pm 2, \pm 3$ б) $\pm 2i, \pm 3i$

12. Реши ја равенката: $x(x+1)(x+2)(x+3) = 0{,}5625$

Реши ги ирационалните равенки:

13. $\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7$ 14. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=\sqrt{x+24}$ 15. $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$

Реши ги системите равенки:

16. $\begin{cases} x+y=5a \\ xy=6a^2 \end{cases}$ 17. $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{5m^2}{4} \\ xy=\dfrac{m^2}{2} \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ 3x^2+4xy+3y^2=10 \end{cases}$

19. Двајца работници треба да завршат некоја работа. Ако работат заедно, ќе ја завршат работата за 12 дена. За завршување на таа работа на еден од нив му е потребно 10 дена повеќе отколку на другиот. За колку време секој од нив би ја завржил работата?

20. Кракот на рамнокракиот триаголник е 20, а површината е 192. Одреди ја основата на триаголникот.

21. Одреди ја вредноста на параметарот $a\in\mathbb{R}$ за кој системот $\begin{cases} x^2+ay^2=3a^2 \\ x+y=3 \end{cases}$ има:

а) едно решение; б) две решенија; в) нема решение.

22. Нека е дадена кружница со центар $C(0,0)$ и радиус r. Нека $M(x,y)$ е точка од кружницата, тогаш покажи дека од Талесовата теорема и Питагоровата теорема се добива равенката $x^2+y^2=r^2$.

23.Одреди ги заедничките точки на кружниците $(x-1)^2+y^2=8$ и $x^2+y^2=13$

Реши ги ирационалните равенки:

24. $\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x-4}=2$ 25. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$ 26. $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$

27. $\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x-3}=\sqrt[3]{6}$ 28. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}=1$

ПИСМЕНА РАБОТА 5

Задачи со заокружување:

1. А **(5)(   )** Определи која од наведените равенки е биквадратна:

А) $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ Б) $x^2+\frac{1}{x^2}=1$ В) $x^2+\frac{1}{x}=1$

Г) $x^4+x^2+x+1=0$ Д) друг одговор

2. Б **(5)(   )** Определи кој од подредените парови е решение на системот $\begin{cases} x^2-y^2-x+y=2 \\ 2x+y+1=0 \end{cases}$.

А) $(-2,2)$ Б) $(0,2)$ В) $(-1,1)$ Г) $(1,-1)$ Д) Друг одговор

3. В **(5)(   )** Ако смената е $x-\frac{1}{x}=y$, тогаш $x^2+\frac{1}{x^2}$ се запишува со:

А) y^2+2 Б) y^2-2 В) y^2 Г) $-y^2$ Д) Друг одговор

4. Г **(5)(   )** Нека е дадена равенката $x^4-4x^2+1=0$ со решенија x_1,x_2,x_3,x_4. Тогаш збирот $\frac{1}{x_1x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_2x_4}+\frac{1}{x_1x_3x_4}+\frac{1}{x_2x_3x_4}$ е еднаков со:

А) 1 Б) -4 В) 4 Г) -1 Д) Друг одговор

Задачи со дополнување:

5. А **(5)(   )** Равенката $\sqrt{x-5}=11-x$ е еквивалентна со системот неравенки _________ _________________________________и равенката__________________________________.

6. Б **(5)(   )** Системот од една квадратна и една линеарна равенка може да има најмногу _________ решенија, а најмалку ____________решенија.

7. В **(5)(   )** Површината на правоаголникот е 120 cm^2 ,а дијагоналата е 17 cm, тогаш поголемата страна е 15 cm, а помалата страна е _________.

8. Г **(5)(   )** Кривата $x^2+y^2=a^2$ е кружница со радиус a, а $y=x^2+b$ е парабола. Скицирај за кривите да имаат:

три заеднички точки_____________ , една заедничка точка_________________.

Задачи со целосна постапка:

9. А **(15)(   )** а)Одреди ја квадратната равенка која се добива од равенката $x^2+\frac{2}{x^2}=3$ со смената $x^2=y$.

б) Одреди ја квадратната равенка која се добива од равенката $x-1+\sqrt{x-1}=3$, за $x>1$ со смената $x-1=y^2$.

в) Одреди го системот равенки кој се добива од системот $\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x-y+1=0 \end{cases}$ со смената $x=y=1$.

10. Б **(15)( )** Реши ги равенките: а) $x^4-5x^2+4=0$ б) $5-\sqrt{x-2}=2$ в) $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=2 \end{cases}$

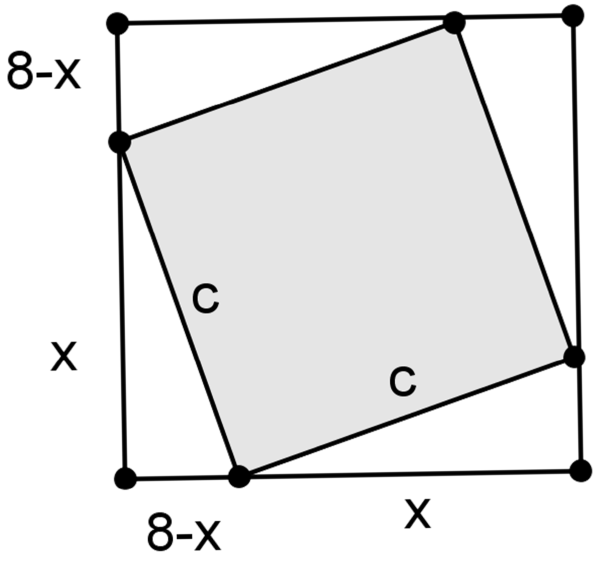
11. В **(15)( )**Реши ја ирационалната равенка $\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}=\sqrt{2x-8}$.

12. Г **(15)( )** При решавање на равенката од видот: $ax^2-bx-\frac{b}{x}-\frac{a}{x^2}=0$ сведуваме на $a\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)-b\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$. Ако смената е $x+\frac{1}{x}=y$, тогаш докажи дека $x^2-\frac{1}{x^2}$ може да се замени со $y\sqrt{y^2-4}$.

Бодови (Оценка)	0-26 (1)	27-42 (2)	43-60 (3)	61-76 (4)	77-100 (5)

ТЕМА 6.

Квадратна функција и квадратна неравенка



Ниво А

Ученикот треба да знае дека...

НИВО: ПОМНЕЊЕ

Квадратната функција аналитички се претставува со: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0.$

Пример 1: $y = f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ е квадратна функција.

Множеството D_f од вредностите $x \in \mathbb{R}$ се вика домен или дефинициона област, а множеството V_f од вредностите на функцијата $f(x)$ се вика множество од вредности на f, при што или $V_f = \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ за $a < 0$ или $V_f = \left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ за $a > 0.$

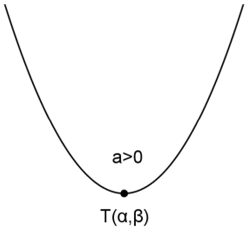
Притоа важи, $V_f \subset \mathbb{R}.$

Пример 2: Квадратна функција дадена со $y = 2x^2 - 4x + 3$ има домен $D_f = \mathbb{R}$, кодомен $\mathbb{R}$ и $V_f = [1, \infty)$, $V_f \subset \mathbb{R}.$

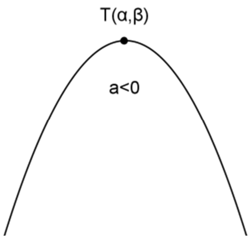
Множеството $\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = ax^2 + bx + c \wedge a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ е график на функцијата.

Пример 3: Множеството $\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = 2x^2 - 4x + 3\}$ е график на функцијата f претставена со $y = f(x) = 2x^2 - 4x + 3.$

Графикот на квадратната функција претставена во xOy - рамнината е парабола, и тоа:



со темето долу

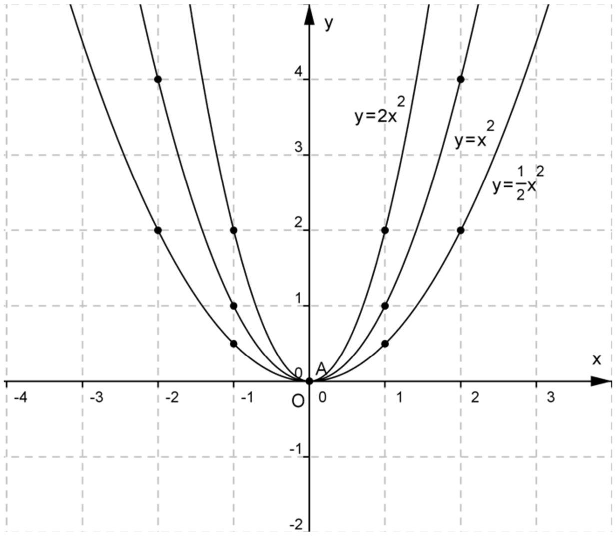


со темето горе

Улогата на коефициентот a е во промената на стрмоста на параболата.

Пример 4: Во ист координатен систем функциите $y = x^2; y = 2x^2; y = \frac{1}{2}x^2$ ги претставуваме на следниот начин:

x	0	± 1	± 2
x^2	0	1	4
$2x^2$	0	2	8
$\frac{1}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}$	2

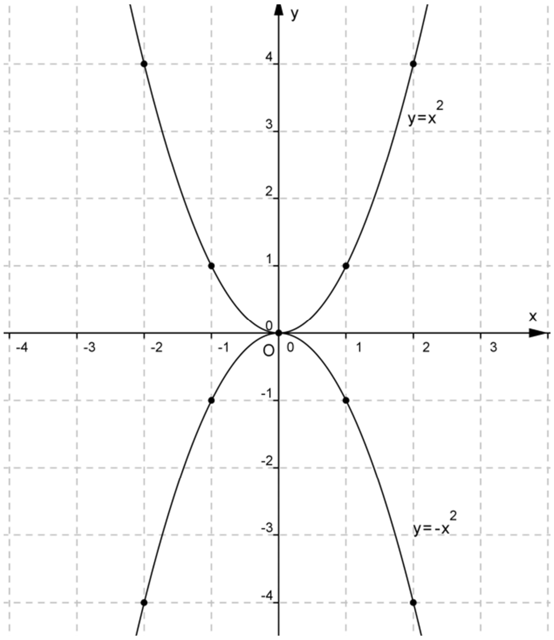


Улогата на коефициентот a е и во свртеноста на параболата:

1) ако $a > 0$, параболата е свртена со темето долу.
2) ако $a < 0$, параболата е свртена со темето горе.

Пример 5: Во ист координатен систем функциите $y = x^2$ и $y = -x^2$ ги претставуваме на следниот начин:

x	0	± 1	± 2
x^2	0	1	4
$-x^2$	0	-1	-4



Третата улога на коефициентот a и улогата на коефициентите b и c е во темето на параболата, т.е. $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ е каноничен вид на квадратна функција, при што $\alpha=-\frac{b}{2a}$, $\beta=\frac{4ac-b^2}{4a}$ се координати на темето $T(\alpha,\beta)$ на параболата, кое претставува: минимум, за $a>0$ и максимум, за $a<0$.

Пример 6: Темето на параболата $y=2x^2-4x+3$ има координати $\alpha=-\frac{-4}{2\cdot2}=1$, $\beta=\frac{4\cdot2\cdot3-(-4)^2}{4\cdot2}=1$, т.е. $T(1,1)$ и претставува минимум.

Графикот на функцијата $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ се добива со транслација на графикот на функцијата $y=ax^2$, и тоа:

1) $\alpha>0,\beta>0$ десно по $x-$оската за α единици и нагоре по $y-$оската за β единици

Пример 7: $y=2(x-3)^2+4$

2) $\alpha>0,\beta<0$ десно по $x-$оската за α единици и надолу по $y-$оската за $|\beta|$ единици

Пример 8: $y=2(x-3)^2-4$

3) $\alpha<0,\beta>0$ лево по $x-$оската за $|\alpha|$ единици и нагоре по $y-$оската за β единици

Пример 9: $y=2(x+3)^2+4$

4) $\alpha<0,\beta<0$ лево по $x-$оската за $|\alpha|$ единици и надолу по $y-$оската за $|\beta|$ единици

Пример 10: $y=2(x+3)^2-4$

При скицирање на графикот и испитувањето на текот на квадратната функција ќе работиме по следниот редослед:

1) Одредуваме дефиниционо множество D_f, $D_f = \mathbb{R}$

2) Одредуваме пресечни точки со координатните оски:

а) пресек со $x-$оската (нули на f), т.е. за $y=0$, $ax^2+bx+c=0$;
б) пресек со $y-$оската т.е. за $x=0$, $y=c$.

3) Одредуваме теме $T(\alpha,\beta)$ на параболата, т.е. $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$, $\beta=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

4) Скицираме график.

5) Одредуваме множество вредности на f , т.е. одредуваме на V_f .
$V_f=(-\infty,\beta]$ при $a<0$;$V_f=[\beta,\infty)$ при $a>0$.

6) Одредуваме оска на симетрија $x=\alpha$.

7) Одредуваме интервали на растење и опаѓање на функцијата

8) Одредуваме знак на функцијата

Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. За функцијата f велиме дека:

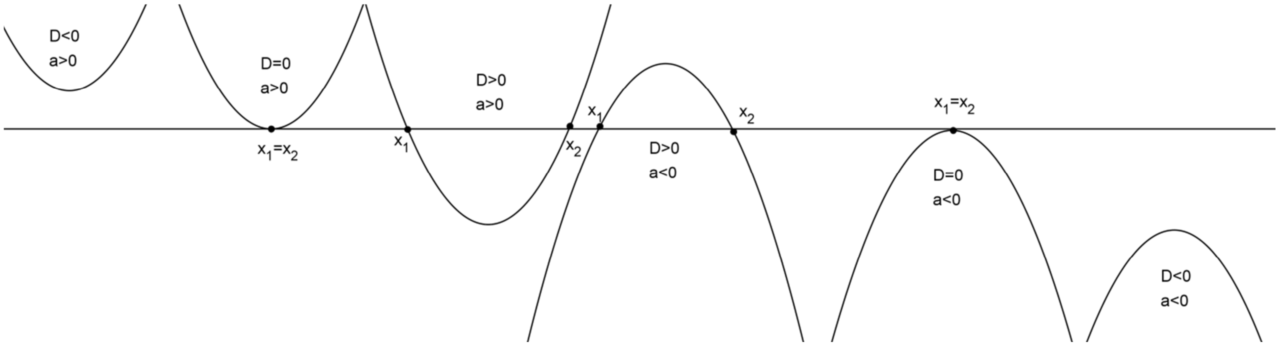
1) монотоно расте на интервалот (a,b), ако од $x_1<x_2$ следува $f(x_1)<f(x_2)$, за секои $x_1,x_2\in(a,b)$.

2) монотоно опаѓа на интервалот (a,b), ако од $x_1<x_2$ следува $f(x_1)>f(x_2)$, за секои $x_1,x_2\in(a,b)$.

Пример 11: Функцијата $f(x)=3x+5$ монотоно расте во $\mathbb{R}$, бидејќи за $x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=3x_2+5-3x_1-5=3(x_2-x_1)>0$, т.е. $f(x_2)>f(x_1)$.

Функцијата $f(x)=-2x+7$ монотоно опаѓа во $\mathbb{R}$, бидејќи за $x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=-2x_2+7+2x_1-7=-2(x_2-x_1)<0$, т.е. $f(x_2)<f(x_1)$.

За знакот на квадратната функција важат следните скици:



1) Ако $D<0, a>0$ функцијата е позитивна за секој $x \in D_f$, т.е. квадратниот трином не менува знак; $ax^2+bx+c>0$, за секој $x \in \mathbb{R}$.

2) Ако $D=0, a>0$ функцијата $f(x) \geq 0$ за секој $x \in D_f$, т.е. квадратниот трином $ax^2+bx+c \geq 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$.

3) Ако $D>0, a>0$ функцијата менува знак, односно:

$f(x)>0$ за $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$

$f(x)=0$ за $x=x_1, x=x_2$

$f(x)<0$ за $x \in (x_1, x_2)$

т.е. квадратниот трином менува знак:

$ax^2+bx+c>0$ за $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$

$ax^2+bx+c=0$ за $x=x_1, x=x_2$

$ax^2+bx+c<0$ за $x \in (x_1, x_2)$

4) Ако $D>0, a<0$ функцијата менува знак, односно:

$f(x)>0$ за $x \in (x_1, x_2)$

$f(x)=0$ за $x=x_1, x=x_2$

$f(x)<0$ за $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$

т.е. квадратниот трином менува знак:

$ax^2+bx+c>0$ за $x \in (x_1, x_2)$

$ax^2+bx+c=0$ за $x=x_1, x=x_2$

$ax^2+bx+c<0$ за $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$

5) Ако $D=0, a<0$ функцијата $f(x)\leq 0$ за секој $x\in D_f$, т.е. квадратниот трином $ax^2+bx+c\leq 0$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

6) Ако $D<0, a<0$ функцијата е негативна за секој $x\in D_f$, т.е. квадратниот трином не менува знак; $ax^2+bx+c<0$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

Пример 12: Квадратниот трином:

1) $x^2-4x+7>0$ за $x\in\mathbb{R}$, бидејќи $D=-12<0; a=1>0$

2) $x^2-4x+4\geq 0$ за $x\in\mathbb{R}$, бидејќи $D=0; a=1>0$

3) $x^2-2x-3>0$ за $x\in(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$;

$x^2-2x-3=0$ за $x_1=-1, x_2=3$;

$x^2-2x-3<0$ за $x\in(-3,2)$, бидејќи $D>0; a>0$

4) $-x^2-x+6>0$ за $x\in(-3,2)$

$-x^2-x+6>0$ за $x_1=-3, x_2=2$;

$-x^2-x+6<0$ за $x\in(-\infty,-3)\cup(2,\infty)$, бидејќи $D>0; a<0$

5) $-x^2-2x-1\leq 0$ за $x\in\mathbb{R}$, бидејќи $D=0; a<0$

6) $-x^2-4x-5<0$ за $x\in\mathbb{R}$, бидејќи $D<0; a<0$

Неравенката од видот $ax^2+bx+c>0\,(\geq,<,\leq)$ е општ вид на квадратна неравенка и решението директно се согледува од знакот на квадратниот трином.

Пример 13: Решение на квадратната неравенка:

$x^2-3x+2>0$ е $M=(-\infty,1)\cup(2,\infty)$

$x^2-4x+2\geq 0$ е $M=(-\infty,1]\cup[3,\infty)$

$x^2-5x+6<0$ е $M=(2,3)$

$x^2-6x+7\leq 0$ е $M=[2,3]$

Решение на системот квадратни неравенки $\begin{cases} a_1x^2+b_1x+c_1>0(\geq,<,\leq) \\ a_2x^2+b_2x+c_2>0(\geq,<,\leq) \end{cases}$ е $M=M_1\cap M_2$, каде M_1 е множество решенија на првата неравенка, а M_2 е множество решенија на втората неравенка.

Решението директно се согледува од знакот на квадратниот трином.

Пример 13: Решение на системот квадратни неравенки $\begin{cases} x^2+x-12\geq 0 \\ x^2-36\leq 0 \end{cases}$ е:

$$M=M_1\cap M_2=\left(\left(-\infty,-4\right]\cup\left[3,\infty\right)\right)\cap\left[-6,6\right]=\left[-4,-6\right]\cup\left[3,6\right].$$

За неравенка производ или количник, важат тврдењата:

1) $f(x)\cdot g(x)>0\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}\vee\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$

2) $f(x)\cdot g(x)\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \end{cases}\vee\begin{cases} f(x)\leq 0 \\ g(x)\leq 0 \end{cases}$

3) $f(x)\cdot g(x)<0\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases}\vee\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)>0 \end{cases}$

4) $f(x)\cdot g(x)\leq 0\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\leq 0 \end{cases}\vee\begin{cases} f(x)\leq 0 \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$

5) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}\vee\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$

6) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)>0 \end{cases}\vee\begin{cases} f(x)\leq 0 \\ g(x)<0 \end{cases}$

7) $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases}\vee\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)>0 \end{cases}$

8) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\leq 0\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)<0 \end{cases}\vee\begin{cases} f(x)\leq 0 \\ g(x)>0 \end{cases}$

Ниво Б | Ученикот покажува дека разбира...

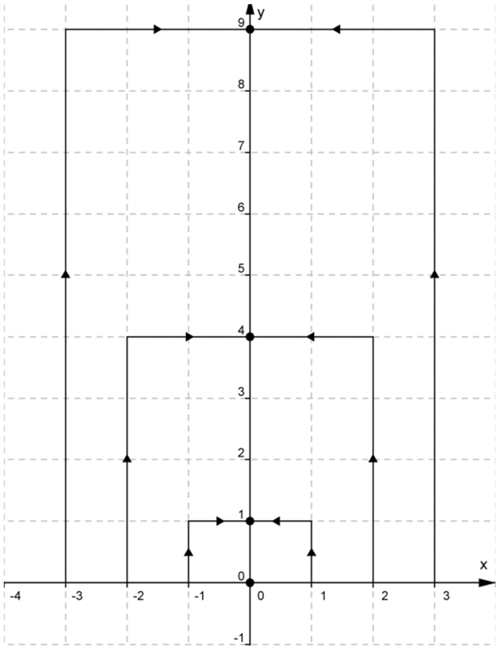
НИВО: РАЗБИРАЊЕ

Вредностите од пресликувањето $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f\left(x\right)=ax^2+bx+c \quad a,b,c\in\mathbb{R}\wedge a\neq 0.$ Може да се претставаат на два начини:

1) Како точки од кодоменот $\mathbb{R}\equiv y-$оската

Пример 14: Сликите од пресликувањето f дадено со $y=f\left(x\right)=x^2$ по претходно табеларно претставување, ги претставуваме како точки на $y-$оската.

x	0	±1	±2	±3
x^2	0	1	4	9



Домен е $D_f=\mathbb{R}=x-$оската

Кодомен е $\mathbb{R}=y-$оската

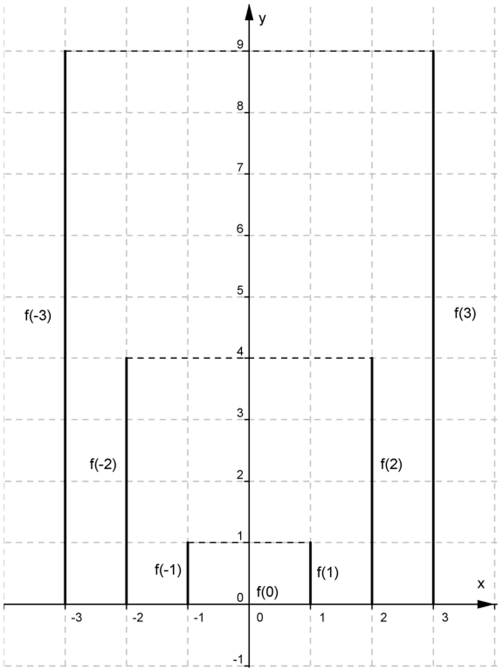
Вредности на $f \quad V_f=\left[1,\infty\right)\subset\mathbb{R}$

Овој начин е погоден за проучување на својствата на пресликувањето f.

2) Како ординати на точки од рамнината

Пример 15: Сликите од пресликувањето f дадено со $y=f\left(x\right)=x^2$ по претходно табеларно претставување, ги претставуваме како ординати на точки во рамнината.

x	0	±1	±2	±3
x^2	0	1	4	9



Со поврзување на овие точки се добива крива линија на графикот на f , т.е.

$$\Gamma_f = \{(x,y) \mid y = x^2 \wedge x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$$

Овој начин е погоден за графичко претставување на функциите со скицирање на графикот.

Нека е дадена квадратната функција во општ $y = ax^2 + bx + c$, каде $a,b,c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0.$

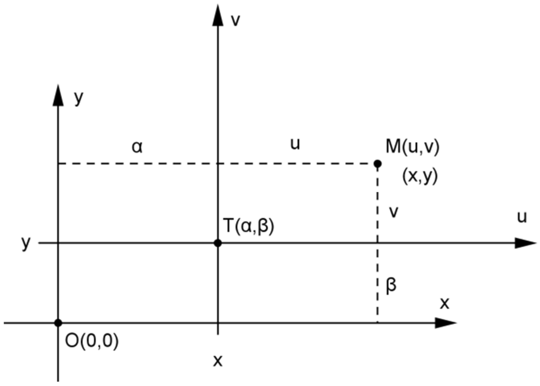
Истата може да се трансформира во канонични облик $y = (x-\alpha)^2 + \beta$, каде

$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ и $\beta = \dfrac{4ac-b^2}{4a}$ се координати на темето $T(\alpha,\beta)$.

Ако $a > 0$, тогаш $y_{min} = \beta = \dfrac{4ac-b^2}{4a} = a\alpha^2 + b\alpha + c$ за $x = \alpha.$

Ако $a < 0$, тогаш $y_{\max} = \beta = \dfrac{4ac-b^2}{4a} = a\alpha^2 + b\alpha + c$ за $x = \alpha.$

Од $y = (x-\alpha)^2 + \beta$ запишуваме $y - \beta = (x-\alpha)^2$, т.е. $v = u^2$, при што $v = y - \beta$, $u = x - \alpha$.



Точката M од параболата има координати $M(u,v)$ во системот uTv и координати $M(x,y)$ во системот xOy, при што $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$.

Линијата на графикот на функцијата $y=ax^2+bx+c$ може да ја скицираме на три начини:

1) со транслација на линијата на графикот $y=ax^2$;

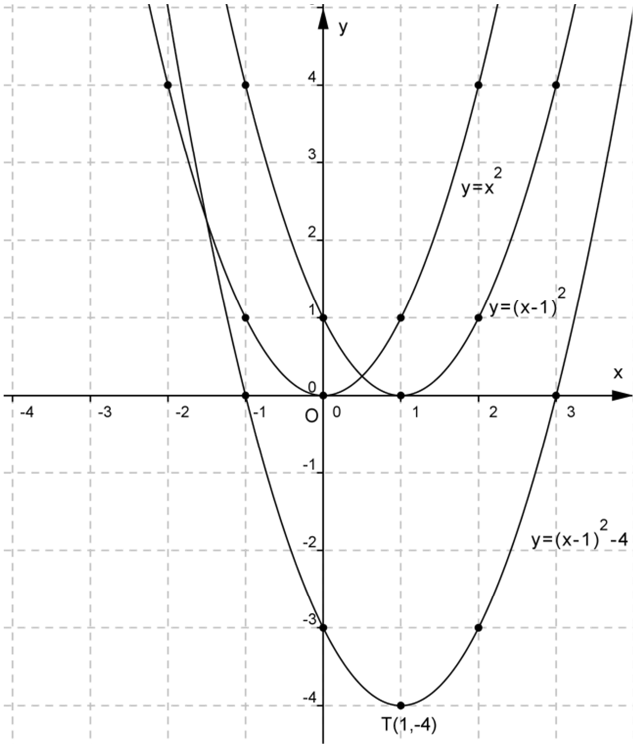
2) со транслација на координатниот систем uTv во системот xOy;

3) со означување на карактеристични точки.

Пример 16: Да се скицира графикот на функцијата $y=x^2-2x-3$, т.е. $y=(x-1)^2-4$ ($\alpha=1, \beta=-4, T(1,-4)$)

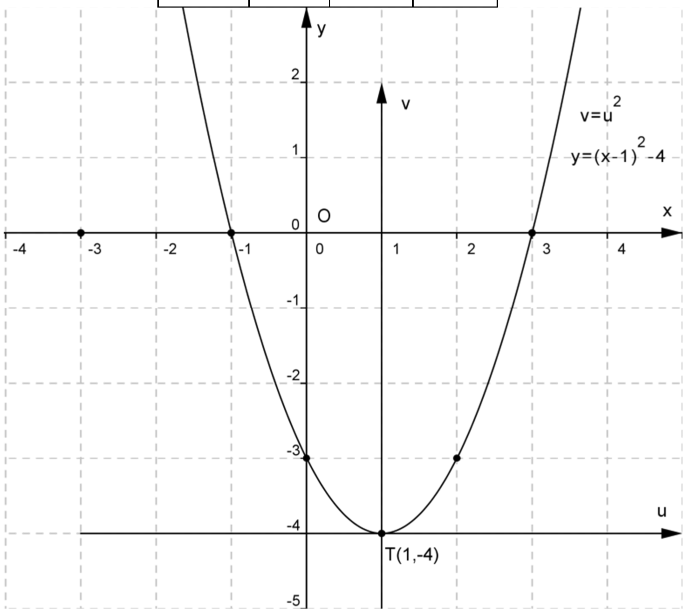
1) Со транслација на линијата на графикот $y=x^2$

x	0	± 1	± 2
x^2	0	1	4



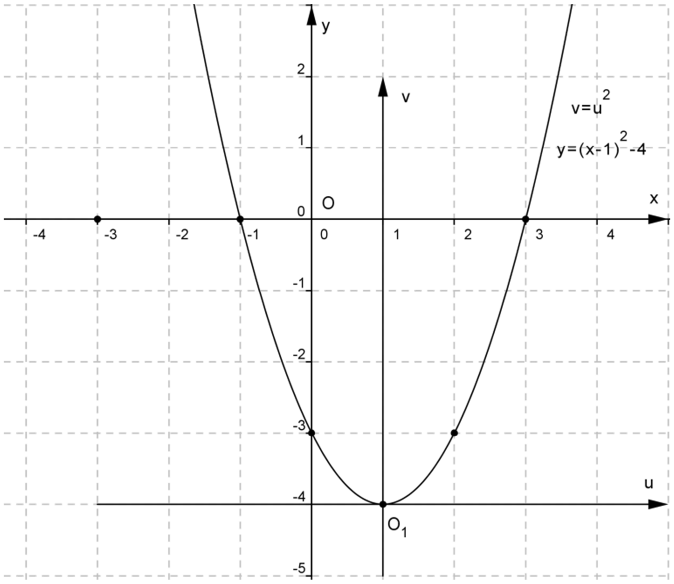
2) а) За да се скицира графикот на функцијата $y=\left(x-1\right)^2-4$, се скицира графикот на функцијата $v=u^2$ во систем со почеток $T\left(1,-4\right)$ во однос на системот xOy.

u	0	± 1	± 2
v	0	1	4

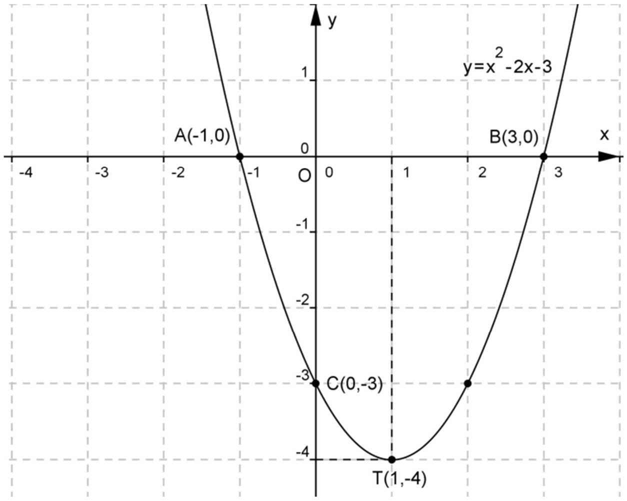


б) Во координатниот систем uO_1v се скицира $v=u^2$, а потоа се скицира xOy со $O\left(-1,4\right)$

u	0	± 1	± 2
u^2	0	1	4



3) Карактеристичните точки за функцијата $y = x^2 - 2x - 3$ се: теме $T(1,-4)$, нули $A(-1,0); B(3,0)$, $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$, пресек со $y-$оската $C(0,3)$



Пример 17: Да се испита текот и да сескицира графикот на функцијата

$$y = x^2 - 2x - 3.$$

1) Дефинициона област за квадратната функција $y = ax^2 + bx + c$, каде $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ е секогаш $D_f = \mathbb{R}$. За нашата функција $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

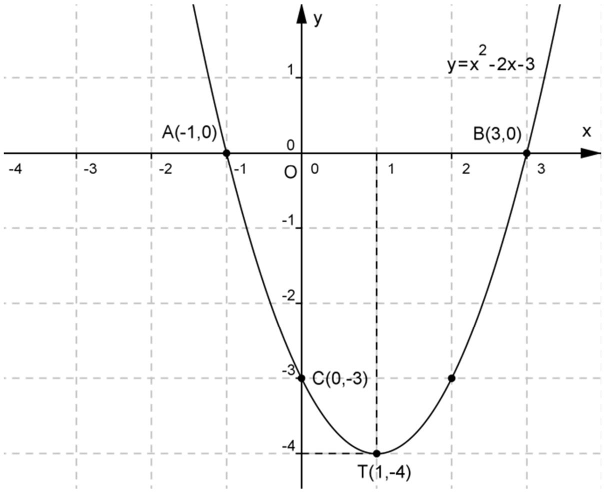
2) Пресек со координатните оски:

а) Пресек со $x-$оската се добива за $y = 0$. Имаме $x^2 - 2x - 3 = 0$, т.е. $x_1 = -1, x_2 = 3$, т.е. точките $A(-1,0); B(3,0)$ се пресечни точки.

б) Пресек со $y-$оската се добива за $x = 0$, т.е. $y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$, т.е. точката $C(0,-3)$ е пресечна точка.

3. Темето на параболата има координати $\alpha = -\frac{b}{2a} = 1$ и $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = -4$. Од $a = 1 > 0$, следи дека точката T е минимум, т.е. $T_{\min}(1,-4)$.

4. Графикот го скицираме со помош на карактеристични точки.



5) Множество вредности на функцијата

Од $y_{\min} = \beta = -4$ имаме $V_f = [-4, \infty)$

6) Оска на симетрија на параболата е правата $x = \alpha$, а во нашиот случај $x = 1$.

7) Монотоност

Во општ случај се разгледуваат интервалите $(-\infty, \alpha); (\alpha, \infty)$. Во нашиот случај:

- за $x \in (-\infty, 1)$ функцијата f опаѓа
- за $x \in (1, \infty)$ функцијата f расте

8) Знак на функцијата

Во општ случај се разгледуваат интервалите $(-\infty, x_1); (x_1, x_2); (x_2, \infty)$. Во нашиот случај:

- за $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ $\quad f(x) > 0$
- за $x \in \{-1, 3\}$ $\quad f(x) = 0$
- за $x \in (-1, 3)$ $\quad f(x) < 0$

Одредувањето на решенијата на квадратната неравенка се сведува на одредување знак на квадратна функција, односно знак на квадратен трином. При решавањето на квадратна неравенка добро е да се користи следниот редослед:

1) Функцијата грубо се скицира со претставување на нулите на $x-$оската и свртеноста на параболата.

2) Делот од параболата што се наоѓа под $x-$оската ни ги покажува негативните вредности на функцијата, а делот од параболата над $x-$оската ни ги покажува позитивните вредности на функцијата. Пресечните точки на параболата со $x-$оската, ако ги има, се нули на функцијата.

3) Се штрафира решението на неравенката и се претставува со интервал.

Пример 18: Реши ги неравенките:

а) $x^2 + x - 2 > 0$

б) $x^2 - x - 6 \le 0$

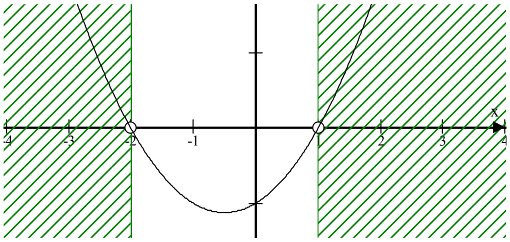
в) $x^2 - 2x + 7 > 0$

г) $x^2 - 3x + 5 < 0$

д) $-x^2 - 2x + 3 \ge 0$

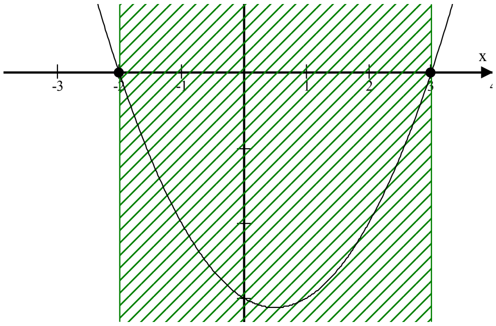
Решение:

а) $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1; a = 1 > 0$



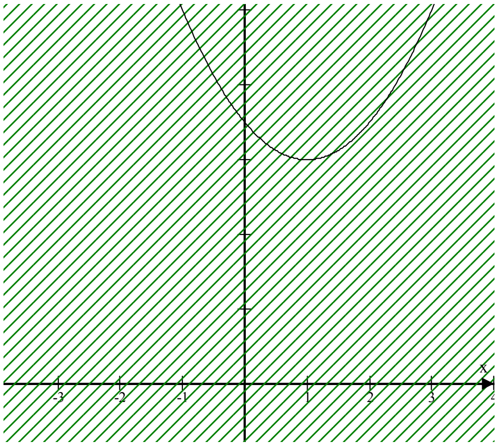
$M = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

б) $x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 3; a = 1 > 0$



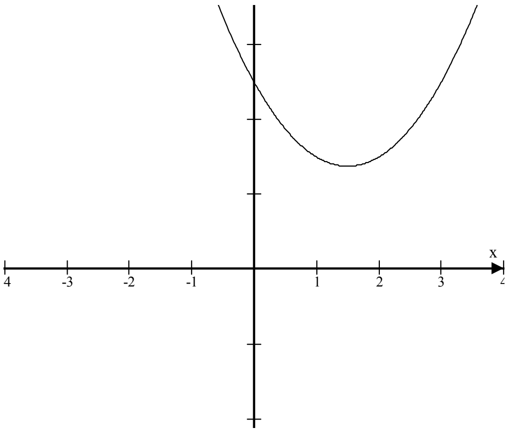
$M = [-2, 3]$

в) $x_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{24}}{2} \Rightarrow$ нема нули; $a = 1 > 0$



$M = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

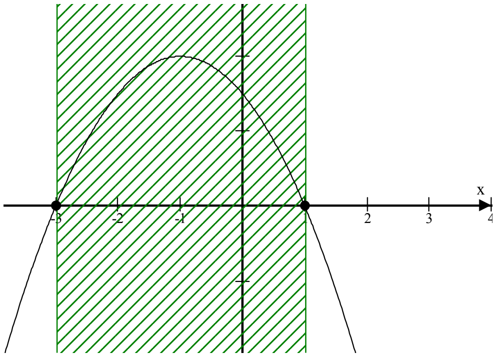
г) $x_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{11}}{2} \Rightarrow$ нема нули; $a = 1 > 0$



$M = \varnothing$

д) $x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow$

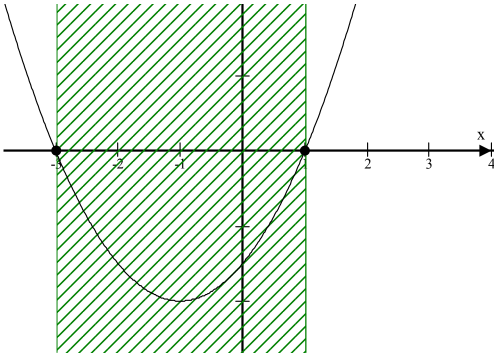
$x_1 = -3, x_2 = 1$; $a = 1 > 0$



$M = [-3,1]$

Ако неравенката $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$ ја помножиме со -1, добиваме $x^2 + 2x - 3 \leq 0$.

Нули се: $x_1 = -3, x_2 = 1$; $a = 1 > 0$



$M = [-3,1]$

Пример 19: Реши го системот од квадратни неравенки $\begin{cases} x^2 + x - 20 \geq 0 \\ x^2 - 49 < 0 \end{cases}$.

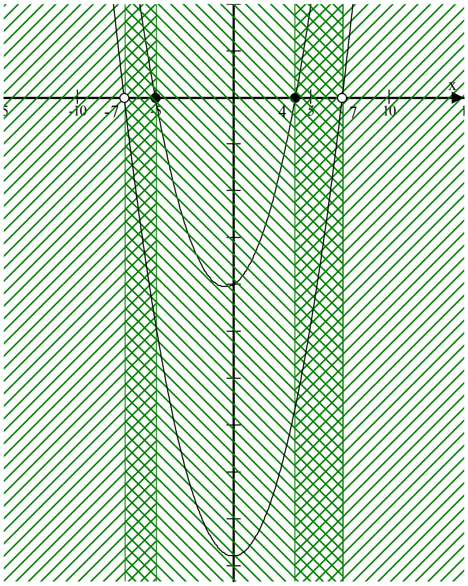
Согледај го решението:

За неравенката $x^2 + x - 20 \geq 0$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = -5, x_2 = 4; a = 1 > 0$

За неравенката $x^2 - 49 < 0$

$x_{1,2} = \pm 7; a = 1 > 0$



$$M_1 = (-\infty, -5] \cup [4, \infty), M_2 = (-7, 7) \;\; \Rightarrow \;\; M = M_1 \cap M_2 = (-7, -5] \cup [4, 7)$$

ЗАДАЧИ ОД НИВО **А** И НИВО **Б**

1. Определи која од следните функции е квадратна:

А) $y=x(x-1)$ Б) $y=x^2+\frac{1}{x}$ В) $y=2^2+3x$ Г) $y=x+\frac{1}{x}$ Д) Друг одговор

2. Домен на квадратната функција е _______, кодомен е ________, а вредности на функцијата _______________ или _______________.

3. Теме на параболата $y=x^2-2x+1$ е подредениот пар:

А) $(0,0)$ Б) $(-2,1)$ В) $(1,0)$ Г) $(0,1)$ Д) Друг одговор

4. Канончен или сведен вид на квадратната функција $y=x^2-4x+1$ е _______________.

5. Нека е дадена квадратната функција $y=f(x)=2x^2-3x+5$, тогаш

$f(-2)=$ __________; $f\left(\frac{1}{2}\right)=$ __________.

6. Во ист координатен систем да се скицираат функциите: $y=x^2; y=3x^2; y=\frac{1}{3}x^2$.

7. Во ист координатен систем да се скицираат функциите: $y=-x^2; y=-3x^2; y=-\frac{1}{3}x^2$.

8. Направи модел на квадратна функција $y=2x^2$ на картон и со негова помош скицирај го графикот на функциите: $y=2(x-1)^2$; $y=2(x-1)^2$

$$y=2x^2+3;\quad y=2x^2-4$$

$$y=2(x+2)^2-5;\quad y=2(x-3)^2+4$$

$$y=-2(x-1)^2;\quad y=-2(x+3)^2$$

$$y=-2x^2+3;\quad y=-2x^2-4$$

$$y=-2(x+2)^2-5;\quad y=-2(x-3)^2+4$$

9. Одреди D_f и V_f на функцијата $y=\frac{3}{4}x^2-3$.

10. Одреди ги нулите и пресекот со $y-$оската на функцијата $y=6x^2-x-1$.

11. Одреди ја оската на симетрија на функцијата $y=x^2-14x-1$.

12. Ако $x_1=-4, x_2=6$ се нули на квадратната функција, тогаш одреди ја оската на симетрија на параболата.

13. Темето на параболата е $T\left(-2,-4\right)$, а една нула е 10. Одреди ја другата нула и интервалот на опаѓање на функцијата f.

14. Одреди го интервалот каде што функцијата $y=-3x^2-5x+2$ е позитивна.

15. Одреди ги темето, оската на симетрија и множеството вредности на функцијата $y=-x^2+2x+3$.

16. Одреди го решението на неравенката $x^2-5x-14<0$.

17. Одреди ги целобројните решенија на неравенката $-x^2+2x+15\leq 0$.

18. Реши го системот неравенки $\begin{cases} 2x-20\leq 0 \\ x^2-4<0 \end{cases}$.

19. Реши го системот од квадратни неравенки $\begin{cases} x^2-9\geq 0 \\ 4-x^2<0 \end{cases}$.

20. Напиши го еквивалентниот систем неравенки на неравенката $\frac{x^2+2x}{x^2-2x}\leq 0$.

Ниво В

Ученикот треба да го примени своето знаење и разбирање

НИВО: ПРИМЕНА

Пример 20: Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$.

Решение:

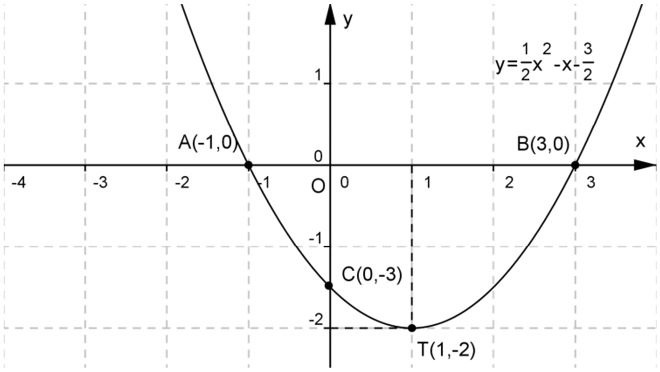
1) $D_f=\mathbb{R}$

2) а) Нули се точките $A(-1,0);B(3,0)$

б) Пресек со $y-$оската е точката $C\left(0,-\frac{3}{2}\right)$

3) Теме на параболата: $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\cdot\frac{1}{2}}=1$ и $\beta=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-3-1}{2}=-2$ $T(1,-2)_{\min}$

4) Графикот го скицираме со помош на карактеристични точки



5) $V_f=[-2,\infty)$

6) Правата $x=1$ е оска на симетрија на параболата

7) Монотоност

- за $x\in(-\infty,1)$ f опаѓа $\searrow_{-2}^{+\infty}$ - за $x\in(1,\infty)$ f расте $\nearrow_{-2}^{+\infty}$

8) Знак на функцијата

- за $x\in(-1,3)$ $f(x)<0$ - за $x\in(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$ $f(x)>0$

Пример 21: Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1$.

Решение:

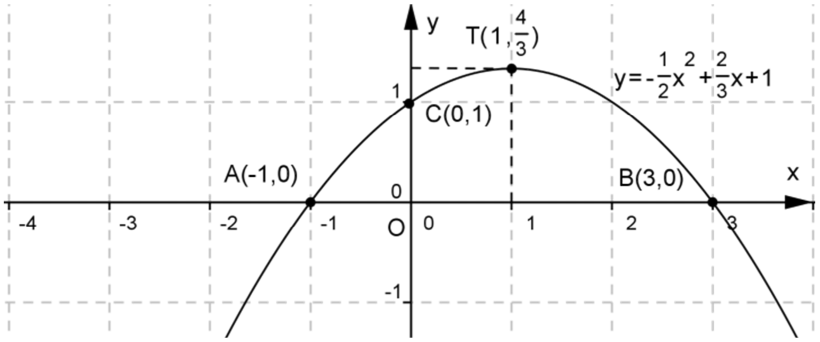
1) $D_f=\mathbb{R}$

2) а) Нули се точките $A(-1,0);B(3,0)$

б) Пресек со $y-$оската е точката $C(0,1)$

3) Теме на параболата: $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}}=1$ и $\beta=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-\frac{4}{3}-\frac{4}{9}}{-\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}$ $T\left(1,\frac{4}{3}\right)_{\max}$

4) Графикот го скицираме со помош на карактеристични точки



5) $V_f=\left(-\infty,\frac{4}{3}\right]$

6) Правата $x=1$ е оска на симетрија на параболата

7) Монотоност

- за $x\in(-\infty,1)$ $f\nearrow_{-\infty}^{\frac{4}{3}}$ - за $x\in(1,\infty)$ $f\searrow_{-\infty}^{\frac{4}{3}}$

8) Знак на функцијата

- за $x\in(-1,3)$ $f(x)>0$ - за $x\in(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$ $f(x)<0$

Дефиницијата на апсолутна вредност $|x|=\begin{cases} x\ ,\ x\geq 0 \\ -x\ ,\ x<0 \end{cases} = \begin{cases} x\ ,\ x>0 \\ -x\ ,\ x\leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x\ ,\ x>0 \\ 0\ ,\ x=0 \\ -x\ ,\ x<0 \end{cases}$

може да ја користиме во испитување на тек и конструкција на графици, каде променливата е под знакот на апсолутна вредност.

Пример 22: Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $y=x^2-|x|$.

Решение: Од $|x|=\begin{cases} x\ ,\ x\geq 0 \\ -x\ ,\ x<0 \end{cases}$ имаме $y=x^2-|x|=\begin{cases} x^2-x\ ,\ x\geq 0 \\ x^2+x\ ,\ x<0 \end{cases}$

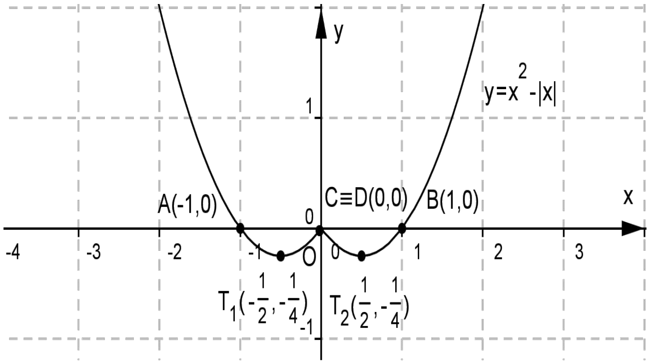
1) $D_f=\mathbb{R}$

2) а) Нули се точките $A(-1,0);B(1,0);C(0,0)$

б) Пресек со $y-$оската е точката $D(0,0)$

3. Теме на параболата: $T_1\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)_{\min}$; $T_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)_{\min}$, а точката $D(0,0)$ е максимум

4. Графикот го скицираме со помош на карактеристични точки



5) $V_f=\left[-\frac{1}{4},\infty\right)$

6) Правата $x=0$ е оска на симетрија на параболата

7) Монотоност - за $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ $f\searrow_{-\frac{1}{4}}^{+\infty}$; - за $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ $f\searrow_{-\frac{1}{4}}^{0}$;

- за $x\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$ $f\nearrow_{-\frac{1}{4}}^{0}$; - за $x\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ $f\nearrow_{-\frac{1}{4}}^{\infty}$

8) Знак на функцијата

- за $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ $f(x)<0$ - за $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ $f(x)>0$

Пример 23: Дадено е множеството од функции $f\left(x\right)=ax^2+6x+c\,;a,c\in\mathbb{R}.$ Одреди ги a и c, така што нула на функцијата f е $x_1=6$, а $M\left(2,8\right)\in\Gamma_f$.

Решение: Го добиваме системот $\begin{cases}36a+36+c=0\\4a+12+c=8\end{cases}$ т.е. $\begin{cases}36a+c=-36\\4a+c=-4\end{cases}$, од каде $a=-1, c=0.$

Пример 24: Дадено е множеството од функции $f\left(x\right)=\left(m-1\right)x^2+\left(m-4\right)x-m-1$, да се одреди параметарот m, така што функцијата достигнува минимум за $x=3.$

Решение: За $m-1>0$, имаме $-\dfrac{b}{2a}=3$, т.е.

$\dfrac{-\left(m-4\right)}{2\left(m-1\right)}=3 \quad\Rightarrow\quad 6m-6=-m+4 \quad\Rightarrow\quad 7m=10$, од каде $m=\dfrac{10}{7}.$

Пример 25: Во множеството од функции $y=ax^2-2x-5$, одреди го параметарот a, така што функцијата достигнува максимална вредност $y_{\max}=1.$

Решение: За $a<0$, имаме $\dfrac{4ac-b^2}{4a}=1 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{-20a-4}{4a}=1$, од каде $a=-\dfrac{1}{6}.$

Пример 26: Ако $f\left(x+1\right)=x^2-3x-+2$, одреди го $f\left(x\right)$.

Решение: Нека $x+1=t$, т.е. $x=t-1$. Тогаш, $f\left(t\right)=\left(t-1\right)^2-3\left(t-1\right)+2$

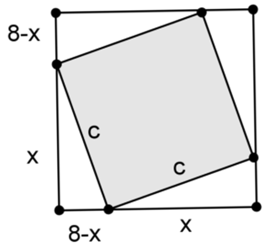
$$f\left(t\right)=t^2-2t+1-3t+3+2$$

$$f\left(t\right)=t^2-5t+6$$

Значи, $f\left(x\right)=x^2-5x+6$

Пример 27: Одреди ја страната на најмалиот квадрат вписан во квадрат со страна 8.

Решение: Нека c е бараната страна претставена со скицата, тогаш:



$c^2=x^2+\left(8-x\right)^2$

$c^2=x^2+64-16x+x^2$

$c^2=2x^2-16x+64$

$P_{\min}=c^2$ се добива , ако $x=\alpha=4$

$P_{\min}=32-64+64=32\;cm^2$, а страната

$c=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\;cm.$

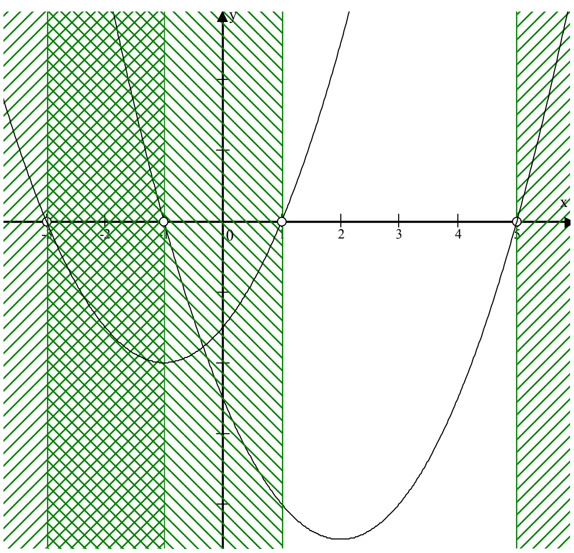
Пример 28: Реши ја неравенката производ $\left(x^2-4x-5\right)\left(x^2+2x-3\right)<0$.

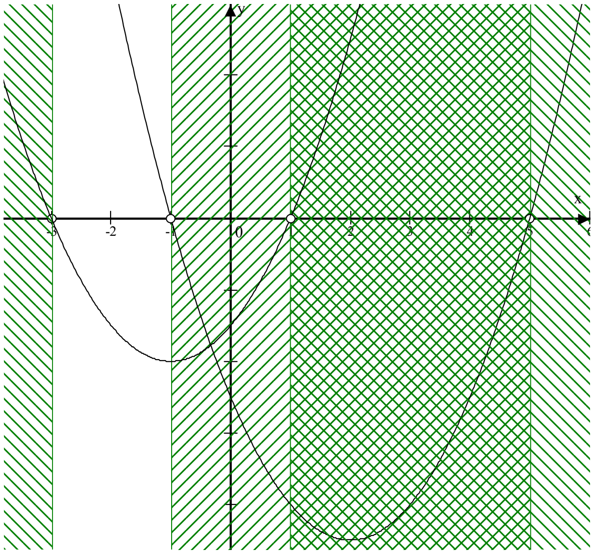
Согледај го решението:

Од $x^2-4x-5=0$ се добива $x_1=-1, x_2=5$ и од $x^2+2x-3=0$ се добива $x_1=-3, x_2=1$.

Неравенката производ е еквивалентна на дисјункцијата на системите:

$$\begin{cases} x^2-4x-5>0 \\ x^2+2x-3<0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2-4x-5<0 \\ x^2+2x-3>0 \end{cases}$$





$$M_1=\left(-3,-1\right) \qquad M_2=\left(1,5\right)$$

$$M=M_1\cup M_2=\left(-3,-1\right)\cup\left(1,5\right).$$

Пример 29: За кои вредности на x, дропката $\dfrac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1}$ е помала од -1?

Решение: Имаме $\dfrac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1}<-1$, т.е. $\dfrac{-x^2+2x-5+2x^2-x-1}{2x^2-x-1}<0$

$$\frac{x^2+x-6}{2x^2-x-1}<0$$

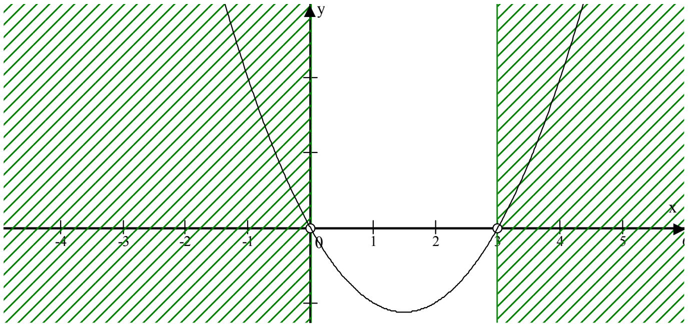
$$\begin{cases} x^2+x-6>0 \\ 2x^2-x-1<0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2+x-6<0 \\ 2x^2-x-1>0 \end{cases}$$

$$M=\left(-3,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(1,2\right).$$

Пример 30: Во равенката $kx^2-2(k-2)x+k-3=0$ одреди го k, така што решенијата да бидат со ист знак.

Решение: Треба $q>0$, т.е. $\frac{k-3}{k}>0$, односно $k^2-3k>0$.

Од $k^2-3k=0$ се добива $k_1=0$, $k_2=3$



$$k\in(-\infty,0)\cup(3,\infty)$$

За $D>0$ $\quad (k-2)^2-k(k-3)>0$

$-4k+4+3k>0$ т.е. $k<4$

Значи, $k\in(-\infty,0)\cup(3,4)$.

Ниво Г

Ученикот треба да користи логичко следство

НИВО: АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ

Докажи дека каноничниот облик на квадратната функција $y=a\left(x-\alpha\right)^2+\beta$, каде $\alpha=-\frac{b}{2a}, \beta=\frac{4ac-b^2}{4a}$ се добива од општиот облик.

Доказ: $y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=a\left(x-\alpha\right)^2+\beta.$

Пример 31: Трансформирај ја квадратната функција $y=3x^2-7x+4$ во каноничен облик.

Имаме, $y=3\left(x^2-\frac{7}{3}x+\frac{4}{3}\right)=3\left(x^2-\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}+\frac{4}{3}-\frac{49}{36}\right)=3\left[\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{-1}{36}\right]=3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2-\frac{1}{12}.$

Докажи дека:

1)Ако $a>0$, тогаш функцијата f во точката $x=\alpha=-\frac{b}{2a}$ има минимум

$$\beta=f\left(\alpha\right)=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

2)Ако $a<0$, тогаш функцијата f во точката $x=\alpha=-\frac{b}{2a}$ има максимум

$$\beta=f\left(\alpha\right)=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

Доказ: Неравенството $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ е исполнето за секое $x\in\mathbb{R}$.

1) Множејќи со $a>0$, добиваме:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\geq\frac{4ac-b^2}{4a}$$

Значи, $f\left(x\right)\geq\frac{4ac-b^2}{4a}$,

се добива дека $y_{\min}=\beta=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Од $y=a\left(x-\alpha\right)^2+\beta$ за $x=\alpha\Rightarrow y=\beta$,

т.е. $T\left(\alpha,\beta\right)$.

2) Множејќи со $a<0$, добиваме:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\leq 0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\leq\frac{4ac-b^2}{4a}$$

Значи, $f\left(x\right)\leq\frac{4ac-b^2}{4a}$,

се добива дека $y_{\max}=\beta=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Од $y=a\left(x-\alpha\right)^2+\beta$ за $x=\alpha\Rightarrow y=\beta$,

т.е. $T\left(\alpha,\beta\right)$.

Пример 32: Одреди ги екстремните вредности на функцијата:

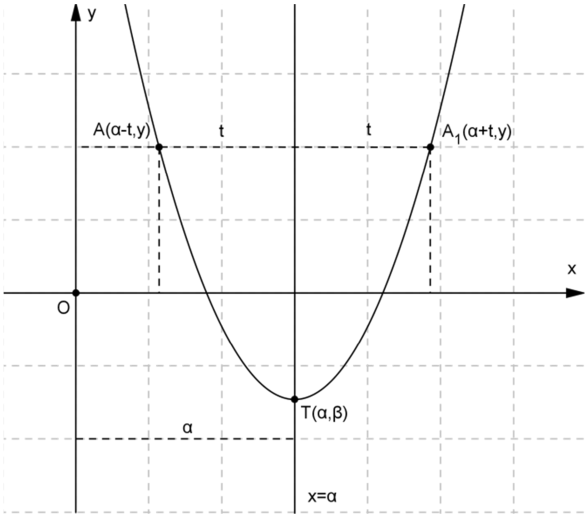
а) $y=\frac{1}{2}x^2+4x-5$ б) $y=-\frac{3}{2}x^2-x-2$

Решение: а) $\alpha=-\frac{4}{2\cdot\frac{1}{2}}=-4, \quad \beta=f(-4)=-8$

б) $\alpha=-\frac{1}{3}, \quad \beta=f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{11}{6}$

Правата $x=-\frac{b}{2a}$ е оска на симетрија на параболата $f(x)=y=ax^2+bx+c.$

Доказ:



Треба да докажеме дека $f(\alpha-t)=f(\alpha+t).$

Користејќи каноничен вид $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ добиваме:

$$f(\alpha-t)=a(\alpha-t-\alpha)^2+\beta=a(-t)^2+\beta=a(t)^2+\beta=a(\alpha+t-\alpha)^2+\beta=f(\alpha+t).$$

За квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$, $\alpha=-\frac{b}{2a};\beta=\frac{4ac-b^2}{4a}$ множеството вредности е:

1) $V_f=f(D_f)=[\beta,\infty)$, ако $a>0$

2) $V_f=f(D_f)=(-\infty,\beta]$, ако $a<0$

Доказ: 1) Нека $t\in[\beta,\infty)$, а тоа значи дека $t\geq\beta$. Треба да докажеме дека постои реален број x така што $f(x)=t$, т.е. за секој $t\geq\beta$ корените на равенката $ax^2+bx+c=t$, т.е. $ax^2+bx+c-t=0$ се реални.

Навистина, за $a > 0$ и $t \geq \beta$, т.е. $t \geq \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ следува $b^2 - 4ac + 4at \geq 0$.

За дискриминантата на квадратната равенка $ax^2 + bx + c - t = 0$ важи:

$$D = b^2 - 4a\left(c - t\right) = b^2 - 4ac + 4at \geq 0$$

што значи дека нејзините корени се реални.

2) Нека $t \in \left(-\infty, \beta\right]$, а тоа значи дека $t \leq \beta$. Треба да докажеме дека постои реален број x т.ш. $f\left(x\right) = t$, т.е. за секој $t \leq \beta$ корените на равенката $ax^2 + bx + c = t$, т.е. $ax^2 + bx + c - t = 0$ се реални.

Навистина, за $a < 0$ и $t \leq \beta$, т.е. $t \leq \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ (множиме со a, $a < 0$) се добива $b^2 - 4ac + 4at \geq 0$. Според ова, за дискриминантата на квадратната равенка $ax^2 + bx + c - t = 0$ важи:

$$D = b^2 - 4a\left(c - t\right) = b^2 - 4ac + 4at \geq 0$$

што значи дека нејзините корени се реални.

Ако $a > 0$, тогаш квадратната функција $f\left(x\right) = ax^2 + bx + c = a\left(x - \alpha\right)^2 + \beta$ монотоно опаѓа во интервалот $\left(-\infty, \alpha\right)$ и монотоно расте во интервалот $\left(\alpha, \infty\right)$.

Доказ: Нека $x_1 < x_2 < \alpha$. Со додавање на $-\alpha$ се добива $x_1 - \alpha < x_2 - \alpha < 0$

Ако помножиме прво со $x_1 - \alpha < 0$, па потоа со $x_2 - \alpha < 0$, добиваме:

$$\left(x_1 - \alpha\right)^2 > \left(x_2 - \alpha\right)\left(x_1 - \alpha\right) \text{ и } \left(x_2 - \alpha\right)\left(x_1 - \alpha\right) > \left(x_2 - \alpha\right)^2$$

т.е. $\left(x_1 - \alpha\right)^2 > \left(x_2 - \alpha\right)^2$

За $a > 0$, добиваме $a\left(x_1 - \alpha\right)^2 > a\left(x_2 - \alpha\right)^2$,

т.е. $a\left(x_1 - \alpha\right)^2 + \beta > a\left(x_2 - \alpha\right)^2 + \beta$

т.е. $f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$.

Значи, дека f монотоно опаѓа во интервалот $\left(-\infty, \alpha\right)$.

Нека $\alpha < x_1 < x_2$. Со додавање на $-\alpha$ се добива $0 < x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$

Ако помножиме прво со $0 < x_1 - \alpha$, па потоа со $0 < x_2 - \alpha$, добиваме:

$$(x_1 - \alpha)^2 < (x_2 - \alpha)(x_1 - \alpha) \text{ и } (x_2 - \alpha)(x_1 - \alpha) < (x_2 - \alpha)^2$$

т.е. $(x_1 - \alpha)^2 < (x_2 - \alpha)^2$

За $a > 0$, добиваме $a(x_1 - \alpha)^2 < a(x_2 - \alpha)^2$,

т.е. $a(x_1 - \alpha)^2 + \beta < a(x_2 - \alpha)^2 + \beta$

т.е. $f(x_1) < f(x_2)$.

Значи, дека f монотоно расте во интервалот (α, ∞).

ЗАДАЧИ ОД НИВО **В** И НИВО **Г**

Испитај го текот и скицирај графикот на функцијата (1-9):

1. $y=\frac{1}{3}x^2+2x+4$
2. $y=-\frac{1}{2}x^2+3x+8$
3. $y=-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{15}{8}$
4. $y=\frac{1}{3}x^2+2x+2$
5. $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+3$
6. $y=-\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-2\frac{1}{3}$
7. $y=x^2-2|x|$
8. $y=-|x^2-x|+2$
9. $y=2x^2-4|x|+6$

10. Дадено е множеството од функции $f(x)=ax^2+bx+c$; $a,b,c\in\mathbb{R}$. Одреди ги коефициентите a,b и c, така што $f(2)=0$, $f(3)=-7$, $f(-2)=8$.

11. Од множеството од функции $y=x^2+px+q$, одреди ја функцијата која има вредност $y_{\min}=-1$, за $x=2$.

12. Докажи дека квадратниот трином $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ може да се напише како квадрат на бином, ако и само ако $b^2-4ac=0$.

13. Ако $f(x+a)=x^2+x+2$, одреди $f(x-a)$.

14. Во полукруг со дијаметар $10\,cm$ впишан е трапез на кој подолгата основа е дијаметар, така што периметарот на трапезот има максимална вредност.

15. Одреди ги вредностите на параметарот a, така што збирот на кубовите на решенијата на равенката $6x^2+6(a-1)x-5a+2a^2=0$ да биде најголем.

16. Докажи го тврдењето:

Ако $a<0$, тогаш квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$ монотоно расте во интервалот $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ и монотоно опаѓа во интервалот $\left(\frac{b}{2a},\infty\right)$.

17. Докажи дека равенката $(m^2+5)x^2+2(m+3)x+3=0$ нема реални решенија ниту за една вредност на параметарот m.

18. Какви услови задоволуваат коефициентите a, b и c на неравенката $ax^2 + bx + c > 0$, ако нејзиното решение е $-1 < x < 2$?

19. Докажи го тврдењето:

Ако a, b и c се должини на страни на триаголник, тогаш докажи дека триномот $b^2x^2 + \left(b^2 + c^2 - a^2\right)x + c^2 > 0$ е позитивен за секое $x \in \mathbb{R}$.

20. Одреди ја дефиниционата област на функцијата $f\left(x\right) = \sqrt{\dfrac{4x^2 - 14x + 12}{x^2 - 4x + 3}}$.

21. Реши ја неравенката $\left|\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + x + 1}\right| < 2$.

22. Испитај ги промените на знакот на решенијата на квадратната равенка $\left(m-1\right)x^2 + 2\left(m-3\right)x + m + 3 = 0$, ако $m \in \mathbb{R}$.

ПИСМЕНА РАБОТА 6

Задачи со заокружување:

1. А **(5)( )** Дефинициона област на квадратната функција $y=f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ е:

А) $\mathbb{R}^+$ Б) $\mathbb{R}^-$ В) $\mathbb{R}$ Г) $\mathbb{R}^-\cup\mathbb{R}^+$ Д) друг одговор

2. Б **(5)( )** Темето на квадратната функција $y=2\left(x+2\right)^2+2$ е точката T со координати:

А) $\left(-2,2\right)$ Б) $\left(-2,2\right)$ В) $\left(2,-2\right)$ Г) $\left(-2,-2\right)$ Д) друг одговор

3. В **(5)( )** Множеството вредности на функцијата $f\left(x\right)=y=-x^2-4x-8$ е интервалот:

А) $\left(-\infty,-4\right)$ Б) $\left(-\infty,-4\right]$ В) $\left(-\infty,4\right)$ Г) $\left(-\infty,4\right]$ Д) друг одговор

4. Г **(5)( )** Најмалата вредност на дропката $\dfrac{1}{-x^2-2x-7}$, изнесува:

А) $\dfrac{1}{7}$ Б) $-\dfrac{1}{7}$ В) $\dfrac{1}{2}$ Г) $-\dfrac{1}{2}$ Д) друг одговор

Задачи со дополнување:

5. А **(5)( )** Општиот вид на квадратна функција се запишува со _______________ , а каноничниот вид на квадратна функција се запишува со _______________ .

6. Б **(5)( )** Квадратниот трином ax^2+bx+c , $\left(a\neq 0\right)$ не менува знак само ако ___________.

7. В **(5)( )** Дефиниционата област на функцијата $y=\sqrt{4-x^2}$ се добива со решавање на неравенката _________ и изнесува _________ .

8. Г **(5)( )** Ако $x_1=-4$, $x_2=6$ се нули на квадратна функција и ако пресекот со $y-$оската е во $y=-1$, тогаш функцијата расте монотоно во интервалот _________ .

Задачи со целосна постапка:

9. А **(15)( )** Дадена е квадратната функција $y=f\left(x\right)=-x^2+2x+3$. Одреди:

а) коефициенти; б) координати на темето; в) канничен вид.

10. Б **(15)( )** Одреди го множеството решенија на неравенката количник $\dfrac{x+14}{x^2-2x+1}\geq 0.$

11. В **(15)( )** Дадена е квадратната функција $y=-\dfrac{4}{3}x^2-\dfrac{8}{3}x+4.$ Одреди:

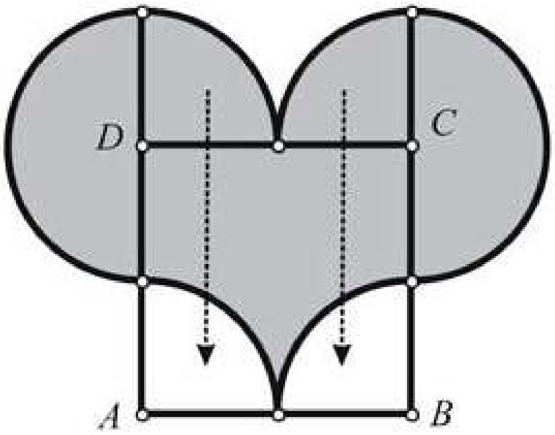
а) нули; б) теме; в) знак на функцијата.

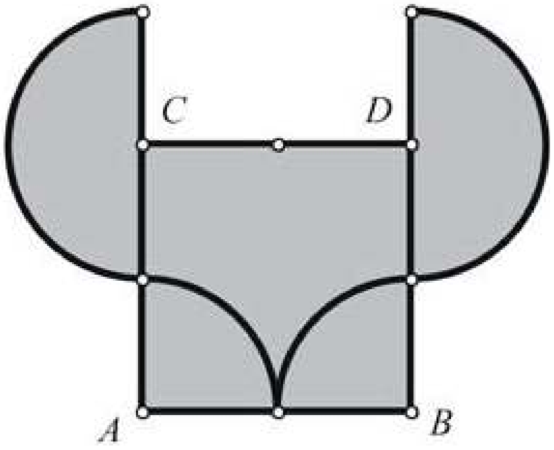
12. Г **(15)( )** Докажи дека правата $x=-\dfrac{b}{2a}$ е оска на симетрија на параболата со користење на обликот $f\left(x\right)=ax^2+bx+c.$

Бодови (Оценка)	0-26 (1)	27-42 (2)	43-60 (3)	61-76 (4)	77-100 (5)

ТЕМА 7.

Плоштина на рамнински фигури

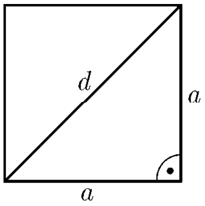




Ниво А

Ученикот треба да знае дека...

НИВО: ПОМНЕЊЕ



Квадрат е четириаголник со еднакви страни и еднакви агли. Плоштината на квадрат со страна a е $P=a^2$.

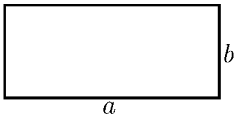
Пример 1: Плоштината на квадрат со страна $a=3\,\mathrm{cm}$ е еднаква на

$$P=a^2=3^2=9\,\mathrm{cm}^2$$

Плоштината на квадрат со дијагонала d се пресметува со формулата $P=\dfrac{d^2}{2}$.

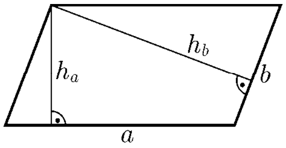
Пример 2: Плоштината на квадрат со дијагонала $d=5\,\mathrm{cm}$ е еднаква на

$$P=\frac{d^2}{2}=\frac{5^2}{2}=\frac{25}{2}=12{,}5\,\mathrm{cm}^2$$



Правоаголник е четириаголник со два пара еднакви спротивни страни и еднакви агли. Плоштината на правоаголник со страни a и b се пресметува со формулата $P=ab$.

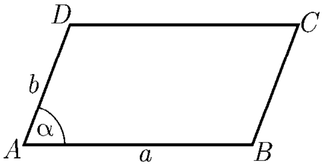
Пример 3: Плоштината на правоаголник со страни $a=7\,\mathrm{cm}$ и $b=4\,\mathrm{cm}$ е еднаква на $P=ab=7\cdot 4=28\,\mathrm{cm}^2$.



Паралелограм е четириаголник со два пара паралелни страни. Плоштината на паралелограм со страни a,b и висини h_a,h_b, соодветно, се пресметува со формулата $P=a\cdot h_a=b\cdot h_b$.

Забелешка 1: Квадратот е паралелограм со еднакви страни и еднакви агли, правоаголникот е паралелограм со еднакви агли, а ромбот е паралелограм со еднакви страни.

Пример 4: Плоштината на паралелограмот $ABCD$ ако $a=12\,\mathrm{cm}$ и $h_a=7\,\mathrm{cm}$ е еднаква на $P=a\cdot h_a=12\cdot 7=84\,\mathrm{cm}^2$.

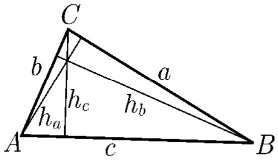


Плоштината на паралелограмот може да се пресмета и ако се познати должините на страните и аголот меѓу нив, т.е. $P=a\cdot b\cdot\sin\alpha$.

Пример 5: Плоштината на паралелограм со страни $a=15\,\mathrm{cm}$, $b=12\,\mathrm{cm}$ и $\alpha=30^0$ е еднаква на

$$P=a\cdot b\cdot\sin\alpha=15\cdot 12\cdot\sin 30^0=15\cdot\cancel{12}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}=90\,\mathrm{cm}^2$$

Триаголник е многуаголник со три страни. Плоштината на триаголник е еднаква на полупроизводот од една негова страна и висината спуштена кон таа страна, т.е. $P = \frac{ch_c}{2} = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2}$.



Пример 6: Плоштината на триаголникот со $b = 7\,\text{cm}$ и $h_b = 4\,\text{cm}$ е еднаква на

$$P = \frac{bh_b}{2} = \frac{28}{2} = 14\,\text{cm}^2$$

Забелешка 2: Плоштината на рамностран триаголник со страна a се пресметува со формулата $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Плоштината на разностран триаголник за кој се познати должините на страните се пресметува со Хероновата формула, т.е. $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, каде $s = \frac{a+b+c}{2}$. (s се нарекува полупериметар на триаголникот)

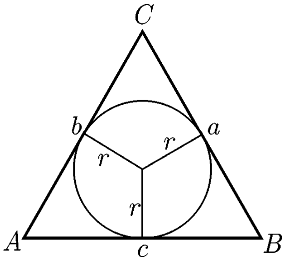
Пример 7: Плоштината на триаголникот со страни $a = 5$, $b = 4$ и $c = 7$ е еднаква на

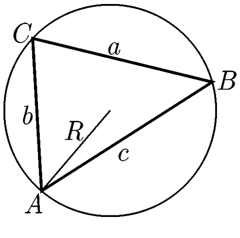
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{8(8-5)(8-4)(8-7)} = \sqrt{8\cdot 3\cdot 4\cdot 1} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}\,,$$

каде $s = \frac{5+4+7}{2} = 8$

Плоштината на триаголникот може да се пресмета ако се познати неговиот полупериметар и радиусот на вписаната кружница со формулата $P = sr$.

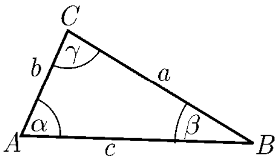
Плоштината на триаголникот може да се пресмета ако се познати должините на неговите страни и радиусот на опишаната кружница R со формулата $P = \frac{abc}{4R}$.





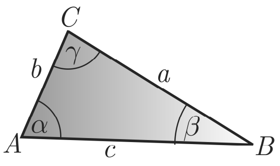
Пример 8: За ΔABC со страни $a = 4\,cm, b = 6\,cm$ и $c = 8\,cm$ радиусот на вписаната кружница е $r = \frac{P}{s} = \frac{\sqrt{9\cdot(9-4)\cdot(9-6)\cdot(9-8)}}{9} = \frac{\sqrt{15}}{3}cm$, а радиусот на опишаната кружница е $R = \frac{abc}{4P} = \frac{192}{12\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{15}\,cm$

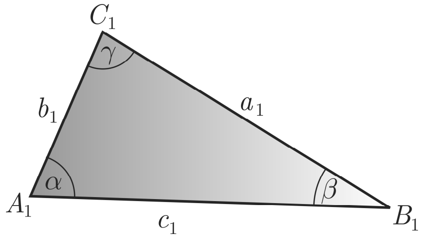
Плоштината на триаголникот може да се пресмета ако се познати должините на две страни и големината на аголот меѓу нив т.е. $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$



Пример 9: Плоштината на триаголникот со страни $a = 3\,\mathrm{dm}$, $b = 5\,\mathrm{dm}$ и агол $\gamma = 60^\circ$ е еднаква на $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}3\cdot 5\sin 60^\circ = \frac{1}{2}3\cdot 5\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}\mathrm{dm}^2$.

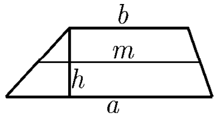
Плоштините на слични триаголници се однесуваат како квадратите на нивните соодветни страни, т.е. $\frac{P}{P_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{b^2}{b_1^2} = \frac{c^2}{c_1^2}$.





Пример 10: Плоштините на два слични триаголници се 15 и 18, а страната a на првиот е 5, тогаш соодветната страна a_1 на вториот триаголник е

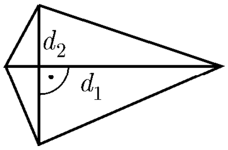
$$a_1^2 = \frac{a^2 P_1}{P} = \frac{25\cdot 18}{15} = 30, \text{ па } a_1 = \sqrt{30}.$$



Трапез е четириаголник со еден пар паралелни страни кои се нарекуваат основи на трапезот, а растојанието меѓу паралелните страни се вика висина на трапезот. Плоштина на трапез со основи a, b и висина h се пресметува со формулата $P = \frac{(a+b)h}{2}$.

Забелешка 3: Должината на средната линија m на трапезот со основи a и b е еднаква на $\frac{a+b}{2}$, па плоштината на трапезот се пресметува со формулата $P = mh.$

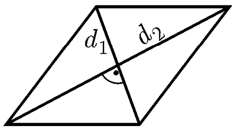
Пример 11: Плоштината на трапез со основи $a = 4$, $b = 8$ и висина $h = 10$ е еднаква на $P = \frac{8+4}{2}10 = 60$.

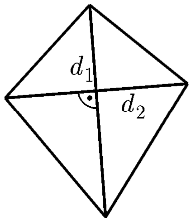


Плоштината на четириаголник со заемно нормални дијагонали d_1 и d_2 се пресметува со формулата $P = \frac{d_1 d_2}{2}$.

Пример 12: Плоштината на четириаголник со заемно нормални дијагонали $d_1 = 12$ и $d_2 = 7$ е еднаква на $P = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{12\cdot 7}{2} = 42.$

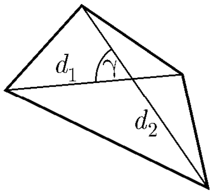
Забелешка 3: Ромбот и делтоидот се четириаголници со заемно нормални дијагонали па нивната плоштина се пресметува со формулата $P = \frac{d_1 d_2}{2}$.





Трапезоид е произволен четириаголник кој нема ниту еден пар паралелни и еднакви страни. Плоштината на трапезоид со дијагонали d_1 и d_2 и агол меѓу нив γ се пресметува со формулата

$$P=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma .$$



Пример 13: Плоштината на трапезоид со дијагонали $d_1=12$ и $d_2=7$ и агол меѓу нив $\gamma=45^0$ е еднаква на $P=\frac{1}{2}12\cdot 7\sin 45^\circ=42\frac{\sqrt{2}}{2}=21\sqrt{2}$ **.**

Правилен многуаголник се нарекува многуаголникот кој има еднакви страни и еднакви агли. Според тоа, квадратот е правилен четириаголник, рамностраниот триаголник е правилен триаголник.

Нека a е страната на правилен n-аголник, r е радиусот на впишаната а R на опишаната кружница околу тој многуаголник. Тогаш

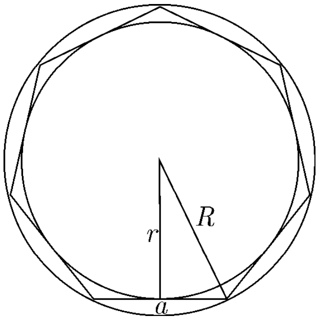
$$r=R\cos\frac{180^\circ}{n} \text{ и } a=2r\,\text{tg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Периметарот на тој многуаголник се пресметува со една од формулите (во зависност од дадените елементи)

$$L=na\,,\ L=2nR\sin\frac{180^\circ}{n}\,,\ L=2nr\,\text{tg}\frac{180^\circ}{n}\,,$$

а неговата плоштина со една од формулите

$$P=\frac{1}{2}nar\,,\ P=\frac{1}{2}Lr\,,\ P=nR^2\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}\,,\ P=\frac{a^2n}{4}\text{ctg}\frac{180^\circ}{n}\,,\ P=nr^2\,\text{tg}\frac{180^\circ}{n}\,.$$



Пример 14: Плоштината на правилен шестаголник со страна $a=\sqrt{3}\,\text{cm}$ е еднаква на $P_6=\frac{6\left(\sqrt{3}\right)^2}{4}\text{ctg}\frac{180^0}{6}=\frac{9\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$, а неговиот периметар е $L_6=6\sqrt{3}\,\text{cm}$.

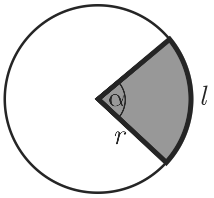
Пример 15: Плоштината на правилен десетаголник со радиус на опишаната кружница $R=7\,\text{cm}$ е еднаква на $P_{10}=\frac{10\cdot 7^2}{2}\sin\frac{360^0}{10}\approx 144,55\,\text{cm}^2$, а неговиот периметар е $L_{10}=2\cdot 10\cdot 7\sin\frac{180^0}{10}\approx 43,4\,\text{cm}$

Пример 16: Плоштината на правилен деветаголник со радиус на впишаната кружница $r=\sqrt{2}\,\text{cm}$ е еднаква на $P_9=9\cdot\sqrt{2}^2\cdot\text{tg}\frac{180^0}{9}\approx 6,48\,\text{cm}^2$, а неговиот периметар е $L_9=2\cdot 9\cdot\sqrt{2}\,\text{tg}\frac{180^0}{9}\approx 9,14\,\text{cm}$.

Должината (периметарот) на кружница со радиус r се пресметува со формулата $L=2r\pi$, а плоштината на круг со радиус r се пресметува со формулата $P=r^2\pi$.

Пример 17: Периметарот на кружница со радиус 7 е еднаква на $L=2\cdot 7\pi=14\pi$, а неговата плоштина е еднаква на $P=7^2\pi=49\pi$

Кружен лак е дел од кружницата зафатен меѓу две нејзини точки. Должината на кружниот лак од кружница со радиус r, што одговара на централен агол α се пресметува со формулата $l=\dfrac{r\pi\alpha}{180^0}$.

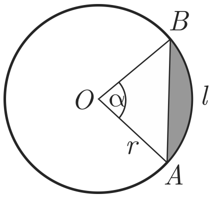


Пример 18: Должината на лакот од кружница со радиус 6 и централен агол 45° е еднаква на $l=\dfrac{6\pi 45^0}{180^0}=\dfrac{3\pi}{2}$.

Кружен исечок од круг со радиус r е делот од кругот зафатен меѓу два радиуси. Плоштината на кружниот исечок од круг со радиус r, со соодветен централен агол α се пресметува со формулата $P=\dfrac{r^2\pi\alpha}{360^0}$ или $P=\dfrac{lr}{2}$.

Пример 19: Плоштината на кружен исечок од круг со радиус $6\,\mathrm{cm}$, со соодветен централен агол од 45° е еднаква на $P=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}\dfrac{3\pi}{2}6=\dfrac{9\pi}{4}\,\mathrm{cm}^2$.

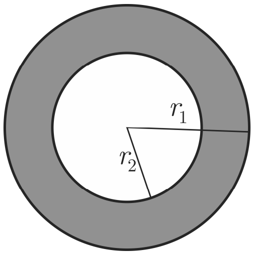
Кружен отсечок е делот од кругот ограничен со една тетива. Плоштината на кружниот отсечок се пресметува со формулата $P=P_1-P_{\Delta ABO}$, каде P_1 е плоштината на кружниот исечок од круг со радиус r, со соодветен централен агол α.



Пример 20: Плоштината на кружен отсечок од круг со радиус $6\,\mathrm{cm}$, со соодветен централен агол 45° е еднаква на

$$P=\frac{9\pi}{4}-\frac{1}{2}r^2\sin 45^\circ=\frac{9\pi}{4}-18\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{9\pi-36\sqrt{2}}{4}\mathrm{cm}^2.$$

Кружен прстен е делот од рамнината ограничен со две концентрични кружници. Плоштината на кружниот прстен што го формираат две концентрични кружници со радиуси r_1 на поголемата и r_2 на помалата се пресметува со формулата $P=r_1^2\pi-r_2^2\pi$ или $P=\left(r_1^2-r_2^2\right)\pi$



Пример 21: Плоштината на кружен прстен формиран од кружници со радиуси 5 и 4 е еднаква на $P=(5^2-4^2)\pi=9\pi$.

Ниво Б Ученикот покажува дека разбира...

НИВО: РАЗБИРАЊЕ

- Должините на страната и дијагоналата во квадрат може да се одредат ако е позната неговата плоштина или периметар.

Пример 22: Должините на страната и дијагоналата на квадрат со:

а) $P=36\,\mathrm{cm}^2$ се $a=\sqrt{P}=\sqrt{36}=6\,\mathrm{cm}$ и $d=\sqrt{2P}=\sqrt{2\cdot 36}=6\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$

б) $L=12\,\mathrm{cm}$ се $a=\frac{L}{4}=\frac{12}{4}=3\,\mathrm{cm}$ и $d=a\sqrt{2}=\frac{L\sqrt{2}}{4}=3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$

- Ако е позната плоштината на правоаголникот или неговиот периметар и должината на една негова страна, тогаш може да се одреди должината на другата негова страна и должината на дијагоналата.

Пример 23: а) Правоаголникот со плоштина $108\,dm^2$ и страна $a=120\,\mathrm{cm}$ има друга страна $b=\frac{P}{a}=\frac{108}{12}=9\,dm$ и дијагонала $d=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12^2+9^2}=\sqrt{225}=15\,dm.$

б) Правоаголникот со периметар $246\,\mathrm{cm}$ и страна $b=80\,\mathrm{cm}$ има друга страна $a=\frac{L}{2}-b=\frac{246}{2}-80=43\,\mathrm{cm}$ и дијагонала $d=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{80^2+43^2}=\sqrt{8249}\approx 90{,}8\,\mathrm{cm}$.

- Должините на висините на паралелограмот може да се одредат ако е позната неговата плоштина и должините на страните.

Пример 24: Паралелограмот со плоштина $56\,\mathrm{cm}^2$ и страни $a=5{,}2\,\mathrm{cm}$ и $b=4{,}8\,\mathrm{cm}$ има висини $h_a=\frac{P}{a}=\frac{56}{5{,}2}=\frac{140}{13}\approx 10{,}77\,\mathrm{cm}$ и $h_b=\frac{P}{b}=\frac{56}{4{,}8}=\frac{35}{3}\approx 11{,}7\,\mathrm{cm}.$

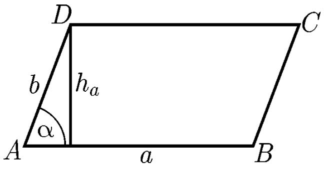
- Односот на должините на висините на паралелограмот може да се одреди ако е познат неговиот периметар и должината на една од страните.

Пример 25: Паралелограмот со периметар $124\,dm$ и страна $a=12\,dm$ има должина на другата страна $b=\frac{L}{2}-a=\frac{124}{2}-12=50\,dm$ и однос на висините

$$\frac{h_a}{h_b}=\frac{b}{a}=\frac{50}{12}=\frac{25}{6}$$

- Аглите во паралелограмот може да се одредат ако се познати должините на неговите страни и плоштината.

Пример 26: Паралелограм со плоштина $35\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$ и страни $10\,\mathrm{cm}$ и $7\,\mathrm{cm}$ има агли $\sin\alpha=\frac{P}{ab}=\frac{35\sqrt{3}}{70}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, па $\alpha=60^\circ$ и $\beta=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.



- Аглите во паралелограмот може да се одредат ако се познати должините на една негова страна и висината спуштена кон другата страна.

Пример 27: Паралелограмот со страна $b = 170\,\mathrm{cm}$ и висина $h_a = 100\,\mathrm{cm}$ има агол $\sin\alpha = \frac{\cancel{a}h_a}{\cancel{a}b} = \frac{100}{170} \approx 0,58824$ па $\alpha \approx 36^0 1'48"$ и $\beta = 180^0 - 36^0 1'48" = 143^0 58'12"$

Во триаголникот може да се одредат должините на висините, плоштината, периметарот, големината на аглите, радиусите на впишаната и опишаната кружница ако се познати должините на неговите страни.

Пример 28: Триаголникот со страни $a = 21, b = 17$ и $c = 10$ има:

а) $P = \sqrt{24\cdot 3\cdot 7\cdot 14} = \sqrt{7056} = 84$, каде $s = \frac{a+b+c}{2} = 24$

б) $h_a = \frac{2P}{a} = 8$, $h_b = \frac{2P}{b} = \frac{168}{17}$ и $h_c = \frac{2P}{c} = 16.8$.

в) $\sin\alpha = \frac{2P}{bc} = \frac{168}{170} \approx 0,98824$, $\sin\beta = \frac{2P}{ac} = \frac{168}{210} \approx 0,8$, па $\alpha \approx 81^0 12', \beta \approx 53^0 7'48"$ и $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) \approx 45^0 40'12"$

г) $r = \frac{P}{s} = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}$ д) $R = \frac{abc}{4P} = \frac{85}{8}$ ѓ) $L = 2s = 48$

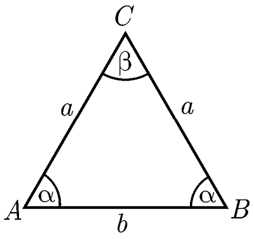
Во триаголникот може да се одредат должините на висините повлечени кон соодветните страни, ако се познати должините на две страни и аголот меѓу нив.

Пример 29: Триаголникот со страни $a = 5, b = 12$ и агол меѓу нив $\gamma = 60^0$ има висини $h_a = \frac{2P}{a} = \frac{\cancel{2}\cdot\frac{\cancel{a}b\sin\gamma}{\cancel{2}}}{\cancel{a}} = b\sin\gamma = 12\cdot\sin 60^0 = 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ и

$$h_b = \frac{2P}{b} = \frac{\cancel{2}\cdot\frac{a\cancel{b}\sin\gamma}{\cancel{2}}}{\cancel{b}} = a\sin\gamma = 5\cdot\sin 60^0 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Во рамнокрак триаголник може да се одреди плоштината, периметарот, радиусите на впишаната и опишаната кружница и големината на аглите ако се познати должините на основата и кракот.

Пример 30: Рамнокрак триаголник со основа $a = 10\,\mathrm{cm}$ и крак $b = 13\,\mathrm{cm}$ има:



а) $h_a = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,\mathrm{cm}$

б) $P = \frac{ah_a}{2} = 60\,\mathrm{cm}^2$

в) $h_b = \frac{2P}{b} = \frac{120}{13} \approx 9,2\,\mathrm{cm}$

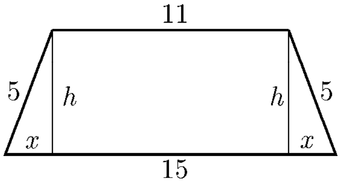
г) $r = \frac{P}{s} = \frac{10}{3}\,\mathrm{cm}$, каде $s = \frac{a+2b}{2} = 18\,\mathrm{cm}$

д) $R = \frac{ab^2}{4bh_b} = \frac{ab}{4h_b} = \frac{130}{\frac{480}{13}} = \frac{169}{48}\,\mathrm{cm}$ ѓ) $L = 2s = 36\,\mathrm{cm}$

е) Аголот меѓу страните a и b е аголот кој лежи на основата, ќе го означиме со α и $\sin\alpha=\frac{2P}{ab}=\frac{12}{13}$, па $\alpha\approx 67^0 22'48"$, од каде аголот при врвот е $\beta=180^0-2\alpha\approx 45^0 14'24"$

Плоштината на рамнокрак трапез, неговата висина и аглите може да се пресмета ако се познати должините на сите негови страни.

Пример 31: Даден е рамнокрак трапез со основи $a=15\text{ cm},\ b=11\text{ cm}$ и крак $c=5\text{ cm}$. Одреди ги висината и плоштината на трапезот.



Од цртежот имаме $15=2x+11$, па $x=2$. Сега, од Питагоровата теорема добиваме $h=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$, па $P=\frac{(15+11)\sqrt{21}}{2}=13\sqrt{21}$

и $\sin\alpha=\frac{h}{c}=\frac{\sqrt{21}}{5}\approx 0,91652$, па $\alpha\approx 66^0 25'12"$, а $\beta=113^0 34'48"$

Ако се познати страните на трапез, тогаш може да се пресмета должината на неговата висина, плоштината и неговите агли.

Пример 32: Даден е трапез со основи $a=35\text{ cm},\ b=14\text{cm}$ и краци $c=13\text{ cm}, d=20\text{ cm}$. Одреди ја висината, плоштината и аглите на трапезот.

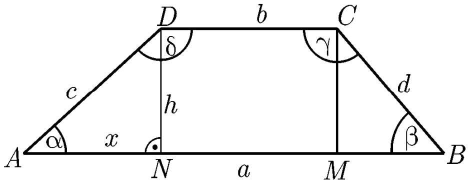
Од цртежот имаме $\overline{AN}+\overline{MB}=35-14=21\text{cm}$. Ако ставиме $\overline{AN}=x$, тогаш $\overline{MB}=21-x$ и од Питагоровата теорема за ΔAND и ΔMBC добиваме $h^2=13^2-x^2$ и $h^2=20^2-(21-x)^2$, соодветно. Според тоа

$$13^2-x^2=20^2-(21-x)^2$$

$$169-\cancel{x^2}=400-441+42x-\cancel{x^2}$$

$$42x=210$$

$$x=5$$



Значи $h^2=13^2-5^2$ т.е. $h=12\text{cm}$. За плоштината на трапезот имаме $P=\frac{(35+14)}{2}\cdot 12=294\text{cm}^2$, а за аглите имаме $\sin\alpha=\frac{12}{13},\sin\beta=\frac{12}{20}$, па $\alpha\approx 67^0$, $\beta\approx 37^0$, $\gamma=180^0-\beta=143^0$ и $\delta=180^0-\alpha=113^0$

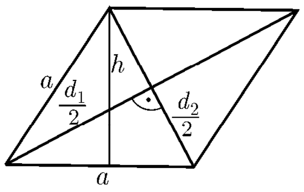
Плоштината на правоаголен трапез може да се пресмета ако се познати должините на основите и големината на острiот агол.

Пример 33: Плоштината на правоаголен трапез со основи $a=23\text{cm},b=15\text{cm}$ и агол $\beta=30^0$ е еднаква на $P=\frac{23+15}{2}\cdot h$, а висината

$h=(a-b)\operatorname{tg}\beta=(23-15)\operatorname{tg}30^0=\frac{8\sqrt{3}}{3}\text{cm}$, па $P=\frac{142\sqrt{3}}{3}\text{cm}^2$.

Ако се познати дијагоналите на ромб, тогаш може да се одредат плоштината, должината на страната на ромбот, неговата висина и аглите.

Пример 34: Ромб со дијагонали $d_1 = 16\ \mathrm{cm}$ и $d_2 = 12\ \mathrm{cm}$ има



а) $P = \dfrac{d_1 d_2}{2} = 96\ \mathrm{cm}^2$

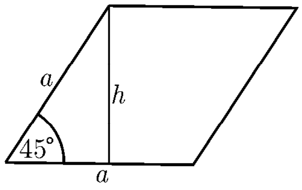
б) $a = \sqrt{\left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2} = 10\ \mathrm{cm}$

в) $h = \dfrac{P}{a} = 9{,}6\ \mathrm{cm}$

г) $\sin\alpha = \dfrac{h}{a} = \dfrac{9{,}6}{10} = 0{,}96$ од каде $\alpha = 73^0 44'$, а $\beta = 180 - \alpha = 106^0 16'$

Ако се познати должината на страната и големината на острииот агол на ромбот, тогаш може да се одредат неговата плоштина и висина.

Пример 35: Ромб со страна $a = 15$ и остар агол $\alpha = 45^0$ има



а) $P = a^2 \sin\alpha = \dfrac{225\sqrt{2}}{2}$

б) $h = a\sin\alpha = \dfrac{15\sqrt{2}}{2}$

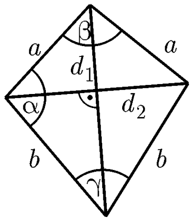
Ако се познати должините на страните на делтоидот и должината на една од неговите дијагонали, тогаш може да се одредат неговата плоштина, периметар, должината на другата дијагонала и неговите агли.

Пример 36: Делтоид со страни $a = 4dm$, $b = 5dm$ и $d_1 = 7dm$ (d_1 е оска на симетрија на делтоидот) има:

а) $P = 2 \cdot P_\Delta = 8\sqrt{6}dm^2$, каде P_Δ е плоштината на триаголникот со страни a, b и d_1 пресметана со Хероновата формула

б) $L = 2(a+b) = 18dm$

в) $d_2 = \dfrac{2P}{d_1} = \dfrac{16\sqrt{6}}{7}dm$



г) Ако со α го означиме аголот меѓу различните страни во делтоидот, тогаш од равенството $\dfrac{ab\sin\alpha}{2} = P_\Delta$ имаме $\alpha \approx 78^0 28'$. Ако, пак, со β го означиме аголот меѓу страните со должина $a = 4\ dm$, тогаш од правоаголниот триаголник со хипотенуза a и катета $\dfrac{d_2}{2}$ имаме $\sin\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\frac{d_2}{2}}{a}$, па $\beta \approx 88^0 50'$. Ако со γ го означиме аголот меѓу страните со должина $b = 5\ dm$, тогаш $\gamma = 360^0 - (2\alpha + \beta) \approx 114^0 14'$.

Пример 37: Делтоид со страни $a = 4\ dm$, $b = 5\ dm$ и $d_2 = 7\ dm$ (d_2 не е оска на симетрија на делтоидот) има:

а) $d_1 = x + y = \sqrt{4^2 - 3{,}5^2} + \sqrt{5^2 - 3{,}5^2} \approx 5{,}51\ dm$, каде x и y се деловите од дијагоналата определени со рамнокраките триаголници.

б) $P=\frac{d_1\cdot d_2}{2}\approx 19,29\ dm^2$

в) $L=2(a+b)=18\ dm$

останатите елементи од делтоидот се одредуваат како во пр. 36

Пример 38: Кружница со радиус 6 е поделена на 8 еднакви делови, а кружница со радиус 8 е поделена на 6 дела. Од двете кружници земен е по еден исечок. Кој од исечоците има поголема плоштина?

Нека $P_1=\frac{6^2\pi\frac{360^0}{8}}{360^0}=\frac{36\pi}{8}$ и $P_2=\frac{8^2\pi\frac{360^0}{6}}{360^0}=\frac{64\pi}{6}$. Јасно $P_2>P_1$

Пример 39: Плоштината на кругот впишан во правилен шестаголник е 100π . Плоштината на шестаголникот ја одредуваме на следниот начин:

Од $r^2\pi=100\pi$ имаме $r=10$, а од $\alpha=\frac{360^0}{6}=60^0$, па

$$P_6=6\cdot 10^2\cdot tg\frac{60^0}{2}=600\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=200\sqrt{3}$$

Пример 40: Околу правилен шестаголник со плоштина $9,375\sqrt{3}$ опишана е кружница. Радиусот на кружницата го одредуваме на следниот начин:

Од равенството $9,375\sqrt{3}=\frac{6\cdot R^2}{2}\sin\frac{360^0}{6}$ имаме $R^2=\frac{25}{4}$ т.е. $R=2,5$

Пример 41: Во кружница е впишан правилен осумаголник, а околу неа е опишан правилен шестаголник. Односот од плоштините на многуаголниците го одредуваме на следниот начин:

Од условот на задачата имаме $P_8=\frac{8\cdot R^2}{2}\sin\frac{360^0}{8}=2R^2\sqrt{2}$, а

$P_6=6R^2tg\frac{180^0}{6}=\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$, па $\frac{P_8}{P_6}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Пример 42: Плоштината на кружен прстен е еднаква на една четвртина од плоштината на помалиот круг. Односот на радиусите на круговите го одредуваме на следниот начин:

Од условот $\left(R^2-r^2\right)\pi=\frac{1}{4}r^2\pi$ имаме $R^2=\frac{5}{4}r^2$ т.е. $R:r=\sqrt{5}:2$

Пример 43: Ако должината на лакот AB е πcm и соодветниот централен агол е $\alpha=15^0$, тогаш периметарот на кружницата ќе го одредиме на следниот начин:

Од равенството $l=\frac{r\pi\alpha}{180^0}$ се добива $l=\frac{2r\pi\alpha}{360^0}=\frac{L\alpha}{360^0}$ т.е. $L=\frac{l\cdot 360^0}{\alpha}$.

Значи бараниот периметар е $L=24\pi cm$.

ЗАДАЧИ ОД НИВО **А** И НИВО **Б**:

1. Плоштината на правоаголник со страни $a = 2\,\text{cm}$ и $b = 4,5\,\text{cm}$ е еднаква на ___________, а неговиот периметар е ______________.

2. Плоштината на паралелограм со страни $a = 12\,\text{cm}$, $b = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$ и агол $\alpha = 45^0$ е еднаква на ________________

3. Плоштината на триаголникот со страни $a = 2$, $b = 3$ и $c = 4$ е еднаква на __________

4. Плоштината на делтоид со дијагонали $d_1 = 15$ и $d_2 = 12$ е еднаква на ______

5. Страните на триаголникот се 13, 14 и 15. Определи ги плоштината, радиусот на вишаната и радиусот на опишаната кружница.

6. Должината на хипотенузата на правоаголен триаголник е $5,6\,cm$, а должината на една негова катета е $5,6\,cm$. Пресметај го периметарот на тој триаголник.

7. Висината на рамнокрак триаголник спуштена кон основата е $8\,cm$, а кракот е $10\,cm$. Пресметај ја плоштината на тој триаголник

8. Во квадрат со страна 8 вписан е друг квадрат чии темиња се средини на страните на првиот. Пресметај ја плоштината на вписаниот квадрат.

9. Ако страната на квадрат со плоштина $64\,cm^2$ се зголеми за $2\,cm$ за колку ќе се зголеми неговата плоштина?

10. Дадена е висината h на ромбот со остар агол од 60^0. Пресметај ја плоштината на ромбот.

11. Страните на паралелограмот се 25 и 6, а една негова дијагонала е 29. Пресметај ја плоштината на паралелограмот.

12. Во круг со радиус $25\,cm$ вписан е рамнокрак трапез со основи $48cm$ и $30cm$ така што центарот на кругот е во внатрешноста на трапезот. Пресметај ја плоштината на трапезот.

13. Во круг со радиус $12,5$ вписан е делтоид со една страна 15. Пресметај ја плоштината на делтоидот.

14. Дијагоналите на ромбот се 2 и $2\sqrt{3}$. Одреди го неговиот периметар.

15. Аголот меѓу две тетиви AB и AC е 60^0. Одреди ја должината на лакот BC ако радиусот на кружницата е $r = 6\,cm$.

16. Одреди ја плоштината на кружен прстен ограничен со кружници со периметар 8π и 20π.

17. Во кружница е впишан правилен осумаголник, а околу неа е опишан квадрат. Одреди го односот од плоштините на многуаголниците.

18.Плоштината на кругот впишан во правилен шестаголник е 9π. Одреди ја плоштината на шестаголникот.

19. Околу правилен шестаголник со плоштина $6\sqrt{3}$ опишана е кружница. Одреди го радиусот на кружницата.

20. Пресметај ја плоштината на делтоид со страни 8 и 10 и агол меѓу нив 60°.

21. Една дијагонала во делтоидот е 7, а неговата плоштина е 45. Најди ја другата дијагонала.

22. Пресметај ги периметарот и плоштината на правилен седумаголник, ако $a=3$ и $r=6$.

23. Пресметај ги периметарот и плоштината на правилен шестаголник, ако $R=6$.

Ниво В

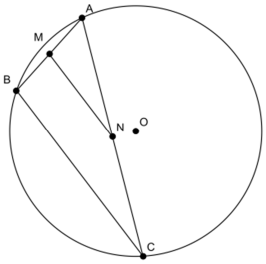
Ученикот треба да го примени го своето знаење и разбирање

НИВО: ПРИМЕНА

Пример 44 : Две страни на паралелограмот се однесуваат како $3:4$, а неговиот периметар е 28. Одреди ги должините на страните на паралелограмот.

Решение. $a:b=3:4=k$, каде k е коефициент на пропорционалноста, па $a=3k, b=4k$ и од $L=28=2(a+b)$ имаме $a+b=14$ т.е. $7k=14$, па $k=2$. Значи $a=6, b=8$

Пример 45: Од произволна точка A што лежи на кружница повлечени се две тетиви со должина $9\,\mathrm{cm}$ и $17\,\mathrm{cm}$. Одреди го радиусот на кружницата, ако растојанието меѓу средините на тетивите е $5\,\mathrm{cm}$.

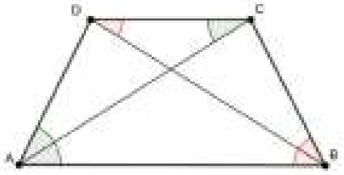


Решение. Да ги означиме тетивите $\overline{AB}=9\,\mathrm{cm}$ и $\overline{AC}=17\,\mathrm{cm}$ и нивните средишни точки со M и N, соодветно. Отсечката MN е средна линија во триаголникот ABC, па $\overline{MN}=\frac{\overline{BC}}{2}$ т.е. $\overline{BC}=10\,\mathrm{cm}$. Со помош на Хероновата формула $P_{\Delta ABC}=36\,\mathrm{cm}^2$, па $R=\frac{abc}{4P}=\frac{9\cdot10\cdot17}{4\cdot36}=\frac{85}{8}\mathrm{cm}$

Пример 46: Одреди ја плоштината на ромбот $ABCD$, ако радиусите на на кружниците опишани околу триаголниците ABC и ABD се R и r, соодветно.

Решение. Ако страната на ромбот ја означиме со $\overline{AB}=\overline{AD}=a$, а дијагоналите со $\overline{AC}=d_1$ и $\overline{BD}=d_2$, тогаш важат равенствата $R=\frac{a^2d_1}{4P_{\Delta ABC}}$ и $r=\frac{a^2d_2}{4P_{\Delta ABD}}$. Ако со P ја означиме плоштината на ромбот, тогаш $P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}P$ и $P_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}P$, па $R=\frac{a^2d_1}{2P}$ и $r=\frac{a^2d_2}{2P}$ од каде се добива дека $d_1=\frac{2PR}{a^2}$ и $d_2=\frac{2\mathrm{P}r}{a^2}$. Со замена на последните две равенства во $P=\frac{d_1d_2}{2}$ се добива: $P=\frac{4P^2Rr}{2a^4}$, односно $a^4=2PRr$ т.е. $a^2=\sqrt{2PRr}$, па $d_1=\frac{2PR}{\sqrt{2PRr}}=\sqrt{\frac{2PR}{r}}$ и $d_2=\sqrt{\frac{2Pr}{R}}$. Со замена на последните две равенства во $d_1{}^2+d_2{}^2=4a^2$ имаме $2\left(\frac{PR}{r}+\frac{Pr}{R}\right)=4\sqrt{2PRr}$, од каде со степенување се добива $P^2\left(\frac{R}{r}+\frac{r}{R}\right)^2=8PRr$ т.е. $P=\frac{8Rr}{\left(\frac{R}{r}+\frac{r}{R}\right)^2}$

Пример 47: Дијагоналите на трапезот $ABCD$ се симетрали на аглите кои лежат на поголемата основа. Одреди ја должината на страните на трапезот ако неговиот периметар е $L = 36\,\mathrm{cm}$, а средната линија е $m = 12\,\mathrm{cm}$.



Решение. Бидејќи AC е симетрала на $\measuredangle BAD$ следува дека $\measuredangle BAC = \measuredangle CAD$. Од тоа што $AB \parallel CD$ следува дека $\measuredangle DCA = \measuredangle CAD$, па ΔACD е рамнокрак т.е. $\overline{AD} = \overline{CD}$. Слично, BD е симетрала на $\measuredangle CBA$, па $\measuredangle CBD = \measuredangle DBA$, а од паралелноста на AB и CD следува дека $\measuredangle CBD = \measuredangle CDB$, па ΔDBC е рамнокрак т.е. $\overline{CD} = \overline{BC}$. Ако ги означиме основите на трапезот $\overline{AB} = a$ и $\overline{CD} = b$, тогаш $L = a + 3b = 36\,\mathrm{cm}$ и $m = \dfrac{a+b}{2} = 12\,\mathrm{cm}$. Значи $36 = 2 \cdot 12 + 2b$ т.е. $b = 6\,\mathrm{cm}$ и $a = 18\,\mathrm{cm}$.

Пример 48: Во рамнокрак трапез $ABCD$ поголемата основа $a = 3,7dm$, кракот $c = 1,5dm$ и аголот меѓу нив $\alpha = 60^0$. Одреди ја должината на средната линија на трапезот.

Решение. Да го разгледаме правоаголниот триаголник AED, каде E е подножјето на висината спуштена од темето D. Од тоа што $\measuredangle EAD = \alpha = 60^0$ имаме дека $\measuredangle ADE = 30^0$, па $\overline{AE} = \dfrac{c}{2} = 0,75dm$. Бидејќи трапезот е рамнокрак, имаме $a = b + 2 \cdot \overline{AE}$ т.е. $b = 2,2dm$, па $m = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{3,7+2,2}{2} = 2,95dm$

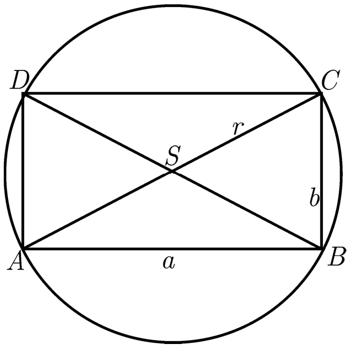
Пример 49 : Пресметај го периметарот на правоаголник, ако неговите страни се однесуваат како $3:7$ а неговата плоштина е $756\,\mathrm{cm}^2$.

Решение. Заради $a:b = 3:7$ имаме дека $a = 3k$ и $b = 7k$, каде k е коефициент на пропорционалноста. Тогаш $ab = 756$, односно $3k \cdot 7k = 756$, па $k^2 = 36$. Следува $k = 6$ или $k = -6$. Случајот $k = -6$ се отфрла затоа што $a = 3k > 0$. Значи, $k = 6$, па $a = 18\,\mathrm{cm}$ и $b = 42\,\mathrm{cm}$ и $L = 2(18 + 42) = 120\,\mathrm{cm}$.

Пример 50: Пресметај ги периметарот и плоштината на правоаголникот ако една негова страна е $1\mathrm{dm}$ а другата е за $2\,\mathrm{cm}$ помала од дијагоналата.

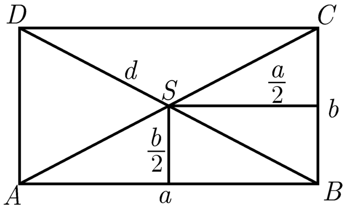
Решение. Нека $a = 10\,\mathrm{cm}$ и $b + 2 = d$. Од Питагоровата теорема имаме $a^2 + (d-2)^2 = d^2$ и оттука $4d = 100 + 4$, па $d = 26\,\mathrm{cm}$. Значи, $b = 24\,\mathrm{cm}$, па периметарот е $L = 2(10 + 24) = 68\,\mathrm{cm}$ а плоштината е $P = 10 \cdot 24 = 240\,\mathrm{cm}^2$.

Пример 51: Во еден правоаголник пресекот на дијагоналите е за $4\,\mathrm{cm}$ поблиску до поголемата отколку до помалата страна. Пресметај ја плоштината на правоаголникот, ако неговиот периметар е $56\,\mathrm{cm}$.



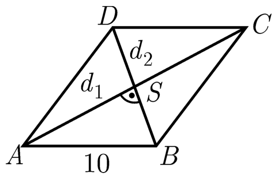
Решение. Нека $a > b$. Тогаш $\dfrac{a}{2} = 4 + \dfrac{b}{2}$, т.е. $a = 8 + b$. Уште важи $2a + 2b = 56$, т.е. $a + b = 28$. Отука добиваме $8 + 2b = 28$, па $b = 10\,\mathrm{cm}$.Значи $a = 18\,\mathrm{cm}$, па плоштината е $P = 180\,\mathrm{cm}^2$.

Пример 52: Пресметај ја плоштината на правоаголник вписан во кружница со радиус $12{,}5\,\text{cm}$ ако едната страна му е $7\,\text{cm}$.



Решение. Дијагоналата на правоаголникот е $d = 2r = 25\,\text{cm}$. Нека $b = 7\,\text{cm}$. Тогаш $a = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24\,\text{cm}$, па плоштината е $P = ab = 24 \cdot 7 = 168\,\text{cm}^2$.

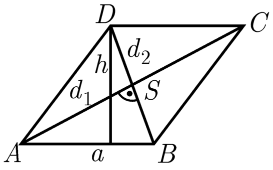
Пример 53: Пресметај ја плоштината на ромб со страна $1\,\text{dm}$ и една дијагонала $12\,\text{cm}$.



Решение. Нека $d_2 = 12\,\text{cm}$. Од правоаголниот триаголник ABS добиваме дека $\left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = 10^2$ па $d_1 = 16\,\text{cm}$.

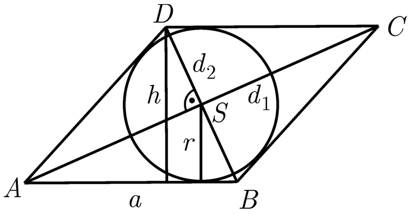
Плоштината е $P = \frac{d_1 d_2}{2} = 96\,\text{cm}^2$.

Пример 54: Висината на ромбот е $48\,\text{cm}$ а поголемата дијагонала $8\,\text{dm}$. Пресметај го периметарот на ромбот.



Решение. Значи $h = 48\,\text{cm}$, $d_1 = 80\,\text{cm}$ и нека a е страната на ромбот. Бидејќи $P = ah = \frac{d_1 d_2}{2}$ добиваме $48a = \frac{80 d_2}{2}$, т.е. $a = \frac{5}{6} d_2$. Со S да ја означиме пресечната точка на дијагоналите на ромбот. Од правоаголниот триаголник ABS добиваме дека $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$, т.е. $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$. Оттука добиваме $80^2 + d_2^2 = 4\frac{25}{36} d_2^2$, т.е. $\frac{16}{9} d_2^2 = 80^2$, па $d_2 = 60\,\text{cm}$. Според тоа $a = \frac{5}{6} 60 = 50\,\text{cm}$, па периметарот е $L = 4a = 200\,\text{cm}$.

Пример 55: Пресметај ја плоштината на ромб со помала дијагонала $6\,\text{cm}$ и радиус на вписаната кружница $24\,\text{mm}$.



Решение. Бидејќи дијагоналите се и симетрали на аглите во ромбот следува дека центарот на вписаната кружница е во пресекот на дијагоналите. Според тоа $h = 2r = 4{,}8\,\text{cm}$.

За плоштината имаме $P = ah = \frac{d_1 d_2}{2}$, т.е. $4{,}8a = \frac{6 d_1}{2}$ и оттука добиваме дека $d_1 = 1{,}6a$.

Од правоаголниот триаголник ABS добиваме дека $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$, т.е. $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$, па следува дека $(1{,}6a)^2 + 6^2 = 4a^2$, па $a = 5\,\text{cm}$.

Значи, плоштината е $P = ah = 4{,}8 \cdot 5 = 24\,\text{cm}^2$.

Пример 56: Периметарот на рамнокрак триаголник е $64\,\mathrm{cm}$ а разликата на кракот и основата е $11\,\mathrm{cm}$. Пресметај ја плоштината на триаголникот.

Решение. Нека a е основата а b кракот на траиголникот. Тогаш имаме $a+2b=64$ и $b-a=11$. Со собирање на овие равенства добиваме $3b=75$, па $b=25\,\mathrm{cm}$. оттука следува дека $a=14\,\mathrm{cm}$.

Од Питагоровата теорема за висината добиваме

$$h=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{625-49}=24\,\mathrm{cm},$$

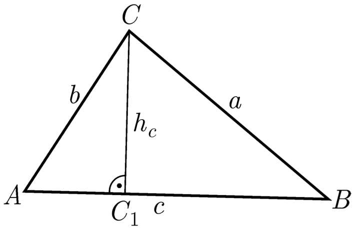
па плоштината е $P=\dfrac{ah}{2}=168\,\mathrm{cm}^2$.

Пример 57: Пресметај ја плоштината на триаголникот ако $a=73\,\mathrm{dm}$, $b=52\,\mathrm{dm}$ и $h_c=48\,\mathrm{dm}$.

Решение. Од Питагоровата теорема за ΔC_1BC и ΔAC_1C добиваме

$\overline{C_1B}=\sqrt{a^2-h_c^2}=55\,\mathrm{dm}$ и $\overline{AC_1}=\sqrt{b^2-h_c^2}=20\,\mathrm{dm}$

па следува дека $c=75\,\mathrm{dm}$. Сега, плоштината е $P=\dfrac{75\cdot 48}{2}=1800\,\mathrm{dm}^2$.



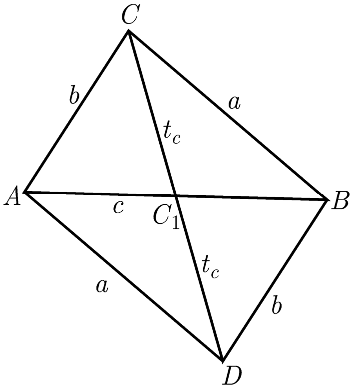
Пример 58: Пресметај ја плоштината на триаголник ако две негови страни имаат должини $27\,\mathrm{cm}$ и $29\,\mathrm{cm}$ а тежишната линија кон третата страна има должина $26\,\mathrm{cm}$.

Решение. Нека $a=29\,\mathrm{cm}$, $b=27\,\mathrm{cm}$ и $t_c=\overline{CC_1}=26\,\mathrm{cm}$. Нека D е точка колинеарна со C и C_1 таква што $\overline{CD}=2t_c$. Тогаш $\Delta AC_1C\cong BC_1D$ и $\Delta AC_1D\cong\Delta BC_1C$ (бидејќи $\overline{AC_1}=\overline{C_1B}=\dfrac{c}{2}$, $\overline{CC_1}=\overline{C_1D}=t_c$ и $\measuredangle AC_1C=\measuredangle DC_1B$), па четириаголникот $ADBC$ е паралелограм. Затоа бараната плоштина е

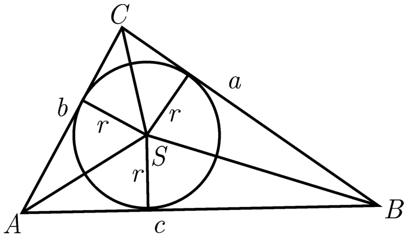
$$P_{\Delta ABC}=\frac{P_{ADBC}}{2}=\frac{2P_{\Delta ADC}}{2}=P_{\Delta ADC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-2t_c)}$$

каде $s=\dfrac{a+b+2t_c}{2}=54\,\mathrm{cm}$.

Сега, $P_{\Delta ABC}=\sqrt{54\cdot 27\cdot 25\cdot 2}=270\,\mathrm{cm}^2$.



Пример 59: Нека S е центарот на впишаната кружница во траиголникот ABC и нека $P_{\Delta ABS}=36\,\mathrm{cm}^2$, $P_{\Delta CAS}=40\,\mathrm{cm}^2$ и $P_{\Delta BCS}=68\,\mathrm{cm}^2$. Пресметај ги страните на триаголникот.

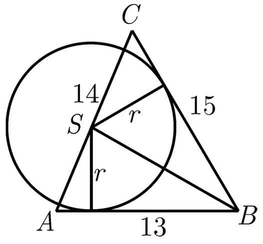


Решение. Бидејќи $P_{\Delta ABS}=36=\dfrac{cr}{2}$, $P_{\Delta CAS}=40=\dfrac{br}{2}$ и $P_{\Delta BCS}=68=\dfrac{ar}{2}$ добиваме $cr=72$, $br=80$ и $ar=136$ и оттука $a:b:c=136:80:72=17:10:9$. Значи, $a=17k$, $b=10k$ и $c=9k$, и притоа $k>0$ е коефициент на пропорционалност.

Ако s е полупериметарот на триаголникот, тогаш $s=\frac{a+b+c}{2}=18k$.

Плоштината на триаголникот е $144\,\text{cm}^2$, па од Хероновата формула добиваме $144=\sqrt{18k\cdot 9k\cdot 8k\cdot k}$, т.е. $144=36k^2$. Оттука $k=2$. Сега, страните се $a=34\,\text{cm}$, $b=20\,\text{cm}$ и $c=18\,\text{cm}$.

Пример 60: Страните на еден триаголник се $13\,\text{cm}$, $14\,\text{cm}$ и $15\,\text{cm}$. Одреди го радиусот на кружницата со центар на средната по големина страна која ги допира другите две страни.



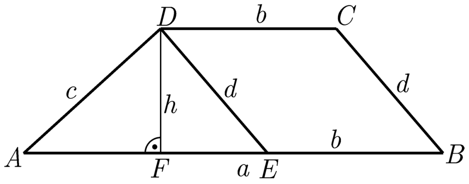
Решение. Нека $a=15\,\text{cm}$, $b=14\,\text{cm}$ и $c=13\,\text{cm}$. Плоштината на триаголникот е

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8}=84\,\text{cm}^2.$$

Нека S е центарот на таа кружница и r е нејзиниот радиус. Тогаш $P=P_{\Delta ABS}+P_{\Delta SBC}=\frac{cr}{2}+\frac{ar}{2}$, т.е. $84=14r$.

Следува дека $r=6\,\text{cm}$.

Пример 61: Пресметај ја плоштината на трапез со основи $20\,\text{cm}$ и $11\,\text{cm}$ и краци $17\,\text{cm}$ и $10\,\text{cm}$.



Решение. Нека E е точка од страната AB таква што $\overline{EB}=b$. Тогаш $EBCD$ е паралелограм и $\overline{DE}=d$. Следува дека $\overline{AE}=a-b=9\,\text{cm}$.

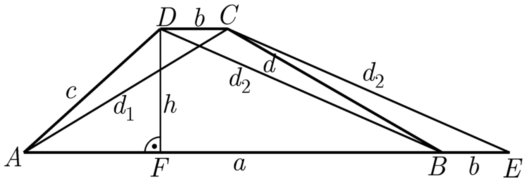
Сега можеме да ја пресметаме висината на трапезот (таа е и висина во триаголникот AED).

Имаме $s=\frac{9+17+10}{2}=18$, па $P_{\Delta AED}=\sqrt{18(18-9)(18-17)(18-10)}=36\,\text{cm}^2$.

Следува $h(a-b)=36$, т.е. $9h=36$, па $h=4\,\text{cm}$. Плоштината на трапезот е

$$P=\frac{(a+b)h}{2}=\frac{31\cdot 4}{2}=62\,\text{cm}^2.$$

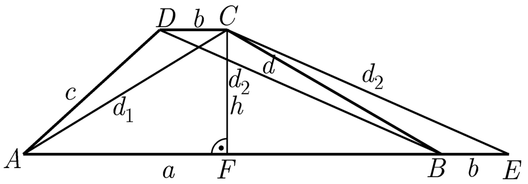
Пример 62: Пресметај ја плоштината на трапез со основи $19\,\text{cm}$ и $2\,\text{cm}$ и дијагонали $17\,\text{cm}$ и $10\,\text{cm}$.



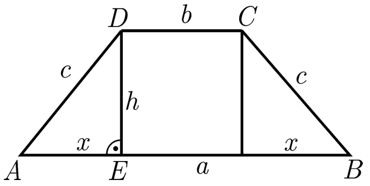
Решение. Нека E е точка од продолжението на AB (од страната на B) така што $\overline{BE}=b$. Тогаш $BECD$ е паралелограм па $\overline{CE}=d_2$. Притоа, плоштината на трапезот е еднаква на плоштината на триаголникот AEC, т.е. $P_{ABCD}=\frac{(a+b)h}{2}$, а триаголникот AEC има страна $a+b$ и висина соодветна на неа h. Ги знаеме сите страни на ΔAEC, а тоа се $a+b$, d_1 и d_2 па неговата плоштина може да ја пресметаме од Хероновата формула. Имаме $s=\frac{21+17+10}{2}=24$, па

$$P_{ABCD}=P_{\Delta AEC}=\sqrt{24\cdot 3\cdot 7\cdot 14}=84\,\text{cm}^2.$$

Пример 63: Пресметај ја плоштината на трапез со дијагонали 13 и 15 и висина 12.



Решение. Нека $d_1 = 13$ и $d_2 = 15$. Исто како во претходната задача го формираме триаголникот AEC. Знаеме две страни на тој триаголник и висината соодветна на третата. Триаголниците AFC и CFE се правоаголни, па имаме $\overline{AF} = \sqrt{d_1^2 - h^2} = 5$ и $\overline{FE} = \sqrt{d_2^2 - h^2} = 9$. Спред тоа $a + b = 14$. За плоштината добиваме $P_{ABCD} = P_{\Delta AEC} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 7} = 84$.

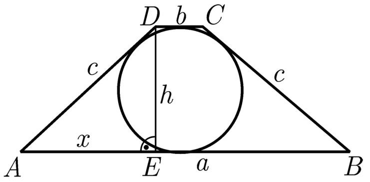


Пример 64: Пресметај го периметарот на рамнокрак трапез со основи a и b и крак c ако $a : b : c = 10 : 4 : 5$ а неговата плоштина е $112\,\mathrm{cm}^2$.

Решение. Од $a : b : c = 10 : 4 : 5$ добиваме дека постои $k > 0$ така што $a = 10k$, $b = 4k$ и $c = 5k$. Тогаш $x = \dfrac{a-b}{2} = 3k$. Од правоаголниот триаголник AED добиваме $h = \sqrt{c^2 - x^2} = 4k$, па заменувајќи во плоштината добиваме $112 = \dfrac{14k \cdot 4k}{2}$ и оттука $k = 2$.

Сега $a = 20\,\mathrm{cm}$, $b = 8\,\mathrm{cm}$ и $c = 10\,\mathrm{cm}$, па периметарот е $L = 20 + 8 + 2 \cdot 10 = 48\,\mathrm{cm}$.

Пример 65: Во рамнокрак трапез со основи $8\,\mathrm{cm}$ е впишана кружница. Пресметај ја плоштината на трапезот.

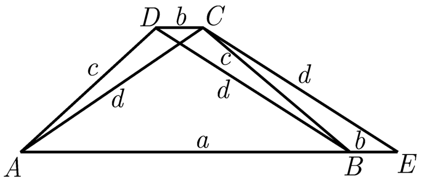


Решение. Бидејќи трапезот е тангентен важи $a + b = 2c$, па следува дека $c = 13\,\mathrm{cm}$.

Сега, $x = \dfrac{a-b}{2} = 5\,\mathrm{cm}$ и $h = \sqrt{c^2 - x^2} = 12\,\mathrm{cm}$,

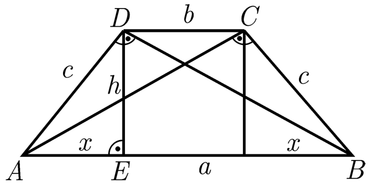
па плоштината на трапезот е $P = \dfrac{(a+b)h}{2} = 169\,\mathrm{cm}^2$.

Пример 66: Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со дијагонала 5 ако таа со поголемата основа зафаќа агол од 45°.



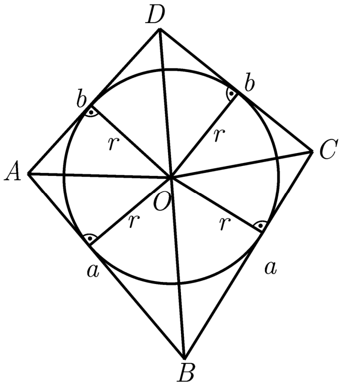
Решение. Да го формираме триаголникот AEC така што $CE \parallel DB$ и $\overline{BE} = b$. Јасно, тој е рамнокрак, па $45^\circ = \sphericalangle CAB = \sphericalangle AEC$. Следува дека $\sphericalangle ACE = 90^\circ$. Според тоа, ΔAEC е рамнокрак правоаголен со прав агол во C. Сега имаме $P_{ABCD} = P_{\Delta AEC} = \dfrac{d^2}{2} = \dfrac{25}{2}$.

Пример 67: Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи 39 и 15 ако неговите дијагонали се нормални на краците.



Решение. Триаголникот ABD е правоаголен, па важи $h^2 = \overline{AE} \cdot \overline{EB}$.

Имаме $\overline{AE}=\frac{a-b}{2}=12$ и $\overline{EB}=a-12=27$, па следува дека $h^2=12\cdot 27=324$ и оттука $h=18$. Сега, плоштината е $P=\frac{a+b}{2}h=486$.

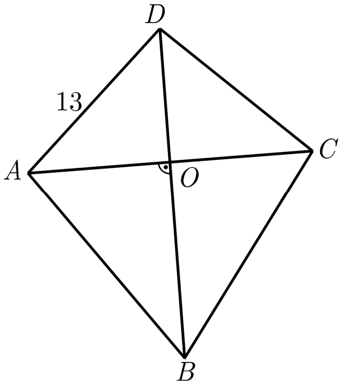


Пример 68: Во делтоид со страни 4 и 5 е впишана кружница со радиус 2. Пресметај ја плоштината на делтоидот.

Решение. Нека $a=5$, $b=4$, $r=2$ и нека O е центарот на впишаната кружница во делтоидот. Тогаш бараната плоштина е

$$P=P_{\Delta ABO}+P_{\Delta BCO}+P_{\Delta CDO}+P_{\Delta DAO}=\frac{r}{2}(2a+2b)=r(a+b)=18$$

Пример 69: Одреди го периметарот на делтоидот со една страна 13 една дијагонала 24 и плоштина 480.



Решение. Заради $P=\frac{d_1d_2}{2}$ може да се најде другата дијагонала.

Нека $\overline{AD}=13$, $\overline{AC}=24$. Тогаш $\overline{BD}=40$ и $\overline{AO}=\frac{\overline{AC}}{2}=12$. Ако $\overline{AD}=13$, тогаш $\overline{DO}=\sqrt{13^2-12^2}=5$, па $\overline{BO}=35$. Сега, $\overline{AB}=\sqrt{\overline{AO}^2+\overline{BO}^2}=37$.

Периметарот е $L=13+13+37+37=100$.

Сега, нека $\overline{AD}=13$ и $\overline{DB}=24$. Тогаш $\overline{AC}=40$, па $\overline{AO}=20$, што не е можно бидејќи катетата во правоаголен триаголник не може да биде поголема од хипотенузата.

Аналогно се постапува и во останатите случаи.

Пример 70: Даден е триаголник ABC со страни a,b и c. Одреди ја должината на висината h_c.

Решение. 1 случај) ΔABC е остроаголен. Тогаш точката D, подножјето на висината h_c лежи на страната AB. Да означиме $\overline{AD}=x$, $\overline{BD}=c-x$, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ и $\overline{CD}=h_c$. Триаголниците ADC и DBC се правоаголни, па според Питагоровата теорема имаме $h_c{}^2=b^2-x^2$ и $h_c{}^2=a^2-(c-x)^2$ т.е. $b^2-x^2=a^2-(c-x)^2$ од каде со средување се добива $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$. Значи

$$h_c=\sqrt{b^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2}$$

2 случај) ΔABC е тапоаголен, со тап агол во темето B. Тогаш точката D, подножјето на висината h_c лежи на продолжението на страната AB. Да означиме $\overline{AD}=c+x$, $\overline{BD}=x$, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ и $\overline{CD}=h_c$. Триаголниците ADC и BDC се правоаголни, па според Питагоровата теорема имаме

$h_c{}^2=b^2-(c+x)^2$ и $h_c{}^2=a^2-x^2$ т.е. $b^2-(c+x)^2=a^2-x^2$ од каде се добива $x=\dfrac{b^2-c^2-a^2}{2c}$. Значи $h_c=\sqrt{b^2-\left(c+\dfrac{b^2-c^2-a^2}{2c}\right)^2}=\sqrt{b^2-\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2}$.

Конечно, може да заклучиме дека изразот за висината не зависи од видот на триаголникот.

Пример 71: Одреди го радиусот на опишаната кружница R околу рамнокракиот триаголник ABC со основа a и крак b.

Решение. 1 случај) Центарот на кружницата лежи на висината CD на триаголникот ABC. Да означиме $\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AO}=R$. Тогаш $\overline{AD}=\dfrac{a}{2}$ и ΔADC и ΔADO се правоаголни, па од Питагоровата теорема имаме $\overline{CD}^2=b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ и $R^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\overline{OD}^2$. Бидејќи $\overline{OD}=\overline{CD}-\overline{CO}=\overline{CD}-R$ имаме $R^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-2R\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}+R^2$ т.е. $b^2-2R\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=0$ од каде

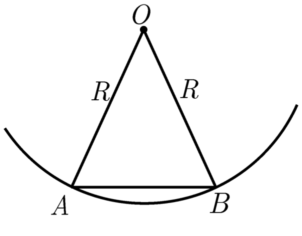
$$R=\frac{b^2}{2\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}}.$$

2 случај) Центарот на кружницата лежи на продолжението на висината CD на триаголникот ABC. Да означиме $\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AO}=R$. Тогаш $\overline{AD}=\dfrac{a}{2}$ и ΔADC и ΔADO се правоаголни, па од питагоровата теорема имаме $\overline{CD}^2=b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ и $R^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\overline{OD}^2$. Бидејќи $\overline{OD}=\overline{CO}-\overline{CD}=R-\overline{CD}$ имаме $R^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+R^2-2R\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}+b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ т.е. $b^2-2R\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=0$ од каде $R=\dfrac{b^2}{2\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}}$. Конечно изразот за радиусот на опишаната кружница не зависи од видот на триаголникот.

3 случај) Ако центарот на кружницата лежи на основата AB, тогаш $R=\dfrac{a}{2}$.

Да забележиме дека радиусот на опишаната кружница може да се одреди и со помош на формулата $R=\dfrac{ab^2}{4P}$, каде за одредување на P се користи Хероновата формула.

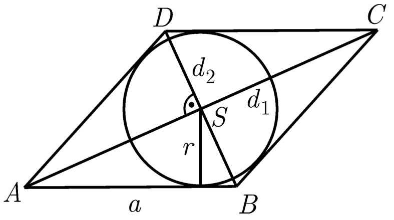
Пример 72: Одреди ја должината на најдолгата дијагонала на правилен триесетаголник со страна $a=6cm$.



Решение. Карактеристичниот триаголник на правилен триесетаголник со страна $a=6cm$ е ΔABO за кој

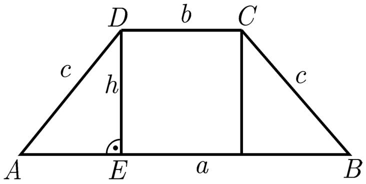
$\measuredangle AOB=\frac{360^0}{30}=12^0$ и $\overline{AB}=6cm$. Најдолгата дијагонала на правилен триесетаголник има должина еднаква на дијаметарот на опишаната кружница на многуаголникот т.е. $d=2R=2\overline{AO}=2\cdot\frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{\sin\frac{12^0}{2}}=\frac{\overline{AB}}{\sin 6^0}\approx 57,4cm$

Пример 73: Во ромб е впишана кружница со радиус r. Изрази ја должината на страната на ромбот преку радиусот, ако е познато дека таа е шест пати помала од збирот на дијагоналите.



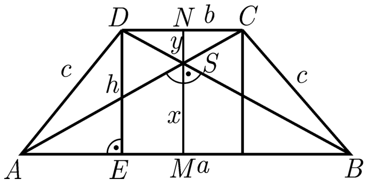
Решение. Познато е дека $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=a^2$, од каде $d_1^{\ 2}+d_2^{\ 2}=4a^2$. Бидејќи во ромбот е впишана кружница со радиус r имаме $h=2r$, па за плоштината на ромбот важи равенството $\frac{d_1\cdot d_2}{2}=a\cdot 2r$, од каде се добива дека $d_1\cdot d_2=4ar$. Од условот на задачата имаме $6a=d_1+d_2$. Со квадрирање на ова равенство и со замена на $d_1\cdot d_2=4ar$ се добива $4a^2-ar=0$, од каде $a\left(4a-r\right)=0$. Значи може $a=0$, што не е можно затоа што a е должина на страната на ромб, па мора $a=\frac{r}{4}$.

Пример 74: Во рамнокрак трапез со остар агол $\alpha=45^0$, помалата основа е $12cm$, а висината $3cm$. Пресметај ја плоштината на трапезот.



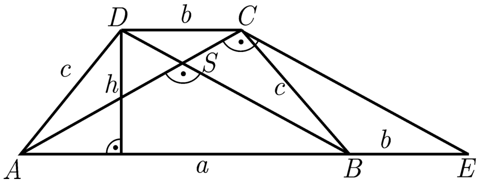
Решение. Според цртежот ΔAED е рамнокрак правоаголен, па $\overline{AE}=3cm$, односно должината на поголемата основа е $a=2\cdot 3+12=18cm$, па $P=\frac{\left(18+12\right)\cdot 3}{2}=45cm^2$

Пример 75: Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи $20cm$ и $12cm$ чии дијагонали се заемно нормални.



Решение. 1 начин) Да го означиме пресекот на дијагоналите со S. Тогаш ΔABS е рамнокрак правоаголен со висина $\overline{SM}=x$, па од Евклидовите теореми следува $x^2=\overline{AM}\cdot\overline{MB}$ т.е. $x=10cm$. Аналогно од ΔCDS следува дека $y=\overline{SN}=6cm$. Конечно $h=x+y=16cm$, па $P=\frac{\left(20+12\right)\cdot 16}{2}=256cm^2$

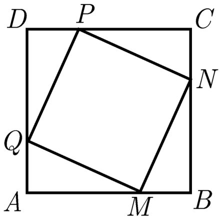
2 начин) Ако низ точката C повлечеме права паралелна со BD до пресекот со продолжението на AB во точка E, тогаш $BECD$ е паралелограм, а ΔAEC е рамнокрак правоаголен со хипотенуза $\overline{AE}=32cm$, па од Евклидовите теореми



$h^2 = \left(\frac{32}{2}\right)^2$ т.е. $h = 16cm$. Конечно за плоштината на трапезот имаме

$$P = \frac{(20+12)\cdot 16}{2} = 256cm^2$$

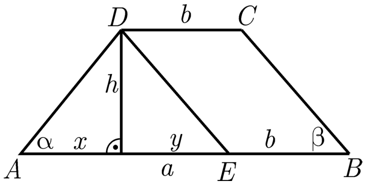
Пример 76: Во квадрат со страна a впишан е друг квадрат чии темиња ја делат страната на првиот квадрат во однос $2:3$. Одреди го односот на плоштините на квадратите.



Решение. Нека во квадратот $ABCD$ е вписан квадратот $MNPQ$ и според условот на задачата $\overline{AM} : \overline{MB} = 2:3 = k$. Тогаш $\overline{AM} = 2k$, $\overline{MB} = 3k$, па $\overline{AB} = a = 5k$ и $\overline{MN} = a_1 = \sqrt{(3k)^2 + (2k)^2} = \sqrt{13k^2}$. За односот на плоштините имаме $\frac{P}{P_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{25k^2}{13k^2} = \frac{25}{13}$

Пример 77: Одреди ги периметарот и плоштината на трапезот со висина $12cm$ ако неговите основи се однесуваат како $16:6$ и $tg\alpha = \frac{4}{3}$, $tg\beta = \frac{3}{4}$, каде α и β се острите агли во трапезот.

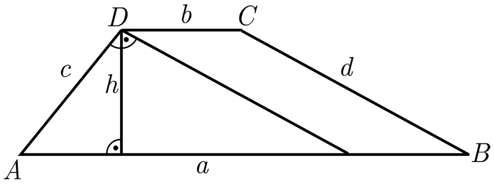
Решение. Да ги означиме со x и y деловите од AE на кои ги дели подножјето на висината h во ΔAED ($DE \parallel BC$). Тогаш од $tg\alpha = \frac{h}{x}$ имаме дека $x = 9cm$.



Слично $y = 16cm$. Од условот на задачата иаме дека $a : b = 16:6 = k$, од каде $a = 16k, b = 6k$. Бидејќи $a = b + x + y$, имаме $k = \frac{5}{2}$, па $a = 40cm, b = 15cm$.

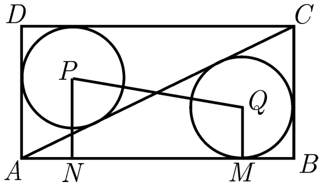
Плоштината на трапезот е $P = 330cm^2$. Останува да ги најдеме должините на краците на трапезот. Со примена на Питагоровата теорема имаме $\overline{AD} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15cm$ и $\overline{DE} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20cm$. Конечно периметарот на трапезот е $L = 90cm$

Пример 78: Пресметај ја плоштината на трапезот со основи $a = 8cm$, $b = 2cm$ и краци $c = 8cm$ и $d = 10cm$.



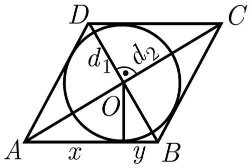
Решение. Ако во внатрешноста на трапезот нацртаме триаголник со една страна паралелна со еден од краците на трапезот ќе добиеме триаголник со страни $8cm, 6cm$ и $10cm$ кои образуваат питагорина тројка броеви, па според тоа триаголникот е правоаголен со висина $h = c = 8cm$. Плоштината на трапезот е $P = \frac{(8+2)\cdot 8}{2} = 40cm^2$.

Пример 79: Даден е правоаголник $ABCD$ со страни $8cm$ и $6cm$. Со дијагоналата AC поделен е на два триаголници во кои се впишани кружници. Одреди го растојанието меѓу центрите на кружниците.



Решение. Од Питагоровата теорема имаме $\overline{AC}=\sqrt{8^2+6^2}=10cm$, па од равенството $P=rs$ за радиусот на впишаните кружници имаме $r=2cm$. Четириаголникот $NMQP$ е правоаголен трапез, каде P и Q се центрите на впишаните кружници, а N и M се нивните подножја на страната AB од правоаголникот, соодветно. Според тоа $\overline{PQ}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}cm$.

Пример 80: Во ромб со дијагонали $30cm$ и $40cm$ впишана е кружница која ја дели страната на ромбот на два дела. Одреди ја должината на поголемиот дел.



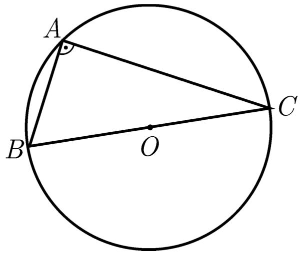
Решение. Јасно е дека $a^2=\left(\frac{30}{2}\right)^2+\left(\frac{40}{2}\right)^2$ т.е. $a=25cm$.

Од равенствата $h=2r$ и $ah=\frac{d_1d_2}{2}$ имаме дека

$r=\frac{d_1d_2}{4a}=12cm$. Бидејќи ΔABO е правоаголен, од Евклидовите теореми имаме $r^2=xy$, каде x и y се деловите од страната на ромбот добиени од допирната точка на впишаната кружница. Поголемиот дел од страната ќе го добиеме како решение на системот $\begin{cases} x+y=25 \\ xy=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=25-x \\ x^2-25x+144=0 \end{cases}$.

Имаме $x_1=16cm$, $x_2=9cm$ и соодветно $y_1=9cm$, $y_2=16cm$. Јасно поголемиот дел е долг $16cm$.

Пример 81: Тетивите $\overline{AB}=6cm$ и $\overline{AC}=8cm$ се заемно нормални. Одреди ја плоштината на кругот.

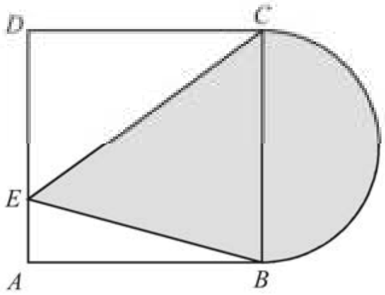


Решение. Бидејќи ΔABC е правоаголен, кружницата е опишана за него и нејзиниот центар лежи на средината на хипотенузата BC. Од Питагоровата теорема имаме дека $\overline{BC}=\sqrt{6^2+8^2}=10cm$, па радиусот на кружницата е $r=5cm$, а бараната плоштина е $P=25\pi cm^2$.

Пример 82: Над катетите на правоаголен триаголник конструирани се рамнострани триаголници со плоштини $64\sqrt{3}cm^2$ и $36\sqrt{3}cm^2$. Одреди ја плоштината на опишаната кружница за триаголникот.

Решение. Катетите на триаголникот се $12cm$ и $16cm$, па хипотенузата е $20cm$.

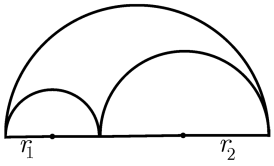
Јасно радиусот на опишаната кружница е $R=\frac{c}{2}=10cm$, па бараната плоштина е $P=100\pi cm^2$.



Пример 83: Пресметај ја плоштината на исенчената фигура ако $ABCD$ е квадрат со дијагонала $4cm$, BC е дијаметар на круг и E е произволна точка од страната AD.

Решение. Плоштината на исенчената фигура е збир од плоштините на половина круг со радиус $r = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\frac{4}{\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{2}cm$ и триаголник со основа $a = 2\sqrt{2}$ и висина $h = \overline{AB} = 2\sqrt{2}cm$. Според тоа плоштината на фигурата е $P = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 \pi + \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^2 = \left(\pi + 4\right)cm^2$.

Пример 84: Од полукруг со радиус $R = 10cm$, отсечени се два полукруга со радиуси $r_1 = 3cm$ и $r_2 = 7cm$ чии центри лежат на дијаметарот на полукругот и се допираат меѓу себе. Одреди ја плоштината на остатокот.



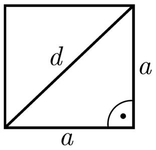
Решение. (остатокот се вика ARBELOS што во превод значи чевларски нож)

Според цртежот, имаме $r_1 + r_2 = R$, па со квадрирање на ова равенство се добива $r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = R^2$. Плоштината на остатокот е разлика од плоштината на полукругот и збирот од плоштините на двата полукруга, па

$P = \frac{R^2\pi}{2} - \left(\frac{r_1^2\pi + r_2^2\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(R^2 - r_1^2 - r_2^2\right) = r_1r_2\pi$, т.е. $P = 21\pi cm^2$

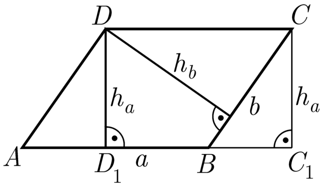
Ниво Г — Ученикот треба да користи логичко следство

НИВО: АНАЛИЗА, СИНТЕЗА И ВРЕДНУВАЊЕ



Плоштината P на квадрат со дијагонала d е еднаква на $P=\frac{d^2}{2}$. Докажи.

Доказ. Нека страната на квадратот е a. Тогаш од Питагоровата теорема имаме $a^2+a^2=d^2$, т.е. $a^2=\frac{d^2}{2}$. Според тоа, $P=a^2=\frac{d^2}{2}$.



Плоштината P на паралелограм со страни a и b и висини спуштени кон нив h_a и h_b, соодветно, е еднаква на $P=ah_a=bh_b$. Докажи.

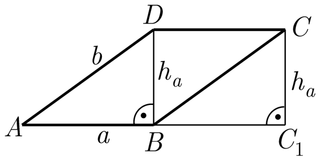
Доказ. Ќе докажеме дека $P=ah_a$.

Нека D_1 е подножјето на висината спуштена од D.

а) Точката D_1 припаѓа на страната AB. Нека C_1 е подножјето на висината спуштена од C кон AB. Јасно, C_1 припаѓа на продолжението на AB. Тогаш триаголниците AD_1D и BC_1C се правоаголни и $\measuredangle D_1AD=\measuredangle C_1BC$, па следува дека и $\measuredangle ADD_1=\measuredangle BCC_1$. Притоа, $\overline{DD_1}=\overline{CC_1}=h_a$ и $\overline{AD}=\overline{BC}=b$, па следува дека $\Delta AD_1D\cong\Delta BC_1C$. Според тоа, $P_{AD_1D}=P_{BC_1C}$.

Сега, $P_{ABCD}=P_{AD_1D}+P_{D_1BCD}=P_{BC_1C}+P_{D_1BCD}=P_{D_1C_1CD}$. Од $\Delta AD_1D\cong\Delta BC_1C$ следува дека $\overline{AD_1}=\overline{BC_1}$, па четириаголникот D_1C_1CD е правоаголник со страни a и h_a, па неговата плоштина е ah_a. Конечно,

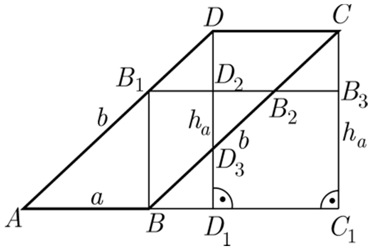
$$P_{ABCD}=P_{D_1C_1CD}=ah_a.$$



б) Точката D_1 се совпаѓа со B.

Слично како во случајот а) добиваме дека $\Delta ABD\cong\Delta BC_1C$, па

$$P_{ABCD}=P_{ABD}+P_{BDC}=P_{BC_1C}+P_{BDC}=P_{BC_1CD}=ah_a.$$



в) Точката D_1 припаѓа на продолжението на страната AB.

Како и досега, нека C_1 е подножјето на висината спуштена од C. Да повлечеме нормала во B на AB и нека B_1 е пресекот на таа нормала со првата AD. Јасно, точката B_1 припаѓа на отсечката AD.

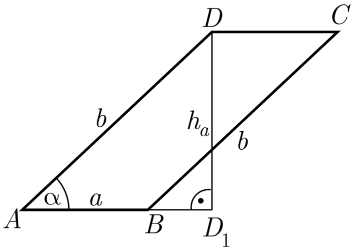
Од B_1 повлекуваме права p паралелна на AB, и нека $\{B_2\}=BC\cap p$, $\{B_3\}=p\cap CC_1$, $\{D_2\}=DD_1\cap BB_3$ и $\{D_3\}=DD_1\cap BB_3$. Според б) добиваме дека

$P_{ABB_2B_1} = P_{D_1C_1B_3D_2}$, а бидејќи пресекот на двата четириаголници е триаголникот $D_2B_2D_3$ следува дека $P_{ABD_3D_2B_1} = P_{D_1C_1B_3B_2D_3}$.

Слично како во а) добиваме дека $\Delta B_1D_2D \cong \Delta B_2B_3C$, па нивните плоштини се еднакви.
Конечно,

$$P_{ABCD} = P_{ABD_3D_2B_1} + P_{D_3B_2D_2} + P_{B_1D_2D} + P_{DD_2B_2C} = P_{D_1C_1B_3B_2D_3} + P_{D_3B_2D_2} + P_{B_2B_3C} + P_{DD_2B_2C} = P_{D_1C_1CD} = ah_a$$

- Од оваа формула, добиваме дека плоштината на ромб со страна a и висина h е еднаква на $P = ah$.



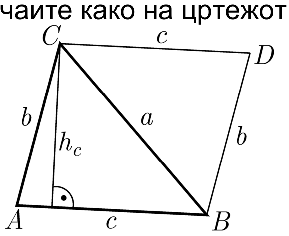
- Плоштината P на паралелограм со страни a и b и остар агол меѓу нив α е еднаква на $P = ab\sin\alpha$. Докажи.

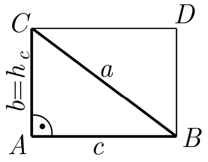
Доказ. Нека D_1 е подножјето на висината h_a спуштена од D.
Од правоаголниот триаголник AD_1D добиваме дека

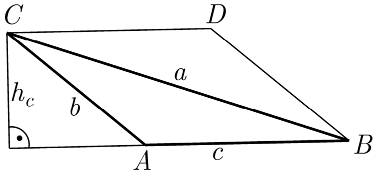
$\sin\alpha = \frac{h_a}{b}$, т.е. $h_a = b\sin\alpha$. Бидејќи $P = ah_a$ добиваме $P = ah_a = ab\sin\alpha$.

- Плоштината P на триаголникот ABC со страни a,b,c и висини h_a,h_b,h_c спуштени кон нив, соодветно, е еднаква на $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$. Докажи.

Доказ. Ќе докажеме дека $P = \frac{ch_c}{2}$. Другите равенства се докажуваат потполно аналогно.
Во зависност од тоа дали аглите кај A и B се остри (т.е. триаголникот е остроаголен) или еден од нив е прав или еден од нив е тап ги добиваме случаите како на цртежот.



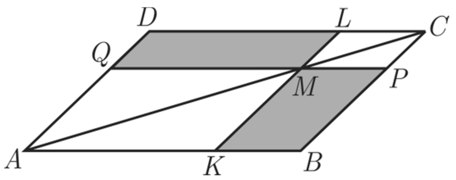




Низ B повлекуваме права паралелна со AC и низ C повлекуваме права паралелна со AB. Нека пресечната точка на тие две прави е D. Четириаголникот $ABDC$ е паралелограм. Значи, $\overline{AB} = \overline{CD}$ и $\overline{AC} = \overline{BD}$. Бидејќи BC е заедничка страна следува дека $\Delta ABC \cong \Delta DCB$, па $P_{ABC} = P_{DCB}$. Значи, $P_{ABC} = \frac{P_{ABDC}}{2} = \frac{ch_c}{2}$.

- Кај правоаголен триаголник со катети a и b од претходното добиваме дека плоштината се пресметува со формулата $P = \frac{ab}{2}$, бидејќи $b = h_a$ или $a = h_b$.

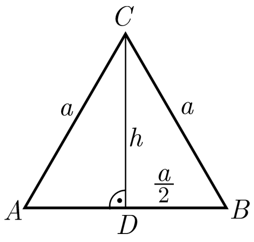
Пример 85: Нека $ABCD$ е паралелограм и нека $P \in BC$, $Q \in AD$, $K \in AB$ и $L \in CD$ се такви што $PQ \parallel AB$ и $KL \parallel BC$ и $\{M\} = KL \cap PQ \cap AC$. Докажи дека паралелограмите $KBPM$ и $QMLD$ имаат еднакви плоштини.



Решение I. Од паралелноста на AD, KL и BC, како и на AB, QP и DC следува $\sphericalangle MAK = \sphericalangle MCL$, $\sphericalangle AKM = \sphericalangle CLM$ па $\Delta AKM \sim \Delta CLM$ и оттука добиваме $\frac{\overline{AK}}{\overline{KM}} = \frac{\overline{LC}}{\overline{LM}}$, т.е. $\overline{AK} \cdot \overline{LM} = \overline{KM} \cdot \overline{LC}$. Бидејќи $\overline{AK} = \overline{QM}$, $\overline{LM} = \overline{QD}$ и $\overline{LC} = \overline{KB}$ добиваме $\overline{QM} \cdot \overline{QD} = \overline{KM} \cdot \overline{KB}$. Заради $\sphericalangle DQM = \sphericalangle MKB = \alpha$ добиваме $P_{QMLD} = \overline{QM} \cdot \overline{QD} \sin\alpha = \overline{KM} \cdot \overline{KB} \sin\alpha = P_{KBPM}$.

Решение II. Триаголниците AKM и MQA имаат еднакви страни, па $\Delta AKM \cong \Delta MQA$. Слично, $\Delta MPC \cong \Delta CLM$ и $\Delta ABC \cong \Delta CDA$. Оттука добиваме $P_{QMLD} = P_{\Delta ACD} - P_{\Delta AMQ} - P_{\Delta MCL} = P_{\Delta ABC} - P_{\Delta AKM} - P_{\Delta MPC} = P_{KBPM}$.

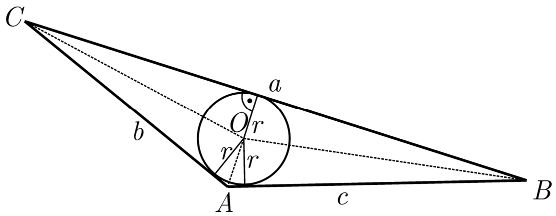
Ако триаголникот ABC е рамностран со страна a, тогаш неговата плоштина е $P = \frac{ah}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Докажи.



Доказ. Од Питагоровата теорема за правоаголниот триаголник DBC имаме $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$, па $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, $P = \frac{ah}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Во рамностран триаголник висината е и тежишна линија, па важи $r = \frac{h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Нека s е полупериметарот, r радиус на впишаната кружница и P е плоштината на триаголник ABC. Тогаш $P = rs$. Докажи.

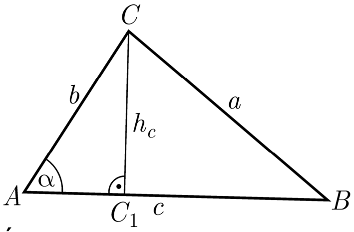


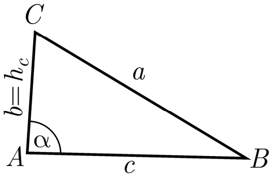
Доказ. Нека O е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC. Тогаш триаголниците AOC, ABO и BCO имаат висина r спуштена од O и важи

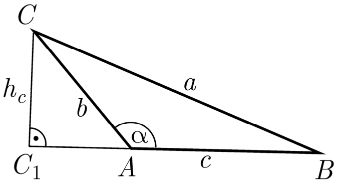
$$P_{ABC} = P_{AOC} + P_{ABO} + P_{BCO} = \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} = \frac{a+b+c}{2} r = sr.$$

Плоштината на триаголник е еднаква на полупроизводот од две негови страни и синусот од аголот меѓу нив. Докажи.

Доказ. Треба да докажеме дека $P = \frac{1}{2} bc\sin\alpha = \frac{1}{2} ac\sin\beta = \frac{1}{2} ab\sin\gamma$. Ќе докажеме дека $P = \frac{1}{2} bc\sin\alpha$. Останатите се докажуваат аналогно.







Ќе разгледаме три случаи за аголот α.

а) Нека α е остар. Тогаш $\sin\alpha=\dfrac{h_c}{b}$, па $h_c=b\sin\alpha$. Значи, плоштината е

$$P=\frac{1}{2}ch_c=\frac{1}{2}bc\sin\alpha .$$

б) Ако α е прав, тогаш $\sin\alpha=1$, па имаме $P=\dfrac{1}{2}cb=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$.

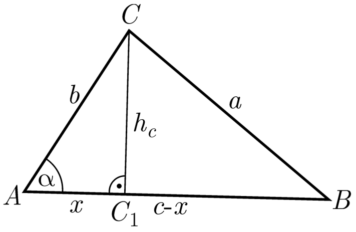
в) Ако α е тап, тогаш важи равенството $\sin\alpha=\sin(180^\circ-\alpha)$, кое ќе се изучува подоцна. Имаме $\sin\alpha=\sin(180^\circ-\alpha)=\dfrac{h_c}{b}$, па повторно $h_c=b\sin\alpha$ и

$$P=\frac{1}{2}ch_c=\frac{1}{2}bc\sin\alpha .$$

Нека a,b,c се страните а s е полупериметарот на триаголник ABC. Тогаш неговата плоштина P е еднаква на $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Докажи. Оваа формула е позната како Херонова формула.

Доказ. Бидејќи $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ добиваме дека

$$a-b+c=a+b+c-2b=2(s-b)$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2(s-c)$$
$$b+c-a=b+c+a-2a=2(s-a).$$



Нека C_1 е подножјето на висината спуштена од C и нека $\overline{AC_1}=x$.

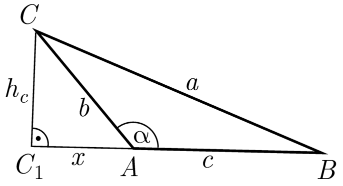
а) Нека аголот α е остар. Тогаш $\overline{BC_1}=c-x$, па од правоаголниот триаголник AC_1C добиваме $h_c^2=b^2-x^2$, а од правоаголниот триаголник CC_1B имаме $h_c^2=a^2-(c-x)^2$. Оттука добиваме $b^2-x^2=a^2-(c-x)^2$, па следува дека $x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$.

Заменувајќи во $h_c^2=b^2-x^2$ добиваме

$$h_c^2=b^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2=\left(b-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)=$$
$$=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2c}\cdot\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2c}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2c}\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{2c}=$$
$$=\frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4c^2}=\frac{2(s-b)2(s-c)2(s-a)2s}{4c^2}=$$
$$=\frac{4s(s-b)(s-c)(s-a)}{c^2}$$

т.е. $h_c = \dfrac{2\sqrt{s(s-b)(s-c)(s-a)}}{c}$. Значи,

$$P = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}c\frac{2\sqrt{s(s-b)(s-c)(s-a)}}{c} = \sqrt{s(s-b)(s-c)(s-a)}\,.$$



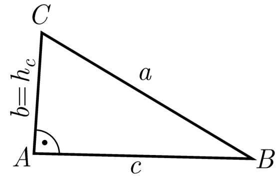
б) Нека аголот α е тап. Тогаш $\overline{BC_1} = c + x$, па од правоаголните триаголници C_1AC и C_1BC добиваме $h_c^2 = b^2 - x^2$ и $h_c^2 = a^2 - (x+c)^2$ и со нивно изедначување добиваме $x = \dfrac{a^2 - c^2 - b^2}{2c}$. Слично како претходно, заменувајќи во $h_c^2 = b^2 - x^2$ добиваме

$$h_c^2 = b^2 - \left(\frac{a^2-c^2-b^2}{2c}\right)^2 = \left(b - \frac{a^2-c^2-b^2}{2c}\right)\left(b + \frac{a^2-c^2-b^2}{2c}\right) =$$

$$= \frac{2bc - a^2 + c^2 + b^2}{2c}\cdot\frac{2bc + a^2 - c^2 - b^2}{2c} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2c}\cdot\frac{a^2 - (b-c)^2}{2c} =$$

$$= \frac{(b+c-a)(b+c+a)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2} = \frac{2(s-a)2s(s-b)2(s-c)}{4c^2} =$$

$$= \frac{4s(s-b)(s-c)(s-a)}{c^2}$$



Слично како во а) ја добиваме Хероновата формула.
в) Аголот α е прав. Тогаш

$$s(s-b)(s-c)(s-a) = \frac{2(s-b)2(s-c)2(s-a)2s}{16} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{16} =$$

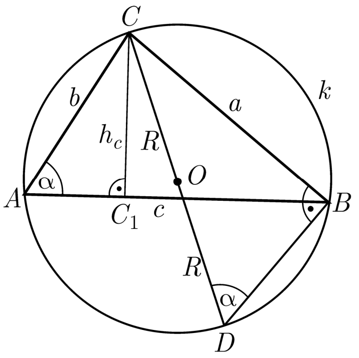
$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{4}\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{4} = \frac{2bc\overbrace{-b^2-c^2+a^2}^{=0}}{4}\cdot\frac{2bc+\overbrace{b^2+c^2-a^2}^{=0}}{4} = \frac{b^2c^2}{4}$$

па $bc = 2\sqrt{s(s-b)(s-c)(s-a)}$.

$$P = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}2\sqrt{s(s-b)(s-c)(s-a)} = \sqrt{s(s-b)(s-c)(s-a)}$$

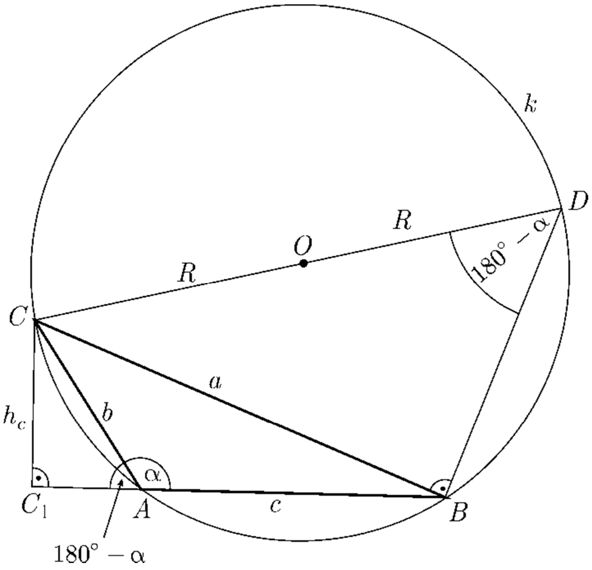
па .

Нека ABC е триаголник со страни a, b, c и радиус R на опишаната кружница околу него. Тогаш плоштината на триаголникот е еднаква на $P = \dfrac{abc}{4R}$. Докажи.



Доказ. Нека O е центарот на опишаната кружница k околу ΔABC, $CO \cap k = \{C, D\}$ и C_1 е подножјето на висината спуштена од C.
а) Нека триаголникот е остроаголен. Тогаш аголот CBD е прав, како агол над дијаметарот во k и $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$, како агли над иста тетива на k.

Следува дека $\Delta AC_1C \sim \Delta DBC$, па $\frac{h_c}{b} = \frac{a}{2R}$ и оттука $h_c = \frac{ab}{2R}$. За плоштината имаме $P = \frac{ch_c}{2} = \frac{abc}{4R}$.



б) Триаголникот ABC е тапоаголен, со тап агол во A. Аголот CBD е прав, како агол над дијаметарот во k и $\measuredangle CDB = 180^\circ - \alpha$ бидејќи четириаголникот $ABDC$ е тетивен. Притоа и $\measuredangle C_1AC = 180^\circ - \alpha$, па значи $\measuredangle C_1AC = \measuredangle CDB$, па $\Delta AC_1C \sim \Delta DBC$. Следува дека $\frac{h_c}{b} = \frac{a}{2R}$ и слично како во а) добиваме $P = \frac{abc}{4R}$.

в) Ако триаголникот е правоаголен со прав агол кај A, важи $R = \frac{a}{2}$, па

$$P = \frac{bc}{2} = \frac{abc}{2a} = \frac{abc}{2 \cdot 2R} = \frac{abc}{4R}.$$

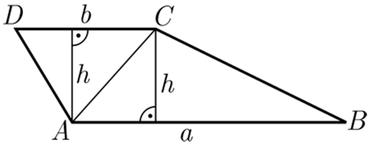
Забелешка. Во правоаголен триаголник висината е и тежишна линија, па важи $R = \frac{2h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Нека $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ каде $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ и нека P и P_1 се плоштините на ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, соодветно. Тогаш $\frac{P}{P_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{b^2}{b_1^2} = \frac{c^2}{c_1^2}$. Докажи.

Доказ. $\frac{P}{P_1} = \frac{\frac{ch_c}{2}}{\frac{c_1h_{c_1}}{2}} = \frac{ch_c}{c_1h_{c_1}} = \frac{c}{c_1} \cdot \frac{h_c}{h_{c_1}} = \frac{c}{c_1} \cdot \frac{c}{c_1} = \frac{c^2}{c_1^2}$. Притоа користиме дека $\frac{c}{c_1} = \frac{h_c}{h_{c_1}}$.

Слично се докажуваат и другите равенства.

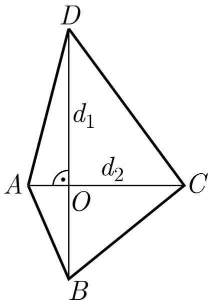
Нека $ABCD$ е трапез со основи a и b и висина h. Тогаш $P = \frac{a+b}{2}h$. Докажи.



Доказ. Трапезот го делиме на два триаголници со дијагоналата AC. Тогаш

$$P=P_{ACD}+P_{ABC}=\frac{bh}{2}+\frac{ah}{2}=\frac{a+b}{2}h.$$

Нека $ABCD$ е четириаголник со нормални дијагонали d_1 и d_2. Тогаш неговата плоштина P е еднаква на $P=\frac{d_1d_2}{2}$. Докажи.

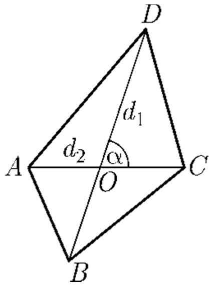


Доказ. За плоштината на четириаголникот имаме

$$P=P_{ABO}+P_{BCO}+P_{CDO}+P_{AOD}=$$
$$=\frac{\overline{AO}\cdot\overline{OB}}{2}+\frac{\overline{CO}\cdot\overline{OB}}{2}+\frac{\overline{CO}\cdot\overline{OD}}{2}+\frac{\overline{AO}\cdot\overline{OD}}{2}=$$
$$=\frac{\left(\overline{AO}+\overline{CO}\right)\cdot\overline{OB}}{2}+\frac{\left(\overline{AO}+\overline{CO}\right)\cdot\overline{OD}}{2}=$$
$$=\frac{\left(\overline{OB}+\overline{OD}\right)\left(\overline{AO}+\overline{CO}\right)}{2}=\frac{d_1d_2}{2}$$

Нека $ABCD$ е произволен конвексен четириаголник (трапезоид) со дијагонали d_1 и d_2 и остар агол меѓу нив α.

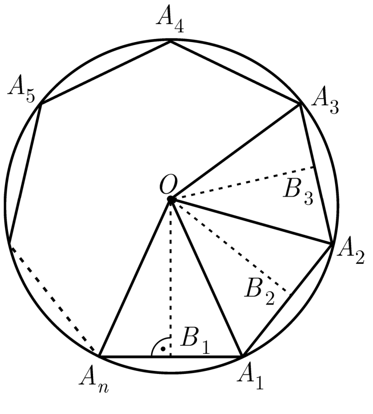
Тогаш плоштината P на четириаголникот е $P=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$.



Доказ.

$$P=P_{ABO}+P_{BCO}+P_{CDO}+P_{AOD}=$$
$$=\frac{\overline{AO}\cdot\overline{OB}}{2}\sin\alpha+\frac{\overline{CO}\cdot\overline{OB}}{2}\sin(180^\circ-\alpha)+\frac{\overline{CO}\cdot\overline{OD}}{2}\sin\alpha+\frac{\overline{AO}\cdot\overline{OD}}{2}\sin(180^\circ-\alpha)=$$
$$=\frac{\overline{AO}\cdot\overline{OB}}{2}\sin\alpha+\frac{\overline{CO}\cdot\overline{OB}}{2}\sin\alpha+\frac{\overline{CO}\cdot\overline{OD}}{2}\sin\alpha+\frac{\overline{AO}\cdot\overline{OD}}{2}\sin\alpha=$$
$$=\left(\frac{\overline{AO}\cdot\overline{OB}}{2}+\frac{\overline{CO}\cdot\overline{OB}}{2}+\frac{\overline{CO}\cdot\overline{OD}}{2}+\frac{\overline{AO}\cdot\overline{OD}}{2}\right)\sin\alpha=$$
$$=\left(\frac{\left(\overline{AO}+\overline{CO}\right)\cdot\overline{OB}}{2}+\frac{\left(\overline{AO}+\overline{CO}\right)\cdot\overline{OD}}{2}\right)\sin\alpha=\frac{\left(\overline{OB}+\overline{OD}\right)\left(\overline{AO}+\overline{CO}\right)}{2}\sin\alpha=\frac{d_1d_2}{2}\sin\alpha$$

Околу секој правилен многуаголник може да се опише кружница. Докажи.



Доказ. Нека многуаголникот има n страни, агол α и страна a. Да ги повлечеме симетралите на аглите кај A_1 и A_2 и нека нивниот пресек е O (бидејќи $\alpha<180^\circ$ тие симетрали имаат пресек и тој е во внатрешноста на многуаголникот). Тогаш $\sphericalangle OA_1A_2=\sphericalangle OA_2A_1=\frac{\alpha}{2}$, па триаголникот OA_1A_2 е рамнокрак. Нека O_1 е пресек на симетралита на аглите $A_1A_2A_3$ и $A_2A_3A_4$. Точките O и O_1 лежат на симетралата на $\sphericalangle A_1A_2A_3$.

Бидејќи $\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}$ и $\sphericalangle OA_1A_2=\sphericalangle OA_2A_1=\sphericalangle OA_2A_3=\sphericalangle OA_3A_2=\frac{\alpha}{2}$ добиваме дека $\Delta OA_1A_2\cong\Delta O_1A_2A_3$, па следува дека $\overline{OA_2}=\overline{O_1A_2}$ и оттука $O\equiv O_1$.

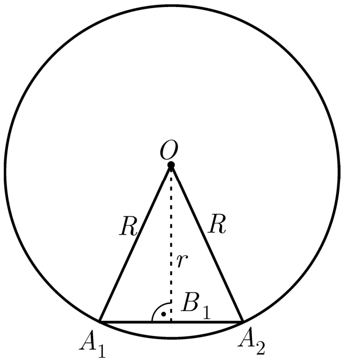
Значи симетралите на аглите кај A_1, A_2 и A_3 се сечат во една точка O, и $\overline{OA_1}=\overline{O_1A_2}=\overline{OA_3}$. продолжувајќи на овој начин добиваме дека симетралите на сите агли се сечат во O и $\overline{OA_1}=\overline{O_1A_2}=\overline{OA_3}=...=\overline{OA_n}$. Значи точките $A_1,A_2,...,A_n$ лежат на кружница со радиус $R=\overline{OA_1}$ и центар во O, па таа е кружницата опишана околу многуаголникот.

Во секој правилен многуаголник може да се впише кружница. Докажи.

Доказ. Од складноста на триаголниците $OA_1A_2,OA_2A_3,...,OA_nA_1$ добиваме дека и нивните висини се еднакви и се сечат во O, па лежат на иста кружница со центар во O и радиус $r=\overline{OB_1}$. Таа е вписаната кружница во многуаголникот.

Во правилен многуаголник важи $r=R\cos\frac{180^\circ}{n}$ и $a=2r\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$. Докажи.

Доказ. Да го разгледаме рамнокракиот триаголник OA_1A_2. Заради складноста на триаголниците $OA_1A_2,OA_2A_3,...,OA_nA_1$ него ќе го нарекуваме карактеристичен триаголник за правилниот n-аголник. Заради складноста на сите траиголници добиваме дека $\sphericalangle A_1OA_2=\frac{360^\circ}{n}$. Бидејќи триаголникот OA_1A_2 е рамнокрак, следува дека триаголниците OA_1B_1 и OB_1A_2 се правоаголни со прави агли кај B_1, и складни. Значи $\sphericalangle A_1OB_1=\sphericalangle B_1OA_2=\frac{360^\circ}{2n}=\frac{180^\circ}{n}$, па $\cos\sphericalangle A_1OB_1=\frac{r}{R}$, т.е. $r=R\cos\sphericalangle A_1OB_1=R\cos\frac{180^\circ}{n}$.



Бидејќи $\overline{A_1B_1}=\frac{a}{2}$ од правоаголниот триаголник A_1OB_1 добиваме дека

$\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}=\frac{\frac{a}{2}}{r}$ и оттука $a=2r\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

Плоштината P на правилен n-аголник е $P=\frac{a^2n}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. Докажи.

Доказ. Нека плоштината на карактеристичниот триаголник е P_1. Тогаш $P=nP_1$.

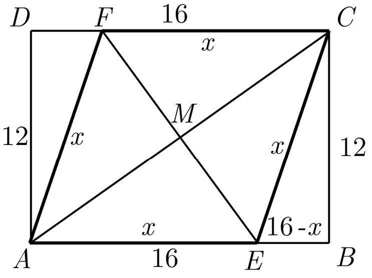
Имаме $P_1=\frac{ar}{2}=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}=\frac{a^2}{4}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}=\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$ и оттука добиваме дека

$P=\frac{a^2n}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$.

Забелешка. Слично се докажуваат и формулите $P=nr^2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$,

$L=2nr\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$, каде L е периметарот на многуаголникот.

Пример 86: Даден е правоаголник $ABCD$ со страни $AB = 16\ \mathrm{cm}$ и $BC = 12\ \mathrm{cm}$. Точките E и F припаѓаат на правите AB и CD така што $AECF$ е ромб. Колку е должината на неговата дијагонала EF ?



Решение. Нека $AECF$ е ромб со страна x. Според тоа, $\overline{AE} = x$ и $\overline{EB} = 16 - x$. Бидеќи $ABCD$ е правоаголник, триаголникот EBC е правоаголен, па според Питагоровата теорема имаме $\overline{EC}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BC}^2$, т.е. $x^2 = 12^2 + (16 - x)^2$.

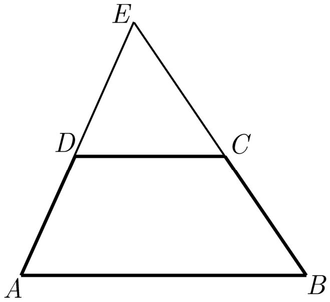
Последната равенка може да ја запишеме во облик $x^2 = 144 + 256 - 32x + x^2$, од каде добиваме $32x = 400$, т.е. $x = \frac{25}{2}$.

Ќе ги употребиме плоштините на правоаголникот, ромбот и триаголникот EBC. Бидејќи $\overline{EB} = 16 - \frac{25}{2} = \frac{7}{2}$, а плоштината на ромбот е половина од производот на неговите дијагонали, добиваме

$$\frac{1}{2}\overline{EF}\cdot\overline{AC} = \overline{AB}\cdot\overline{BC} - 2\frac{1}{2}\overline{EB}\cdot\overline{BC},\ \frac{1}{2}\overline{EF}\cdot 20 = 16\cdot 12 - \frac{7}{2}\cdot 12,\ \frac{1}{2}EF\cdot 20 = 192 - 42,$$

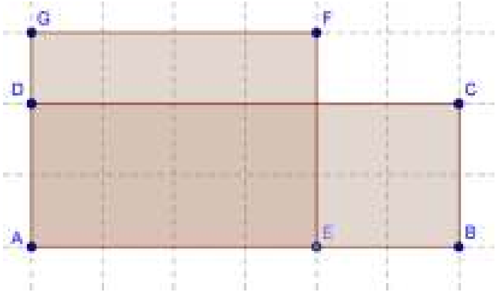
а од последната равенка имаме $\overline{EF} = 15\,\mathrm{cm}$, што требаше да се определи.

Пример 87: Основите на еден трапез се $a = 25$ и $b = 15$, еден од краците е $c = 8$. Определи го периметарот и плоштината на трапезот ако збирот на аглите на поголемата основа е 90°.



Решение. Нека $\overline{AD} = c = 8$ и $\overline{DE} = x$, каде E е пресек на краците на трапезот. Од сличноста $\Delta ABE \sim \Delta DCE$ имаме $\frac{25}{15} = \frac{8 + x}{8}$. Од ова добиваме $x = 12$. Од условот на задачата $\sphericalangle AEB = 90^\circ$. Од Питагоровата теорема за правоаголниот триаголник ΔDCE имаме $\overline{CE} = 9$. Од Питагоровата теорема за правоаголниот триаголник ΔABE имаме $\overline{BE} = 15$. Сега добиваме $\overline{BC} = 6$. Па за периметарот на трапезот имаме $L = 54$. За плоштината на трапезот добиваме $P = P_{ABE} - P_{DCE} = 150 - 54 = 96$.

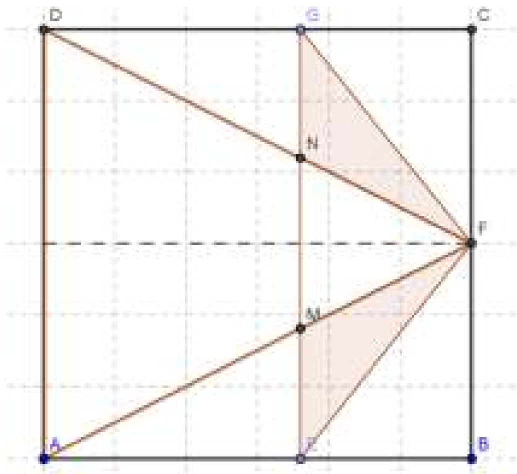
Пример 88: Една кутија со боја е доволна да се обои парче картон во облик на правоаголник на кој едната страна му е трипати подолга од другата страна. Ако од парчето картон направиме нов правоаголник, скратувајќи ја подолгата страна за $18cm$ и продолжувајќи ја другата за $8cm$ ќе истрошиме исто количество боја. Одреди го периметарот на новиот правоаголник.



Решение. Да го означиме стариот правоаголник $ABCD$, каде $\overline{AB}=a$ и $\overline{BC}=b$. Од условот на задачата имаме $a=3b$. Ако, пак, со $AEFG$ го означиме новиот правоаголник, тогаш $\overline{AE}=\overline{AB}-18=3b-18$ и $\overline{EF}=\overline{BC}+8=b+8$.
Бидејќи за боење ќе искористиме исто количество боја, имаме:
$P_{ABCD}=P_{AEFG}$ т.е. $3b^2=(3b-18)(b+8)$, односно $3b^2=3b^2+24b-18b-144$, па $b=24cm$.

Според тоа $L_{AEFG}=2(3\cdot 24-18+24+8)=172cm$.

Пример 89: Квадратот $ABCD$ има страна со должина $36cm$. На страната AB избрана е точка E која е на растојание $12cm$ од темето B, на средината на страната BC лежи точката F и на страната CD избрана е точката G која е на растојание $12cm$ од темето C. Одреди ја плоштината на делот кој лежи во внатрешноста на триаголникот EFG и во надворешноста на триаголникот AFD.



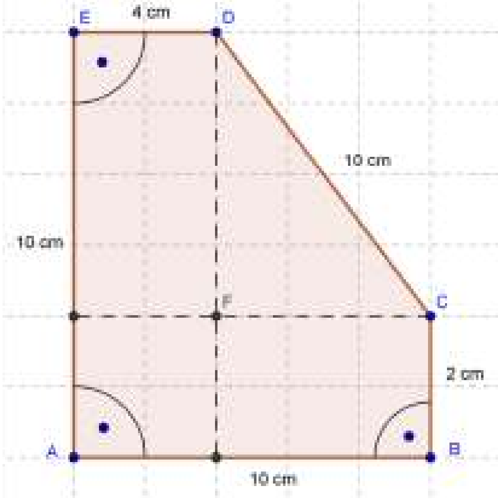
Решение. Да направиме скица. Според условите од задачата

$$P_{\Delta GEF}=\frac{36\cdot 12}{2}=216cm^2.$$

Ако ги означиме со M,N пресечните точки на GE со страните AF,DF, соодветно, тогаш бараната плоштина $P=P_{\Delta GEF}-P_{\Delta NMF}$. Значи останува да ја одредиме плоштината на триаголникот NMF.

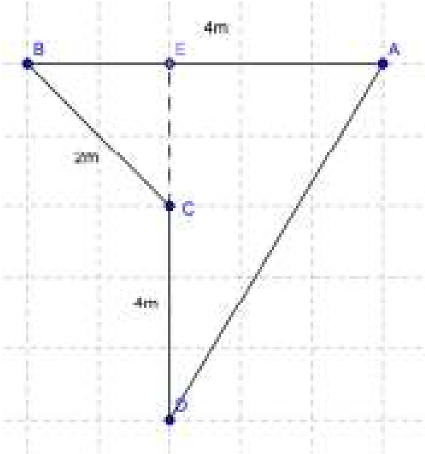
Триаголниците ABF и AEM се слични па важи: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EM}}$ т.е. $\frac{36}{18}=\frac{36-12}{\overline{EM}}$, односно $\overline{EM}=12cm$. Аналогно триаголниците DFC и DNG се слични, па $\overline{GN}=12cm$. Значи $\overline{MN}=36-2\cdot 12=12cm$. Конечно $P_{\Delta NMF}=\frac{12\cdot 12}{2}=72cm^2$, па $P=P_{\Delta GEF}-P_{\Delta NMF}=216-72=144cm^2$.

Пример 90: Пресметај ја плоштината на фигурата.



Решение. Бараната плоштина е збир од плоштините на правоаголник со страни $10cm$ и $2cm$, правоаголен триаголник со катети $6cm$ и $8cm$ и правоаголник со страни $10cm$ и $4cm$. Според тоа $P=20+24+40=44cm^2$.

Пример 91: Еден зајак се наоѓа на ливада. Прво скока $4m$ на запад, па $2m$ на југо-исток и $4m$ на југ. Одреди го растојанието на кое ќе се најде зајакот од почетокот на скокањето.



Решение. Триаголникот BCE е рамнокрак правоаголен, па $\overline{CE} = \overline{BE} = \sqrt{2}m$. Притоа $\overline{AE} = 4 - \sqrt{2}, \overline{DE} = 4 + \sqrt{2}$. Значи

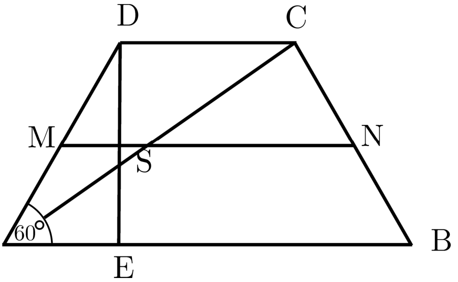
$$\overline{AD} = \sqrt{\left(4-\sqrt{2}\right)^2 + \left(4+\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{16 - 8\sqrt{2} + 2 + 16 + 8\sqrt{2} + 2} = \sqrt{32+4} = 6m$$

Пример 92: Во рамнокрак трапез $ABCD$, каде $\overline{AD} = \overline{BC} = 6cm$, дијагоналата ја дели средната линија на делови од $2cm$ и $5cm$. Одреди го

а) периметарот на трапезот;

б) аглите на трапезот**.**



Решение. Да ја означиме средната линија на трапезот со MN, а пресекот на MN со дијагоналата AC со S. Тогаш од условот на задачата $\overline{MS} = 2cm$ и $\overline{SN} = 5cm$. Бидејќи MS е средна линија за триаголникот ACD следува дека $\overline{DC} = 2 \cdot \overline{MS} = 4cm$.

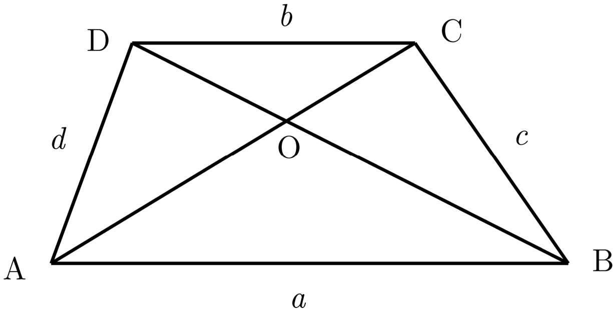
Слично $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{SN} = 10cm$.

а) Периметарот на трапезот е $L = 26cm$.

б) Да ја означиме со DE висината во трапезот. Тогаш $\overline{AE} = \frac{10-4}{2} = 3cm$.

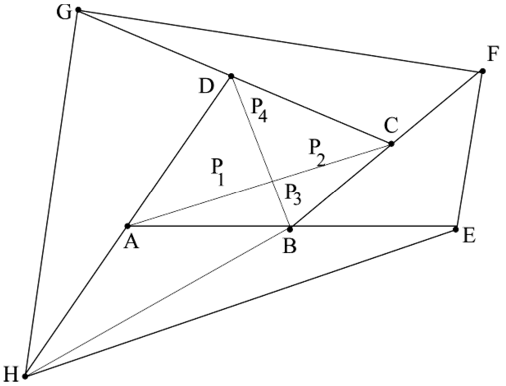
Значи ΔAED е правоаголен со катети $6cm$ и $3cm$, па според тоа $\sphericalangle EAD = 60^0$ и $\sphericalangle ADC = 180^0 - 60^0 = 120^0$.

Пример 93: Основите на еден трапез $ABCD \ (AB \| CD)$ се однесуваат како $1 : 5$, а дијагоналите им се сечат во точка O. Збирот на плоштините на триаголниците ABO и CDO е $120 \ cm^2$. Најди ги плоштините на тие триаголници.



Решение. Нека $\overline{AB} = a$ и $\overline{CD} = b$. Од условот на задачата $a : b = 1 : 5$ од каде следува $b = 5a$. Од сличноста на триаголниците ABO и CDO следува дека $P_{\Delta ABO} : P_{\Delta CDO} = a^2 : b^2$, па тогаш $P_{\Delta ABO} : P_{\Delta CDO} = a^2 : 25a^2$ од каде следува дека

$P_{\Delta CDO} = 25P_{\Delta ABO}$. Од условот на $P_{\Delta ABO} + P_{\Delta CDO} = 120$, па тогаш $P_{\Delta ABO} + 25P_{\Delta ABO} = 120$ од каде следува дека $P_{\Delta ABO} = 4,62\ cm^2$. Сега $P_{\Delta CDO} = 115,38\ cm^2$.



Пример 94: Четириаголниците $ABCD$ и $EFGH$ го имаат својството точките B,C,D и A да се средини на отсечките AE,BF,CG и DH, соодветно. Одреди ја плоштината на четириаголникот $EFGH$, ако плоштината на четириаголникот $ABCD$ е $1cm^2$.

Решение. Нека P_1 е плоштина на триаголникот ABD, а P_2 е плоштина на триаголникот BCD. Триаголниците ABH и ABD имаат иста основа ($AD = AH$) и иста висина од темето B, па според тоа имаат иста плоштина. Триаголниците HBE и HAB имаат иста плоштина, бидејќи имаат иста основа ($AB = BE$) и иста висина од темето H. Значи триаголникот AHE има плоштина $2P_1$. Слично се покажува дека плоштината на триаголникот CFG е $2P_2$.

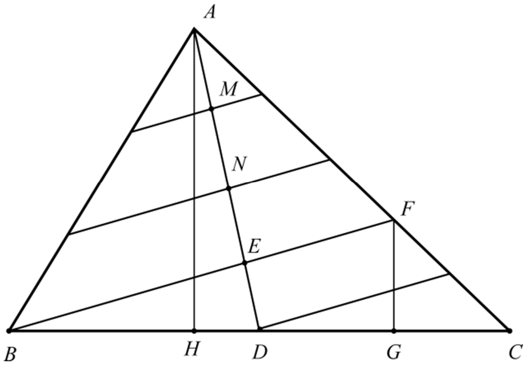
Нека плоштината на триаголникот ABC ја означиме со P_3, а плоштината на триаголникот ACD со P_4. Тогаш плоштината на триаголникот BEF е еднаква на $2P_3$, а плоштината на триаголникот DGH е еднаква на $2P_4$.

Плоштината на четириаголникот $EFGH$ е еднаква на збирот од плоштините на триаголниците AEH,BEF,CFG,DGH и четириаголникот $ABCD$, т.е.

$$P = 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 + 2P_4 + 1 = 2\left(P_1 + P_2 + P_3 + P_4\right) + 1 = 2\cdot 2 + 1 = 5cm^2,$$

бидејќи $P_1 + P_2 = P_3 + P_4 = 1cm^2$.

Пример 95: Во ΔABC точката D е средина на страната BC. За точката E на отсечката AD важи равенството: $4\overline{AE} = 3\overline{AD}$. Правата BE ја сече страната AC во точката F. Одредете го односот на плоштините на ΔABF и ΔBCF.



Решение: Од равенството $4\overline{AE} = 3\overline{AD}$ добиваме дека

$$\overline{AE} = \frac{3}{4}\overline{AD}.$$

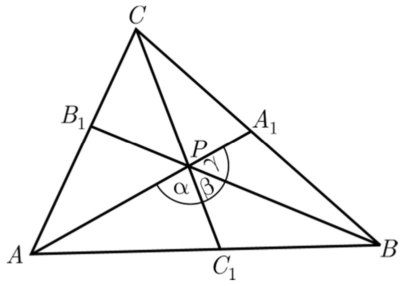
Затоа може да определиме точки M и N на $\overline{AE}$ така што

$$\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NE} = \overline{ED}.$$

Правите низ M, N и D паралелни со BF ја делат страната AC на пет еднакви дела, така што: $\overline{CF} : \overline{CA} = 2 : 5$. Ако е AH висина на ΔABC, тогаш од сличноста на правоаголните триаголници ΔACH и ΔECG имаме:

$\overline{AH}:\overline{FG}=\overline{AC}:\overline{FC}=5:2$, т.е. $\overline{FG}=\frac{2}{5}\overline{AH}$. Според тоа,

$P_{\Delta BCF}=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{FG}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AH}=\frac{2}{5}P_{\Delta ABC}$. Значи, $P_{\Delta ABF}=\frac{3}{5}P_{\Delta ABC}$ и $P_{\Delta BCF}=\frac{2}{3}P_{\Delta ABF}$.



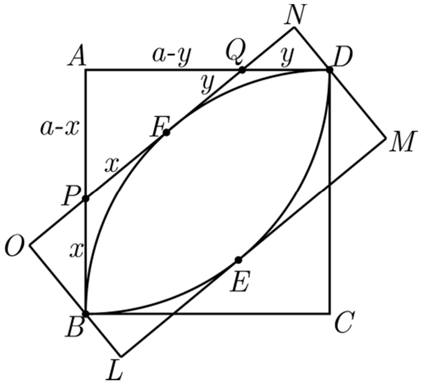
Пример 96: Даден е триаголник ΔABC и точка P во внатрешноста. Нека $AP\cap BC=\{A_1\}$, $BP\cap AC=\{B_1\}$, $CP\cap AB=\{C_1\}$. Докажи дека $P_{\Delta AC_1P}\cdot P_{\Delta BA_1P}\cdot P_{\Delta CB_1P}=P_{\Delta BC_1P}\cdot P_{\Delta CA_1P}\cdot P_{\Delta AB_1P}$.

Решение. Нека е даден триаголникот како на сликата. Тогаш $P_{\Delta AC_1P}=PA\cdot PC_1\cdot\sin\alpha$, $P_{\Delta BA_1P}=PB\cdot PA_1\cdot\sin\gamma$, $P_{\Delta CB_1P}=PC\cdot PB_1\cdot\sin\beta$. Уште и $P_{\Delta BC_1P}=PB\cdot PC_1\cdot\sin\beta$, $P_{\Delta CA_1P}=PC\cdot PA_1\cdot\sin\alpha$, $P_{\Delta AB_1P}=PA\cdot PB_1\cdot\sin\gamma$,

па равенството е еквивалентно на

$$PA\cdot PC_1\cdot\sin\alpha\cdot PB\cdot PA_1\cdot\sin\gamma\cdot PC\cdot PB_1\cdot\sin\beta=$$
$$=PB\cdot PC_1\cdot\sin\beta\cdot PC\cdot PA_1\cdot\sin\alpha\cdot PA\cdot PB_1\cdot\sin\gamma$$

што е точно.



Пример 97: Фигурата $\boldsymbol{F}$ се состои од точките B и D и лаците BD конструирани во внатрешноста на квадратот $ABCD$ со центри во A и C и со радиуси AB. Докажи дека сите правоаголници опишани околу фигурата $\boldsymbol{F}$, така што секоја страна на правоаголникот има точно една заедничка точка со фигурата $\boldsymbol{F}$, имаат исти периметри.

Решение. Нека $LMNO$ е произволен правоаголник опишан околу фигурата $\boldsymbol{F}$, и нека допирните точки на $\boldsymbol{F}$ со правоаголникот се B, E, D, F. Нека страната ON ги сече страните AB и AD на квадратот во точките P и Q соодветно. (види цртеж)

Нека $\overline{PF}=x$, $\overline{FQ}=y$. Тогаш, $\overline{BP}=x$, $\overline{AP}=a-x$, $\overline{QD}=y$ и $\overline{AQ}=a-y$, каде a е должината на страната на квадратот $ABCD$.

Од $\Delta BPO\sim\Delta QPA$ ($\angle BPO=\angle QPA$, како накрсни агли и $\angle BOP=\angle QAP=90°$) следи дека $\frac{\overline{OP}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{QP}}$ и $\frac{\overline{OB}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{QP}}$, па $\overline{OP}=x\cdot\frac{a-x}{x+y}$ и $\overline{OB}=x\cdot\frac{a-y}{x+y}$.

Аналогно се покажува дека $\Delta QPA\sim\Delta QDN$, од каде се добива дека $\overline{DN}=y\cdot\frac{a-x}{x+y}$ и $\overline{QN}=y\cdot\frac{a-y}{x+y}$.

Тогаш, имаме

$$\overline{BO}+\overline{ON}+\overline{ND}=x\cdot\frac{a-y}{x+y}+x\cdot\frac{a-x}{x+y}+x+y+y\cdot\frac{a-y}{x+y}+x\cdot\frac{a-x}{x+y}=$$
$$x+y+\frac{2ax+2ay-x^2-y^2-2xy}{x+y}=x+y+2a-(x+y)=2a$$

Аналогно, $\overline{BL}+\overline{LM}+\overline{MD}=2a$, па следи дека периметарот на правоаголникот $LMNO$ е $\overline{LM}+\overline{MN}+\overline{NO}+\overline{OL}=4a$, односно е константен, што требаше да се докаже.

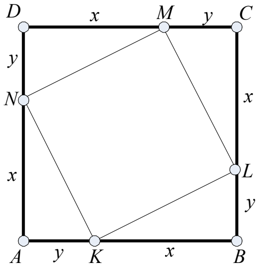
Пример 98: Темињата на еден квадрат лежат на страните на друг квадрат (на една страна едно теме). Да се најде односот на кој се разделени страните на вториот квадрат со темињата на првиот квадрат, ако односот на нивните плоштини е еднаков на p, ($p<1$).

Решение. Нека $ABCD$ и $KLMN$ се дадените квадрати, така што K,L,M и N припаѓаат на страните AB,BC,CD и DA соодветно. Ќе воведеме ознаки $\overline{BL}=y$, $\overline{KB}=x$, $\overline{KL}=b$ и $\overline{AB}=a$, при што можеме да претпоставиме $x>y$. Тогаш

$$P_1=P_{ABCD}=a^2=(x+y)^2,$$

а според Питагорината теорема $b^2=x^2+y^2$, па затоа

$$P_2=P_{KLMN}=b^2=x^2+y^2.$$



Од условот на задачата $\dfrac{P_2}{P_1}=\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2}=p$, каде $0<p<1$. Равенството $\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2}=p$ можеме да го запишеме во облик

$$(1-p)x^2-2pxy+(1-p)y^2=0 \qquad /:y^2$$

$$(1-p)\left(\frac{x}{y}\right)^2-2p\frac{x}{y}+(1-p)=0,$$

Ако воведеме ознака $\dfrac{x}{y}=t$ добиваме

$$(1-p)t^2-2pt+(1-p)=0. \qquad (1)$$

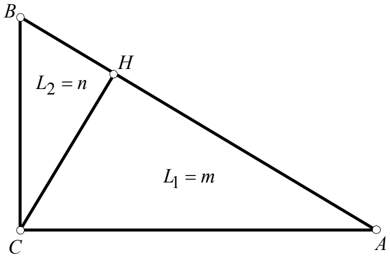
Решенија на равенката (1) се $\quad t_1=\dfrac{p+\sqrt{2p-1}}{1-p}, \qquad t_1=\dfrac{p-\sqrt{2p-1}}{1-p}.$

Јасно е дека $\dfrac{x}{y}=\dfrac{p+\sqrt{2p-1}}{1-p}$ е бараното решение.

Пример 99: Висината го дели правоаголнот триаголник на два триаголници кои имаат периметри m и n. Определи го периметарот на почетниот триаголник.

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник (со теме на правиот агол во точката C) и нека CH е негова висина. Од условот на задачата имаме

$$L_1=L_{AHC}=m \text{ и } L_2=L_{CHB}=n.$$



Триаголниците AHC, BHC и ABC се слични, при што коефициентите на сличност се

$$k_1=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \text{ и } k_2=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}. \qquad (1)$$

При тоа, исто така

$$\frac{L_1}{L}=k_1 \text{ и } \frac{L_2}{L}=k_2. \qquad (2)$$

Од равенствата (1) имаме $\overline{AC}=k_1\overline{AB}$ и $\overline{BC}=k_2\overline{AB}$. Според Питагорина теорема

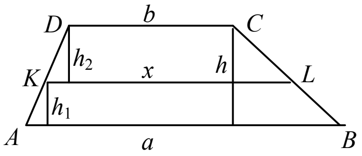
$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2,$$

од каде го добиваме равенството $k_1^2+k_2^2=1$. Ако (2) замениме во претходното равенство, имаме

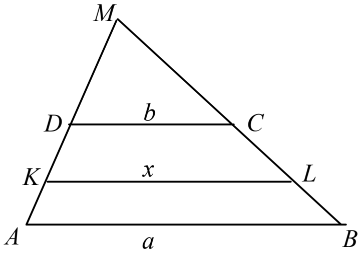
$$\left(\frac{L_1}{L}\right)^2+\left(\frac{L_2}{L}\right)^2=1, \qquad L=\sqrt{L_1^2+L_2^2}=\sqrt{m^2+n^2}.$$

Пример 100: Даден е трапезот $ABCD$ со основи $\overline{AB}=a$ и $\overline{CD}=b$. Најди ја должината на отсечката за која се исполнети условите:

- паралелна е со AB и CD;
- го дели трапезот на два дела со еднакви плоштини;
- нејзините крајни точки лежат на краците на трапезот.

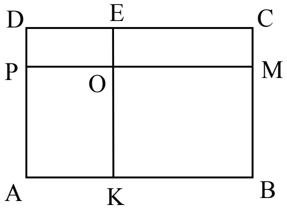


Решение А. Нека правата $p\parallel AB\parallel CD$ ги сече краците AD и BC во точките K и L соодветно и го преполовува трапезот $ABCD$ на два енаквоплоштни дела. Нека P е плоштината на трапезот $ABCD$, а h е неговата висина, нека P_1 е плоштината на трапезот $ABLK$ со висина h_1, а P_2 плоштината на трапезот $KLCD$ со висина h_2. Нека $\overline{KL}=x$.(види цртеж) Тогаш, важи $h=h_1+h_2$ и $P_1=P_2=\frac{1}{2}P$. Од $P=\frac{a+b}{2}\cdot h$, $P_1=\frac{a+x}{2}\cdot h_1$ и $P_2=\frac{x+b}{2}\cdot h_2$, имаме дека $h=\frac{2P}{a+b}$, $h_1=\frac{2P_1}{a+x}=\frac{P}{a+x}$ и $h_2=\frac{2P_2}{x+b}=\frac{P}{x+b}$. Со замена во $h=h_1+h_2$, добиваме $\frac{2P}{a+b}=\frac{P}{a+x}+\frac{P}{x+b}$, т.е. $\frac{2}{a+b}=\frac{1}{a+x}+\frac{1}{x+b}$, односно $2(a+x)(x+b)=(a+b)(x+b)+(a+b)(a+x)$.Со средување на последното равенство се добива $2x^2=a^2+b^2$, од каде $x=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}=\sqrt{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2+(\frac{b}{\sqrt{2}})^2}$.



Решение Б. Нека правата $p\parallel AB\parallel CD$ ги сече краците AD и BC во точките K и L соодветно и го преполовува трапезот $ABCD$ на два енаквоплоштни дела. Нека $\overline{KL}=x$. Ги продолжуваме краците AD и BC до нивниот пресек M.(види цртеж) Тогаш, триаголниците ΔABM, ΔKLM и ΔDCM се слични, па следи дека $P_{ABM}:P_{KLM}:P_{DCM}=a^2:x^2:b^2$, односно $P_{ABM}=ka^2$, $P_{KLM}=kx^2$ и $P_{DCM}=kb^2$. Од условот $P_{ABLK}=P_{KLCD}$ добиваме $P_{ABM}-P_{KLM}=P_{KLM}-P_{DCM}$, т.е $ka^2-kx^2=kx^2-kb^2$, од каде се добива $x^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, па $x=\sqrt{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2+(\frac{b}{\sqrt{2}})^2}$.

Пример 101: Низ точката O во правоаголникот ABCD повлечени се прави паралелни со страните на правоаголникот што го разбиваат на четири правоаголници *POED, OMCE, AKOP, KBMO.*



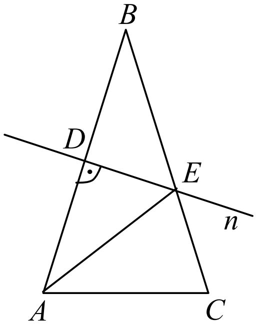
1) Ако плоштините на правоаголниците POED, OMCE, AKOP, се соодветно 2, 4, 6, определи ја плоштината на правоаголникот ABCD.

2) Ако периметрите на правоаголниците POED, OMCE, AKOP, се соодветно 6, 10, 10, пресметај го периметарот на правоаголникот ABCD.

Решение. 1) Бидејќи плоштината на OMCE е два пати поголема од плоштината на POED, следи дека страната OM е два пати поголема од страната OP. Слично, бидејќи плоштината на AKOP е три пати поголема од плоштината на POED, следи дека OK е три пати поголема од OE. Заклучуваме дека плоштината на правоаголникот BMOK е $2\cdot3=6$ пати поголема од плоштината на правоаголникот POED, т.е изнесува $6\cdot2=12$. Плоштината на ABCD е сума од плоштините на четирите правоаголници и е еднаква на $2+4+6+12=24$.

2) Од тоа што периметарот на OMCE е за 4 поголем од периметарот на POED, следува дека OM е за 4:2=2 поголема од OP. Аналогно, OK е за два поголема од OE. Следи дека периметарот на KBMO е за $2\cdot2+2\cdot2=8$ поголем од периметарот на POED, и изнесува $6+8=14$. За да се определи периметарот на правоаголникот ABCD, треба да се соберат периметрите на четирите правоаголници и збирот да се подели со 2, односно периметарот на ABCD е $\frac{6+10+10+14}{2}=20$.

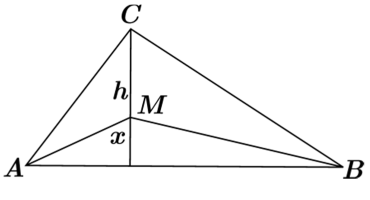
Пример 102: Нека е даден рамнокракиот триаголник *ABC*, каде $\overline{AB}=\overline{CB}$, со основа $\overline{AC}=10cm$. Низ средината *D* на кракот *AB* повлечена е нормала *n* на кракот *AB* која го сече кракот *CB* во точката *E*. Ако периметарот на триаголникот *ABC* е 40*cm*, пресметај го периметарот на триаголникот *AEC*.



Решение. Нека *ABC* е рамнокрак триаголник ($\overline{AB}=\overline{CB}$), *D* средина на кракот *AB*, *n* нормала на *AB* низ *D* која го сече кракот *CB* во точката *E*.(цртеж) Од $\overline{AC}=10cm$ и $L_{ABC}=40cm$, следи дека должината на секој од краците е $\overline{AB}=\overline{CB}=(40-10):2=15cm$. Триаголниците *ADE* и *BDE* се складни (САС: $\overline{AD}=\overline{BD}$ од *D* средина на кракот *AB*, $\angle ADE=\angle BDE=90°$, $\overline{DE}$ заедничка страна). Оттука следува дека $\overline{AE}=\overline{BE}$. Па сега, периметарот на триаголникот *AEC* е

$$L_{AEC}=\overline{AE}+\overline{EC}+\overline{AC}=(\overline{BE}+\overline{EC})+\overline{AC}=\overline{BC}+\overline{AC}=15+10=25cm.$$

Пример 103: Даден е триаголник ABC со страни $\overline{AC}=b,\overline{BC}=a$ и висината спуштена од темето C $\overline{CD}=h$. Одреди точка M на висината таква да збирот $\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2$ е најмал.



Решение. Нека $\overline{MD}=x$. Тогаш $\overline{CM}=h-x$, односно $\overline{CM}^2=(h-x)^2$. Користејќи Питагорова теорема може да ги изведеме и следниве релации:

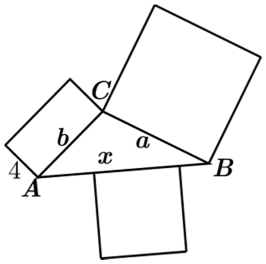
$\overline{AM}^2=\overline{AD}^2+x^2=b^2-h^2+x^2$ и $\overline{BM}^2=\overline{BD}^2+x^2=a^2-h^2+x^2$. Со замена за збирот добиваме

$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2=b^2-h^2+x^2+a^2-h^2+x^2+(h-x)^2$, односно

$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2=3x^2-2hx+a^2+b^2-h^2$. Јасно, збирот ќе биде минимален во точката во која квадратната функција $f(x)=3x^2-2hx+a^2+b^2-h^2$ достигнува свој минимум, односно во темето на параболата. Темето на параболата е во точката $\left(\frac{h}{3},a^2+b^2-\frac{4}{3}h^2\right)$, од каде заклучуваме дека точката *M* е определена со растојанието $\overline{MD}=\frac{h}{3}$.

Пример 104: Градовите A, B и C се поврзани со праволиниски патишта. Покрај патот A-B се наоѓа квадратно поле со страна $0,5\overline{AB}$, а покрај патот B-C се наоѓа квадратно поле со страна $\overline{BC}$; покрај патот A-C постои шума со правоаголна форма, чија должина е $\overline{AC}$, а ширина 4 километри. Најди ја плоштината на шумата, ако таа е за 20 километри поголема од збирот на плоштините на квадратните полиња.

Решение. Нека $\overline{AB}=a,\overline{BC}=b,\overline{AC}=x$. Притоа $a+b\geq x$. Според условот



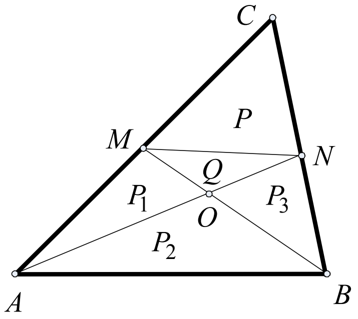
$$4x=\frac{a^2}{4}+b^2+20 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+5$$

$$a+b\geq\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+5\Rightarrow\quad 16a+16b\geq a^2+4b^2+80$$

$$a^2-16a+4b^2-16b+80\leq 0\Rightarrow\quad (a-8)^2+4(b-2)^2\leq 0$$

$$\Rightarrow a=8,b=2 \quad\Rightarrow x=10 \quad\Rightarrow\quad P=40km^2$$

Пример 105: Во триаголникот ABC на страната AC е земена точка M, а на страната BC е земена точка N. Отсечките AN и BM се сечат во точката O. Површините на триаголниците AMO,ABO,BNO се еднакви на P_1,P_2,P_3 соодветно. Пресметај ја плоштината на триаголникот CMN.



Решение. Плоштината на триаголникот CMN ќе ја означиме со P а плоштината на триаголникот MON ќе ја означиме со Q.

Триаголниците AMO и MON имаат еднакви висини кон AO и ON, соодветно, и триаголниците AOB и NOB имаат еднакви висини кон AO и ON, соодветно, па затоа $\frac{P_1}{Q}=\frac{\overline{AO}}{\overline{ON}}=\frac{P_2}{P_3}$.

Од последното равенство добиваме $Q=\frac{P_1P_3}{P_2}$. Од парот триаголници CMN и BMN, и парот триаголници ANC и ANB, (секој пар има еднакви висини спуштени кон CN и NB, соодветно), добиваме: $\frac{P}{Q+P_3}=\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}=\frac{P_1+Q+P}{P_2+P_3}$.

Според тоа, $P(P_2-Q)=Q^2+QP_1+QP_2+P_1P_3$, т.е. $P=\frac{Q^2+QP_1+QP_2+P_1P_3}{P_2-Q}$, и ако во последното равенство замениме $Q=\frac{P_1P_3}{P_2}$, добиваме

$$P=\frac{\left(\frac{P_1P_3}{P_2}\right)^2+\frac{P_1P_3}{P_2}P_1+\frac{P_1P_3}{P_2}P_3+P_1P_3}{P_2-\frac{P_1P_3}{P_2}}=\frac{P_1P_3(P_1+P_2)(P_2+P_3)}{P_2(P_2^2-P_1P_3)}.$$

Пример 106:

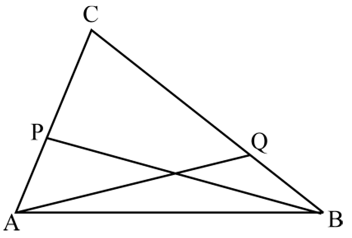
Даден е триаголник ABC. Точките P и Q лежат на страните AC и BC, соодветно и за нив важи $L_{\Delta ABP}=L_{\Delta ABQ}$, $L_{\Delta AQC}=L_{\Delta BPC}$ (каде со $L_{\Delta XYZ}$ е означен периметарот на триаголник XYZ). Докажи дека триаголникот ABC е рамнокрак.

***Решение*:** Од тоа што

$L_{\Delta ABC}=L_{\Delta ABQ}+L_{\Delta AQC}-2\overline{AQ}$ и

$L_{\Delta ABC}=L_{\Delta ABP}+L_{\Delta BPC}-2\overline{PB}$ следува дека $\overline{AQ}=\overline{PB}$.

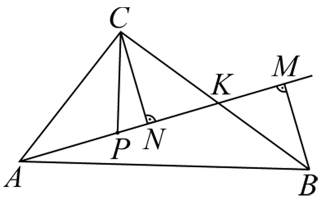
Потоа, $\overline{AP}=L_{\Delta ABP}-\overline{AB}-\overline{PB}=L_{\Delta ABQ}-\overline{AB}-\overline{AQ}=\overline{BQ}$. Значи $\Delta ABP\cong\Delta AQB$, па $\measuredangle PAB=\measuredangle QBA$ односно триаголникот ABC е рамнокрак.



Пример 107:

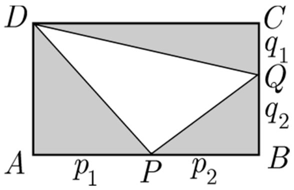
Во внатрешноста на триаголник *ABC* е избрана точка *P* така што триаголниците *ABP*, *BCP* и *CAP* имаат еднакви плоштини. Докажи дека точката *P* е тежиште на триаголникот *ABC*.

Решение: Триаголниците *ABP* и *CAP* имаат еднакви плоштини и заедничка страна *AP*. Затоа висините во овие триаголници $\overline{BM}$ и $\overline{CN}$, соодветно, повлечени кон *AP*, се еднакви. Нека *AP* ја сече страната *BC* во точка *K*. Тогаш, од $\overline{BM}=\overline{CN}$, $\angle CNK=\angle BMK$ и $\angle CKN=\angle BKM$, триаголниците *CNK* и *BMK* се складни и затоа $\overline{CK}=\overline{BK}$, односно $\overline{AK}$ е тежишна линија. Аналогно, се докажува и за другите две тежишни линии, односно докажуваме дека трите тежишни линии минуваат низ *P*. Тогаш *P* е тежиште во триаголникот *ABC*.

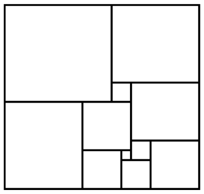


Пример 108:

Во правоаголникот *ABCD*, точките *P* и *Q* се точки од *AB* и *BC* соодветно, така што триаголниците *APD*,*PBQ* и *QCD* имаат иста плоштина. Најди го количникот $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$.



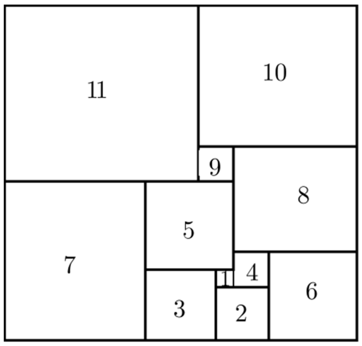
Решение. Воведуваме ознаки $\overline{AP}=p_1$, $\overline{PB}=p_2$, $\overline{QB}=q_2$ и $\overline{QC}=q_1$. Од равенството $\frac{1}{2}(p_1+p_2)\cdot q_1=\frac{1}{2}(q_1+q_2)p_1$ добиваме $\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}$, а од $\frac{1}{2}(q_1+q_2)p_1=\frac{1}{2}q_2p_2$, добиваме $\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_2}{q_1+q_2}$. Според тоа $\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_2}{q_1+q_2}=\frac{1}{\frac{q_1}{q_2}+1}=\frac{1}{\frac{p_1}{p_2}+1}$. Значи, $\frac{p_1}{p_2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.



Пример 109: Нацртаниот правоаголник на цртежот е поделен на 11 квадрати со различни страни. Најмалиот квадрат има страна 9. Кои се димензиите на правоаголникот?

Решение. Квадратот означен со бројот 1 има должина (т.е. должина на страна) 9. Нека квадратот бр. 2 има должина џ. Тогаш квадратот бр. 3 има должина $x+9$, квадратот бр. 4 има должина $x-9$, квадратот бр. 5 има должина $x+18$, квадратот бр. 6 има должина $2x-9$, квадратот бр. 7 има должина $2x+27$, квадратот бр. 8 има должина $3x-18$.

Ако страната на квадратот бр. 9 е s, тогаш $y+(x+18)+9=(3x-18)+(x-9)$, од каде $y=3x-54$. Па, квадратот бр. 10 има страна $6x-72$, а квадратот бр. 11 страна $9x-126$.

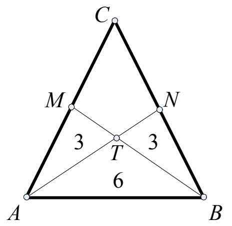


Горната страна на дадениот правоаголник е збир на страните на квадратите бр. 10 и 11, т.е. има должина $(6x-72)+(9x-126)=15x-198$, а неговата долна страна е збир на страните на квадратите бр. 7, 3, 2 и 6, т.е. има должина

$$(2x+27)+(x+9)+x+(2x-9)=6x+27.$$

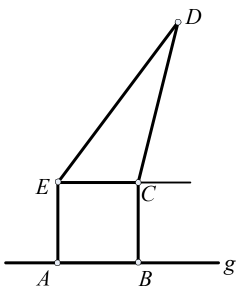
Изедначувајќи ги добиените изрази добиваме $x=25$.

Затоа страните на квадратите означени со броевите од 1 до 11 се 9, 25, 34, 16, 43, 41, 77, 57, 21, 78, 99, соодветно. Па, должината на дадениот правоаголник е 177, а ширината 176.



Пример 110: Точките M и N се средини на бочните страни на рамнокракиот триаголник ABC (види цртеж). Колку е плоштината на означениот четириаголник $MTNC$?

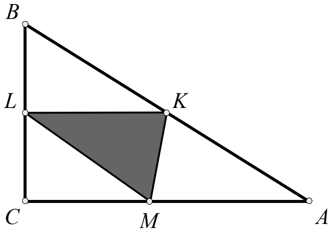
Решение. Триаголниците ABN и ANC имаат иста страна (страна со иста должина) и висина спуштена од нивното заедничко теме A. Според тоа, тие имаат иста плоштина. Сега е јасно дека плоштината на четириаголникот е $P=6$.



Пример 111: Должината на страната наквадратот $ABCE$ е $4\,\mathrm{cm}$, и тој има иста иста плоштина со триаголникот ECD (види цртеж). На кое растојание е точката D од правата g.

Решение. Плоштината на квадратот е $P = 4 \cdot 4 = 16\ \text{cm}^2$. Основата EC на триаголникот EDC има иста должина како и страната на квадратот, а бидејќи имаат еднакви плоштини добиваме $16 = \frac{4 \cdot h}{2}$. Според тоа $h = 8$, односно растојанието од D до правата g е еднакво на $8 + 4 = 12\ \text{cm}$.

Пример 112: Триаголникот ABC е правоаголен и има катети со должини $6\ \text{cm}$ и $8\ \text{cm}$. Точките K, L, M се средини на неговите страни. Колку е периметарот на триаголникот KLM ?



Решение. Ако должините на катетите на правоаголниот триаголник се $6\ \text{cm}$ и $8\ \text{cm}$, тогаш должината на неговата хипотенуза е

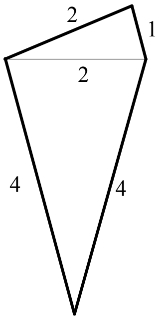
$$c = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Неговиот периметар е $L = 10 + 8 + 6 = 24\ \text{cm}$.

Ако K, L и M се средини на страните AB, BC, CA соодветно, тогаш $KL \parallel AC$, $LM \parallel AB$ и $MK \parallel BC$, и бидејќи се средни линии добиваме $\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, $\overline{LM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ и $\overline{MK} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

Според тоа $L_{KLM} = \overline{KL} + \overline{LM} + \overline{MK} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}24 = 12\ \text{cm}$.

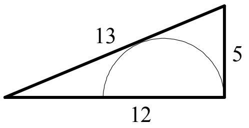
Пример 113: Должините на две страни на еден четириаголник се 1 и 4. Една негова дијагонала, која го дели на два рамнокраки триаголници, има должина 2. Колку е периметарот на четириаголникот?



Решение. Четириаголникот не може да има две страни со должина 1, бидејќи во тој случај не може да има дијагонала со должина 2 која го дели на два рамнокраки триаголници (ако има две такви страни, тогаш со дијагоналата со должина 2 може да има делбен рамнокрак триаголник со страни $1, 2, 2$, а другиот триаголник да има страни $1, 2, 4$, што не е можно (не постои триаголник со страни $1, 2, 4$), или да има делбен триаголник со страни $1, 1, 2$ кое пак не е можно, таков тризаголник не постои). Според тоа, четириаголникот има една страна со должина 1. Истата е страна на рамнокрак триаголник со страни $1, 2, 2$. Но тогаш другите две страни на четириаголникот ќе бидат со должина 4.

Значи, неговиот периметар е $1 + 2 + 4 + 4 = 11$.

Пример 114: На цртежот е даден правоаголен триаголник со страни $5, 12$ и 13. Колку е радиусот на полукругот впишан во него?



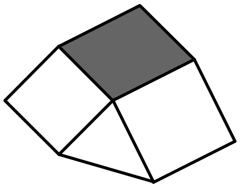
Решение. Ако r е радиусот на полукружницата впишана во правоаголниот триаголник, тогаш r е радиус на кружница впишана рамнокрак траиголник со основа 10 и крак 13.

Тогаш P на тој триаголник е $P = \frac{12 \cdot 10}{2} = 60$, а од друга страна

$$P=\frac{13+13+10}{2}r=\frac{36}{2}r=18r\,.$$

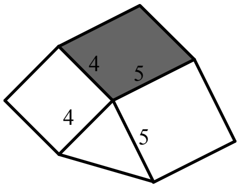
Според тоа $18r=60$, односно $r=\frac{60}{18}=\frac{10}{3}$.

Пример 115: На цртежот е дадена геометриска фигура која што се состои од два квадрати со страни $4\ \mathrm{cm}$ и $5\ \mathrm{cm}$, триаголник со плоштина $8\ \mathrm{cm}^2$ и исенчен паралелограм.



Колку е плоштината на исенчениот паралелограм во cm^2?

Решение. Две страни на триаголникот имаат должини $5\ \mathrm{cm}$ и $4\ \mathrm{cm}$, а тие страни зафаќаат агол α. Бидејќи неговата плоштина е $8\ \mathrm{cm}^2$ имаме $8=\frac{4\cdot 5\cdot \sin\alpha}{2}$, од каде добиваме $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

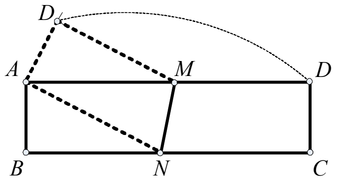


Од друга страна, вредноста на поголемиот агол на исенчениот паралелограм е $\beta=360^\circ-(90^\circ+90^\circ+\alpha)=180^\circ-\alpha$.

Да забележиме дека $\sin\beta=\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$.

Сега, плоштината на паралелограмот е $P=5\cdot 4\cdot \sin\beta=5\cdot 4\cdot \frac{4}{5}=16\ \mathrm{cm}^2$.

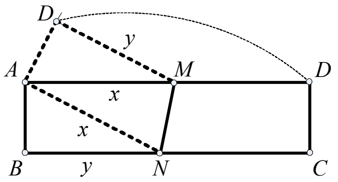
Пример 116: Правоаголно парче хартија со димензии $4\ \mathrm{cm}\times 16\ \mathrm{cm}$ е преклопено преку правата што минува низ точките M и N, така што темето C се совпаѓа со темето A, како што е прикажано на цртежот. Колку е плоштината на петаголникот $BNMDA$?



Решение. Од самата конструкција е јасно дека

$\overline{AB}=\overline{AD}$, $\overline{AN}=\overline{AM}$, $\overline{BN}=\overline{DM}$,

односно $\Delta ABN\cong\Delta ADM$. Ако воведеме ознаки $\overline{AM}=x$ и $\overline{DM}=y$, тогаш $\begin{cases} x+y=16\\ x^2-y^2=4^2\end{cases}$

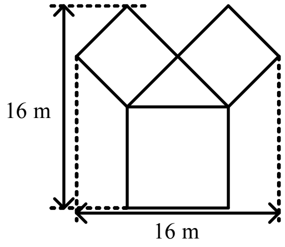


од каде добиваме $x=\frac{17}{2}$, $y=\frac{15}{2}$.

Сега за бараната плоштина добиваме

$$P_{ABNMD}=\frac{\frac{17}{2}+\frac{15}{2}}{2}\cdot 4+\frac{4\cdot\frac{15}{2}}{2}=32+25=47\ \mathrm{cm}^2\,.$$

Пример 117: На цртежот е прикажана градина со рози. Бели рози растат во еднаквите квадрати, црвени рози растат во третиот квадрат. Жолти рози растат во правоаголниот триаголник. Должината и ширината на градината е $16\ \mathrm{m}$ (види цртеж).



Колку е површината засадена со рози?

Решение. Ако a е должината на страната на квадратот на кои растат бели рози, тогаш $a\sqrt{2}$ е негова дијагонала и $2a\sqrt{2}=16$. Значи, $a=4\sqrt{2}\ \mathrm{m}$, од каде добиваме:

-површина со бели рози е $P_1=2a^2=2\cdot(4\sqrt{2})^2=2\cdot16\cdot2=64\ \mathrm{m}^2$;

-површина со жолти рози е $P_2=\dfrac{a\cdot a}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}}{2}=16\ \mathrm{m}^2$;

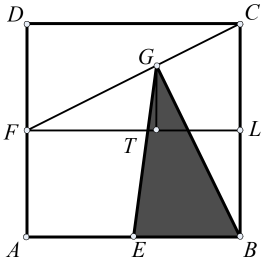
-површина со црвени рози е $P_3=(\sqrt{a^2+a^2})^2=2a^2=64\ \mathrm{m}^2$.

Значи, површина со рози е $P=P_1+P_2+P_3=(64+16+64)\ \mathrm{m}^2=144\ \mathrm{m}^2$.

Пример 118:

Должината на страната на квадратот $ABCD$ е 2. Точките E и F се средини на страните AB и AD соодветно. Точката G од отсечката CF е таква што $3\overline{CG}=2\overline{GF}$.

Колку е плоштината на триаголникот BEG?



Решение. Нека FL е средна линија на квадратот а T е подножје на нормалата спуштена од точката G на FL.

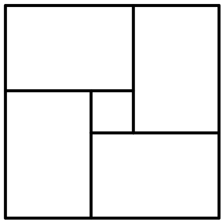
Тогаш триаголниците FTG и FLC се слични, па според тоа $\dfrac{\overline{FG}}{\overline{GT}}=\dfrac{\overline{FC}}{\overline{CL}}$

односно $\dfrac{\frac{3}{5}\overline{FC}}{\overline{GT}}=\dfrac{\overline{FC}}{1}$.

Значи, $\overline{GT}=\dfrac{3}{5}$. Според тоа, висината на триаголникот GEB е еднаква на $h=1+\dfrac{3}{5}=\dfrac{8}{5}$, а неговата плоштина ќе биде $P=\dfrac{1\cdot\frac{8}{5}}{2}=\dfrac{4}{5}$.

Пример 119:

Квадратот даден на цртежот се состои од четири складни правоаголници и еден мал квадрат. Односот на плоштините на поглемиот и помалиот квадрат е $9+4\sqrt{5}$. Колкав е односот на страните на правоаголниците?



Решение. Со a и b ќе ги означиме должините на страните на поголемиот и помалиот квадрат соодветно, а со x и y ќе ги означиме должините на страните на правоаголникот ($y>x$). Од условот на задачата имаме $9+4\sqrt{5}=\dfrac{a^2}{b^2}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=(2+\sqrt{5})^2,$$

па според тоа $\dfrac{a}{b}=2+\sqrt{5}$.

Да забележиме дека $a=x+y$ и $y=b+x$. Но, тогаш $x=\dfrac{1}{2}(a-b)$ и $y=\dfrac{1}{2}(a+b)$, од каде добиваме

$$\frac{x}{y}=\frac{a-b}{a+b}=\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1}=\frac{2+\sqrt{5}-1}{2+\sqrt{5}+1}=\frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

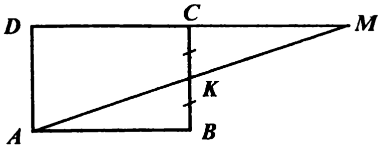
што требаше да се определи.

Пример 120: Во трапезот $ABCD$ ($AB\parallel CD$) важи $P_{\Delta ACD}=32m^2$ и $P_{\Delta DCB}=13m^2$. Одреди ја плоштината на трапезот $ABCD$.

Решение. Да ги означиме подножјата на висините од темињата A и B на продолженијата на страната CD со E и F, соодветно. Нека $\overline{ED}=x$, $\overline{CF}=y$ и $\overline{AE}=\overline{BF}=h$. Тогаш $a=b+x+y$ и $P_{\Delta ACD}=32m^2=\frac{(b+x)h}{2}$ и $P_{\Delta DCB}=13m^2=\frac{(b+y)h}{2}$. Плоштината на трапезот е

$$P=\frac{(a+b)h}{2}=\frac{(b+x+b+y)h}{2}=32m^2+13m^2=45m^2.$$

Пример 121: Пресметај ја плоштината на правоаголникот $ABCD$ даден на цртежот, ако $P_{\Delta AMD}=33\,\mathrm{cm}^2$ и $\overline{CK}=\overline{BK}$.

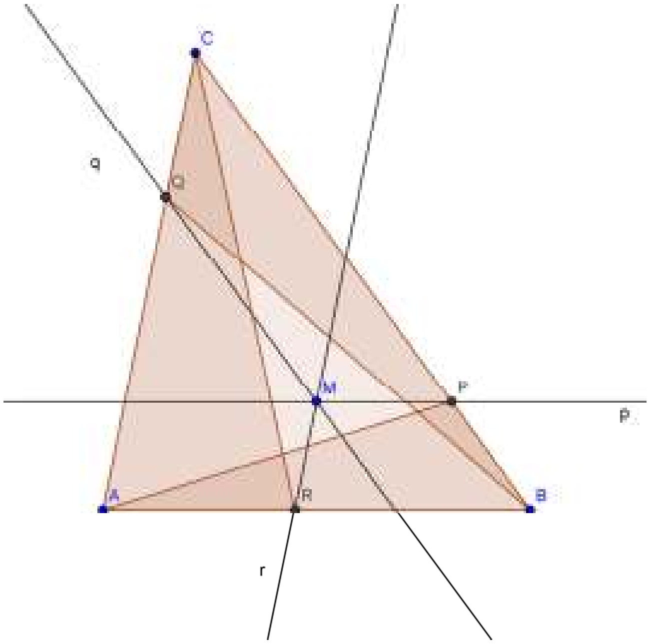


Решение. $\Delta ABK\cong\Delta MCK$ па $\overline{CM}=\overline{AB}=a$.

Бидејќи $P_{\Delta AMD}=33\,\mathrm{cm}^2=\frac{2ab}{2}=ab$, па

$P_{ABCD}=33\,\mathrm{cm}^2$

Пример 122:

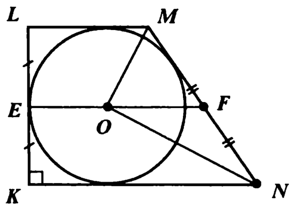


Во внатрешноста на триаголникот ABC избрана е точка M. Низ точката M повлечени се прави p,q и r паралелни на страните AB,BC и CA, соодветно. Нека P е пресечна точка на правата p со BC, Q е пресечна точка на q со CA и R е пресечна точка на r со AB. Докажи дека $P_{\Delta ABP}+P_{\Delta BCQ}+P_{\Delta CAR}=P_{\Delta ABC}$.

Решение. Триаголниците ABP и ABM имаат иста основа AB и иста висина, бидејќи точките M и P лежат на иста права паралелна со основата, па важи $P_{\Delta ABP}=P_{\Delta ABM}$.

Слично, $P_{\Delta BCQ}=P_{\Delta BCM}$ и $P_{\Delta CAR}=P_{\Delta CAM}$. Според тоа $P_{\Delta ABP}+P_{\Delta BCQ}+P_{\Delta CAR}=P_{\Delta ABM}+P_{\Delta BCM}+P_{\Delta CAM}=P_{\Delta ABC}$.

Пример 123: Одреди ја должината на средната линија на правоаголен трапез опишан околу кружница, ако растојанијата од центарот на кружницата до темињата на подолгиот крак се 6 и 8.



Решение. Нека O е центарот на кружницата. Тогаш MO и NO се симетрали на аглите кај темињата M и N, па

$$\sphericalangle OMN+\sphericalangle ONM=\frac{1}{2}\sphericalangle KNM+\frac{1}{2}\sphericalangle LMN=\frac{1}{2}180^{0}=90^{0},$$

па ΔOMN е правоаголен. Следува $\overline{MN}=10$.

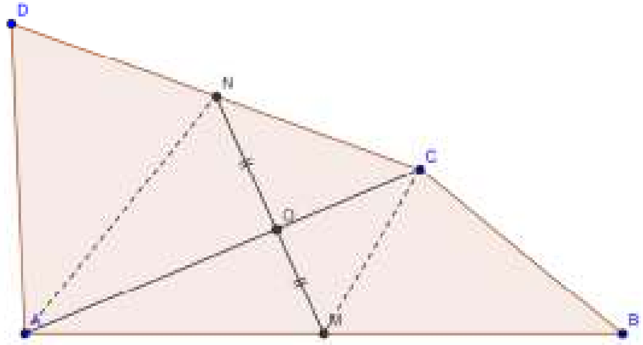
Нека h е висина во ΔOMN спуштена од O. Тогаш

$P_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=\frac{1}{2}10h$, т.е. $h=4,8$. Значи и $\overline{LE}=\overline{EK}=4,8$, па $\overline{LK}=9,6$.

Бидејќи трапезот е тангентен следува дека $\overline{KL}+\overline{MN}=\overline{LM}+\overline{KN}$, т.е.

$\overline{LM}+\overline{KN}=9,6+10=19,6$. Конечно, $\overline{EF}=\frac{19,6}{2}=9,8$.

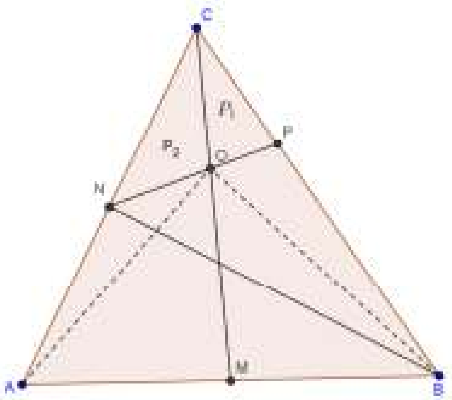
Пример 124: Даден е четириаголник $ABCD$. Отсечката која ги сврзува средините на страните AB и CD, со дијагоналата AC е поделена на два еднакви дела. Докажи дека $P_{\Delta ABC}=P_{\Delta ADC}$.



Решение. Нека M е средина на AB, а N е средина на CD, а пресечната точка на AC и MN е O. Тогаш триаголниците AMO и AON имаат иста плоштина, бидејќи $\overline{MO}=\overline{ON}$ и висината спуштена од темето A е еднаква. Слично триаголниците OMC и NOC имаат иста плоштина, па $P_{\Delta ACN}=P_{\Delta AMC}$.

Бидејќи M е средина на AB, а N е средина на CD следува дека $P_{\Delta AMC}=P_{\Delta MBC}$ и $P_{\Delta ACN}=P_{\Delta AND}$ од каде следува дека $P_{\Delta ABC}=P_{\Delta ADC}$.

Пример 125: Точките M и N се средини на страните AB и AC, соодветно, на триаголникот ABC. Точката P лежи на страната BC и важи

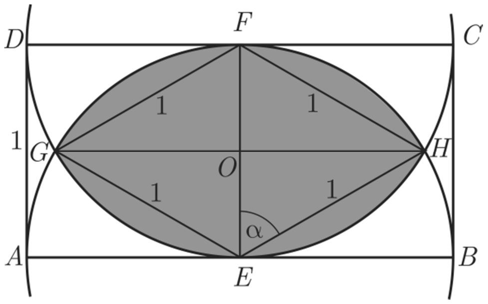


$\overline{PC}=\frac{1}{3}\overline{BC}$. Правите CM и NP се сечат во точката O. Изрази ја плоштината на ΔOPC преку плоштината на ΔABC.

Решение. Нека $P_{\Delta ABC}=P$, $P_{\Delta OPC}=P_1$ и $P_{\Delta NOC}=P_2$. Заради $\overline{CP}=\frac{1}{3}\overline{CB}$ следува дека $P_{\Delta CNP}=\frac{1}{3}P_{\Delta BNC}$. Бидејќи BN е тежишна линија за ΔABC следува дека $P_{\Delta BNC}=\frac{1}{2}P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}P$. Оттука добиваме дека $P_1+P_2=P_{\Delta CNP}=\frac{1}{6}P$.

Натаму, M е средина на AB па важи $P_{\Delta AMO}=P_{\Delta MOB}$ и $P_{\Delta AMC}=P_{\Delta MBC}$. Од тоа што O лежи на тежишната линија CM следува дека $P_{\Delta AOC}=P_{\Delta AMC}-P_{\Delta AMO}=P_{\Delta MBC}-P_{\Delta MBO}=P_{\Delta OBC}$. Бидејќи N е средина на AC следува дека $P_{\Delta AOC}=2P_{\Delta NOC}=2P_2$. Слично, $P_{\Delta OBC}=3P_1$. Значи, $3P_1=2P_2$. Оттука и од $P_1+P_2=\frac{1}{6}P$ добиваме дека $P_1+\frac{3}{2}P_1=\frac{1}{6}P$, т.е. $P_1=\frac{1}{15}P$.

Пример 126: Нека $ABCD$ е правоаголник со страни $\overline{AB}=2$ и $\overline{AC}=1$, и нека E е средина на AB и F е средина на CD. Со центри во E и F и радиуси 1 конструирани се кружници. Докажи дека плоштината на делот зафатен меѓу кружниците е $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Доказ. Нека G и H се пресечните точки на кружниците. Јасно е дека четириаголникот $EHFG$ е ромб со страна 1 и триаголниците FEH и FGE се рамнострани со страна 1, па $\alpha=\sphericalangle FEH=60^\circ$. Значи, плоштината P_1 на отсечокот FH е

$$P_1=P_{\text{исечокот } FEH}-P_{\Delta FEH}=\frac{1^2\pi 60}{360}-\frac{1^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

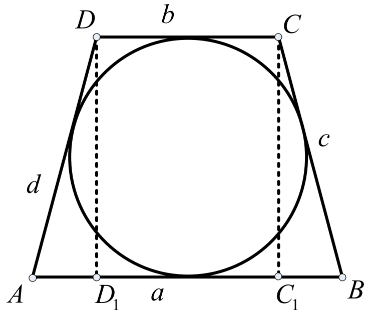
.

Бараната плоштина е

$$P=2P_{\Delta EFH}+4P_1=2\frac{\sqrt{3}}{4}+4\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 127: Околу кружница со радиус r опишан е трапез чии агли при подолгата основа се α,β и тие се остри. Докажи дека односот на плоштините на трапезот и кругот е

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right).$$



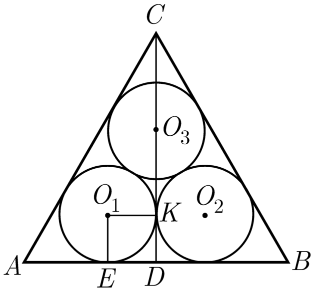
Решение. Нека C_1,D_1 се подножјата на висините спуштени од C и D врз основата AB. Од ΔAD_1D добиваме $\overline{AD}=d=\frac{2r}{\sin\alpha}$, а од ΔBC_1C имаме $\overline{BC}=c=\frac{2r}{\sin\beta}$.

Трапезот е тангентен па важи $a+b=c+d$. За плоштината на трапезот имаме

$$P=\frac{a+b}{2}\cdot 2r=\left(c+d\right)\cdot r=r\left(\frac{2r}{\sin\beta}+\frac{2r}{\sin\alpha}\right)=2r^2\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right).$$

А со оглед на тоа дека плоштината на кругот е $r^2\pi$, го добиваме бараниот однос.

Пример 128: Во рамностран триаголник со страна a конструирани се три кружници со исти радиуси така што се допираат меѓу себи и тангенти на секоја од кружниците се две страни од триаголникот. Најди ја плоштината на делот од триаголникот што е надвор од кружниците.



Решение. Нека O_1, O_2 и O_3 се центрите на кружниците, r_1 нивниот радиус, CD е висината на триаголникот спуштена од C и нека E и D се ортогонални проекции на O_1 на AB и CD, соодветно. Јасно, $\overline{ED}=r_1$ и $\overline{AD}=\frac{a}{2}$. Правата AO_1 е симетрала на аголот CAB, па $\sphericalangle O_1AE=30^\circ$. Од правоаголниот триаголник AEO_1 добиваме дека $\overline{AO_1}=2\overline{O_1E}=2r_1$, па $\overline{AE}=\sqrt{\overline{AO_1}^2-\overline{O_1E}^2}=\sqrt{4r_1^2-r_1^2}=r_1\sqrt{3}$. Сега имаме $\frac{a}{2}=\overline{AD}=\overline{AE}+\overline{ED}=r_1\sqrt{3}+r_1$

и оттука $r_1=\frac{a}{2\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$.

Значи, бараната плоштина е

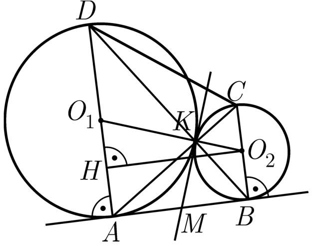
$$P=P_{\Delta ABC}-3\pi r_1^2=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-3\pi\left(\frac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}\right)^2=\frac{a^2\left(2\sqrt{3}-6\pi+3\pi\sqrt{3}\right)}{8}.$$

Пример 129: Две кружници со центри O_1 и O_2 и радиуси 4 и 1 се допираат однадвор в точката K. Правата AB ја допира поголемата кружница во точката A а другата во точката B. Пресметај ја плоштината на

а) трапезот ABO_2O_1 и триаголникот ABK

б) делот од рамнината ограничен со AB и двете кружници

Решение. а) Нека D е втората пресечна точка на BK со поголемата кружница а C е втората пресечна точка на AK со помалата кружница и нека M е пресечната точка на заедничката тангента во K со правата AB. Следува дека $\overline{AM}=\overline{MK}$ како тангентни отсечки на едната кружница и $\overline{BM}=\overline{MK}$ како тангентни отсечки на втората кружница, т.е. $\overline{AM}=\overline{MK}=\overline{BM}$, па точките A, B и K лежат на кружница со центар M и радиус AM, па аголот AKB е прав. Значи и аглите $AKD\ BKC$ се прави, па AD и CB се дијаметри на кружниците. Следува $DA\perp AB$ и $CB\perp AB$, т.е. $AD\parallel BC$, па $\Delta AKD\sim\Delta CKB$.



Според тоа $4=\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DK}}{\overline{BK}}$. Нека P_1 е плоштината на триаголникот BKC.

Тогаш добиваме $P_{\Delta AKD}=16P_1$. Триаголниците AKD и AKB имаат заедничка висина AK, па $\frac{P_{\Delta AKD}}{P_{\Delta AKB}}=\frac{\overline{DK}}{\overline{KB}}=\frac{\overline{DK}}{\overline{BK}}=4$, т.е. $P_{\Delta AKD}=4P_{\Delta AKB}$. Од последново и $P_{\Delta AKD}=16P_1$ добиваме дека $P_{\Delta AKB}=4P_1$.

Правоаголните триаголници DKC и CKB имаат иста висина CK и $\frac{\overline{DK}}{\overline{BK}}=4$, па $P_{\Delta DKC}=4P_1$.

Сега, плоштината на трапезот $ABCD$ е $P_{ABCD}=25P_1$.

Од друга страна AB е висина на тој трапез. Нека H е ортогонална проекција на O_2 на AD. Тогаш важи $\overline{AH}=\overline{O_2B}=1$ па $\overline{O_1H}=3$. Од правоаголниот триаголник O_1O_2H добиваме $\overline{O_2H}=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-\overline{O_1H}^2}=4$. Значи, плоштината на трапезот е $P_{ABCD}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{CB})\overline{O_2H}=\frac{1}{2}(8+2)4=20$.

Сега имаме $20=25P_1$, па $P_1=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$. Оттука $P_{\Delta AKB}=4P_1=\frac{16}{5}$.

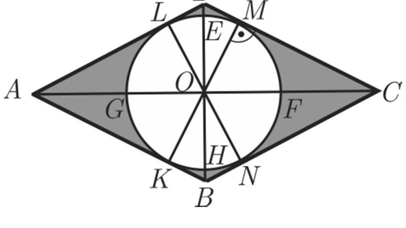
б) Од правоаголниот триаголник O_1O_2H добиваме $\sin\sphericalangle HO_1O_2=\frac{\overline{O_2H}}{\overline{O_1O_2}}=\frac{4}{5}$, па аголот $\alpha=\sphericalangle HO_1O_2$ може да го определиме и $\alpha\approx 53{,}13^\circ$, па плоштината P_2 на исечокот AO_1K е $P_2=\frac{\overline{AO_1}^2\pi\alpha}{360}=\frac{2\pi\alpha}{45}$. За плоштината P_3 на исечокот AK добиваме $P_3=P_2-P_{\Delta AKO_1}=\frac{2\pi\alpha}{45}-\frac{\overline{O_1A}\cdot\overline{O_1K}}{2}\sin\alpha=\frac{2\pi\alpha}{45}-\frac{4\cdot 4}{2}\frac{4}{5}=\frac{2\pi\alpha}{45}-\frac{32}{5}\approx 1$.

За аголот $\beta=\sphericalangle HO_2O_1$ имаме $\beta=90^\circ-\alpha$, па $P_{\Delta KO_2B}=\frac{\overline{KO_2}\cdot\overline{BO_2}}{2}\sin\left(90^\circ+\beta\right)=\frac{1}{2}\sin\left(90^\circ+\beta\right)$, па за плоштината P_4 на отсечокот BK имаме

$$P_4=\frac{\overline{O_2K}^2\pi\left(90^\circ+\beta\right)}{360}-\frac{1}{2}\sin\left(90^\circ+\beta\right)=\frac{\pi\left(90^\circ+\beta\right)}{360}-\frac{1}{2}\sin\left(90^\circ+\beta\right)\approx 0{,}7\,.$$

Бараната плоштина е $P_{\Delta ABK}-\left(P_3+P_4\right)\approx\frac{16}{5}-1-0{,}7=1{,}5$.

Пример 130: На кружницата со радиус R повлечени се четрири тангенти кои формираат ромб со поголема дијагонала $4R$. Определи ја плоштината на делот од рамнината што се наоѓа во ромбот и надвор од кружницата.

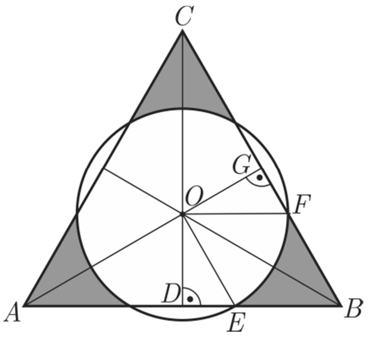


Решение. Бидејќи OF е радиус, следува дека $\overline{OC}=2\overline{OF}=2R$. Триаголникот OMC е правоаголен и $\overline{OM}=R$, па следува дека $\sphericalangle OCM=30^\circ$, па $\sphericalangle MOC=60^\circ$ и $\overline{MC}=R\sqrt{3}$. Спорд тоа плоштината на делот $MCNF$ е $\overline{MC}\cdot\overline{OM}-2\frac{\overline{OM}^2\pi 60}{360}=R^2\sqrt{3}-\frac{R^2\pi}{3}$.

Натаму, $\sphericalangle DOM = 30^\circ$, па имаме $\cos 30^\circ = \frac{\overline{MO}}{\overline{DO}}$, т.е. $\overline{DO} = \frac{\overline{MO}}{\cos 30^\circ} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, па добиваме $\overline{DM} = \sqrt{\overline{DO}^2 - \overline{MO}^2} = \sqrt{\frac{4R^2}{3} - R^2} = \frac{R}{\sqrt{3}}$, па плоштината на делот $LDME$ е $\overline{MO} \cdot \overline{DM} - 2\frac{\overline{MO}^2 \pi 30}{360} = \frac{R^2}{\sqrt{3}} - \frac{R^2 \pi}{6}$.

Бараната плоштина е $P = 2\left(R^2\sqrt{3} - \frac{R^2\pi}{3}\right) + 2\left(\frac{R^2}{\sqrt{3}} - \frac{R^2\pi}{6}\right) = \frac{R^2\left(2\sqrt{3} - \pi\right)}{3}$.

Пример 131: Нека ABC е рамностран триаголник со ортоцентар O и страна a. Конструирана е кружница со центар во O и радиус $\frac{a}{3}$. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината што е во триаголникот а надвор од кружницата.



Решение. Бидејќи $\overline{OD} = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6} < a$ следува дека кружницата ги сече страните на триаголникот во по две точки.

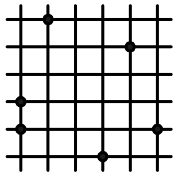
Триаголникот ODE е правоаголен и $\overline{OD} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ и $\overline{OE} = \frac{a}{3}$. Значи,

$\overline{DE} = \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{OD}^2} = \sqrt{\frac{a^2}{9} - \frac{3a^2}{36}} = \frac{a}{6} = \frac{\overline{OE}}{2}$, па

следува дека $\sphericalangle ODE = 30^\circ$, и оттука $\sphericalangle OED = 60^\circ$. Значи $\sphericalangle OEB = \sphericalangle OFB = 120^\circ$, $\sphericalangle EOF = \sphericalangle EBF = 60^\circ$ па четириаголникот $OFBE$ е ромб со страна $\frac{a}{3}$. Притоа, триаголникот OFE е рамностран и $\overline{OB} = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

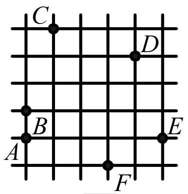
Значи, бараната плоштина е

$$P = 3\left(\frac{\frac{a}{3}\frac{a\sqrt{3}}{3}}{2} - \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2 \pi 60}{360}\right) = \frac{a^2}{18}\left(3\sqrt{3} - \pi\right).$$



Пример 132: Соседните точки (пресекот на делбените прави) на квадратната шема се на растојание 1 и на неа се избрани шест точки(види цртеж).

Која е најмалата плоштина на триаголниците со темиња во дадените (избраните) точки?



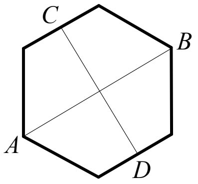
Решение. Точките кои се избрани ќе ги означиме со A, B, C, D, E и F (како на цртежот). Растојанијата помеѓу избраните точки се

$\overline{AB} = 1,\ \overline{AC} = \sqrt{17},\ \overline{AD} = 5,\ \overline{AE} = 5,\ \overline{AF} = \sqrt{10},\ \overline{BC} = \sqrt{10},\ \overline{BD} = 2\sqrt{5},\ \overline{BE} = \sqrt{26},$

$\overline{BF} = \sqrt{13},\ \ \overline{CD} = \sqrt{10},\ \ \overline{CE} = 4\sqrt{2},\ \ \overline{CF} = \sqrt{29},\ \ \overline{DE} = \sqrt{10},\ \ \overline{DF} = \sqrt{17},\ \ \overline{EF} = \sqrt{5}.$

Растојанијата од точките C, D, E, F до правата AB се $1, 4, 5, 3$. Ако избереме која било друга права определена со точки од дадените шест точки, тогаш растојанијата на останатите четири до неа се поголеми од 1. Бидејќи AB е отсечка со најмала должина, добиваме дека триаголникот ABC има најмала плоштина. Таа изнесува $P_{ABC} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.

Пример 133: Отсечката AB поврзува две спротивни темиња на правилен шестаголник. Отсечката CD поврзува средни точки на две спротивни страни на шестаголникот. Определи го производот на должините на отсечките AB и CD, ако плоштината на шестаголникот е 60.



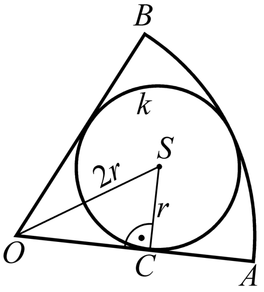
Решение. Ако a е должината на страната на шестаголникот, од условот на задачата имаме

$$60 = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \qquad a^2 = \frac{40}{\sqrt{3}}, \text{ т.е. } a = \sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}}.$$

Според тоа, $\overline{AB} = 2a = 2\sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}}$. Отсечката CD има должина $\overline{CD} = 2h$, каде h е висина на рамностран триаголник со страна a. Според тоа $\overline{CD} = 2h = 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}}$.

Конечно, $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 2\sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3}\sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}} = 2 \cdot 40 = 80$.

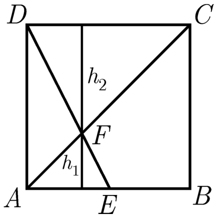
Пример 134: Круг е впишан во кружен исечок (кругот ги допира двата радиуси и лакот на исечокот). Радиусот на исечокот е 3 пати поголем од радиусот на кругот. Најди го односот на плоштините на исечокот и кругот.



Решение. Кругот *k*(*S*, *r*) е впишан во кружниот исечок *AOB* и затоа *S* лежи на симетралата на аголот *AOB*. Нека *C* е точката во која *k*(*S*,*r*) го допира радиусот *OA*. Тогаш триаголникот *OCS* е правоаголен, а од условот во задачата имаме $\overline{OS} = 2r$. Бидејќи хипотенузата на триаголникот *OCS* е два пати поголема од катетата *SC* ($\overline{OS} = 2r$, $\overline{SC} = r$), следува дека аголот *COS* е агол од 30°. Тогаш $\angle AOB = 60^\circ$ и затоа плоштината на кружниот исечок *AOB* е $P_1 = \frac{60^\circ}{360^\circ}(3r)^2\pi = \frac{3}{2}r^2\pi$. Плоштината на кругот *k*(*S*, *r*) е $P_2 = r^2\pi$, па тогаш $\frac{P_1}{P_2} = \frac{3}{2}$.

Пример 135: Даден е квадрат $ABCD$ со страна $3cm$. Точката E е средишна точка на страната AB и $AC \cap DE = \{F\}$. Одреди ги плоштината и периметарот на ΔAEF.

Решение. Од сличноста на ΔAEF и ΔCDF следува $h_1 : h_2 = \frac{3}{2} : 3$ и $h_1 + h_2 = 3$, па се добива $h_1 = 1cm$ и $h_2 = 2cm$.



Плоштината на ΔAEF е $P_1 = \frac{\frac{3}{2} \cdot 1}{2} = \frac{3}{4} cm^2$. Останува да ги одредиме должините на страните AF и EF на ΔAEF. Бидејќи $\sin 45^0 = \frac{h_1}{\overline{AF}}$ имаме дека $\overline{AF} = \sqrt{2}cm$. Од Питагоровата теорема за ΔAED имаме дека $\overline{DE} = \frac{3\sqrt{5}}{2}cm$. Од сличноста на ΔAEF и ΔCDF следува дека $\overline{EF} : \overline{FD} = 1:2$, од каде со користење на $\overline{DE} = \frac{3\sqrt{5}}{2}cm = \overline{EF} + \overline{FD}$ се добива дека $\overline{EF} = \frac{\sqrt{5}}{2}cm$. Конечно бараниот периметар е $L = \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{2} \right) cm$.

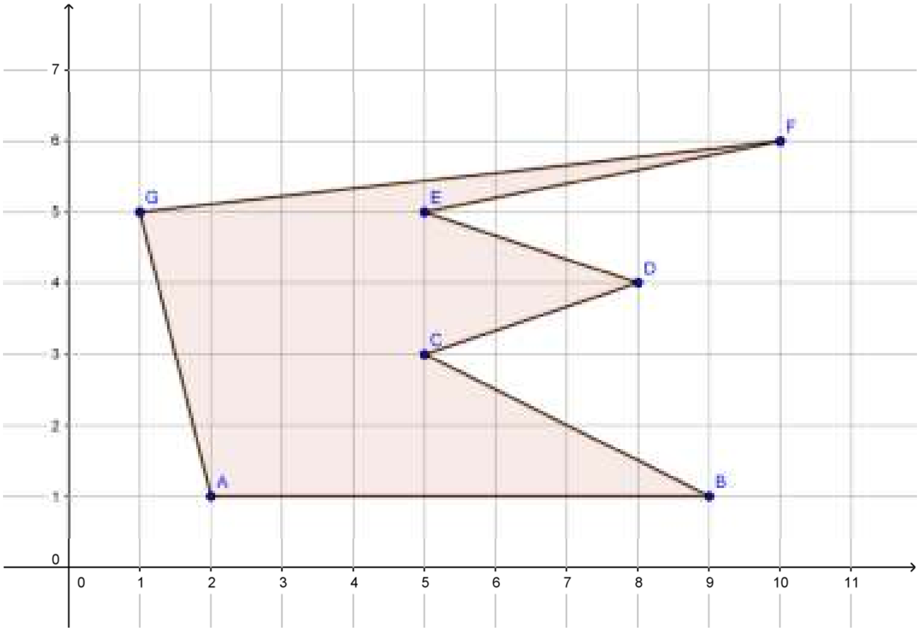
Пример 136: Дали постои триаголник кај кој сите висини се помали од $1cm$, а неговата плоштина е поголема од $1m^2$? Образложи го одговорот.

Решение. Да го разгледаме правоаголникот $ABCD$ со страни $\overline{AB} = 1cm$ и $\overline{BC} = 500m$. Пресечната точка на дијагоналите да ја означиме со O. Тогаш триаголникот AOD ги исполнува условите на задачата.

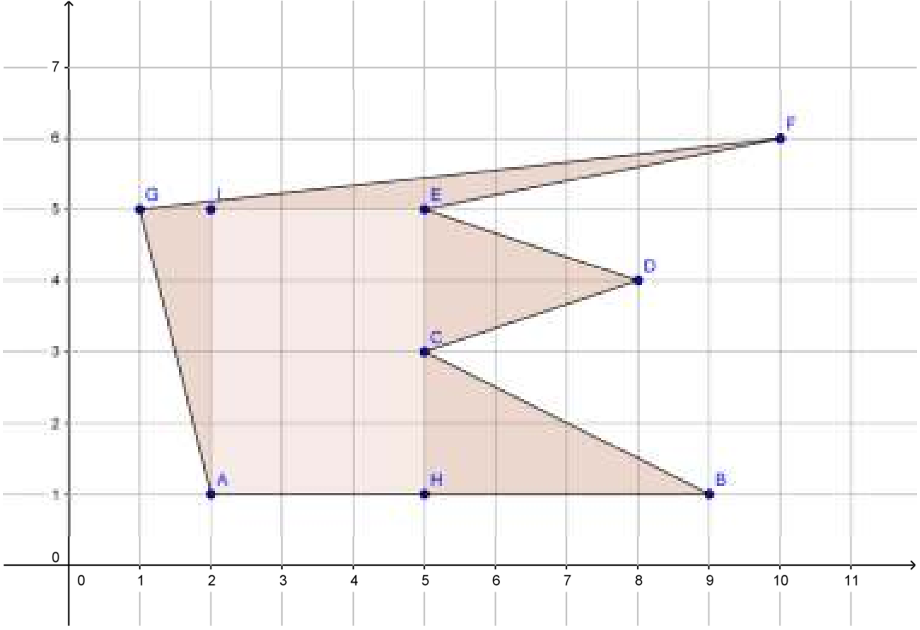
Пример 137: За два конвексни четириаголници запишани се должините на нивните страни и дијагонали во неопаѓачки редослед. Ако двата записи се еднакви, дали мора четириаголниците да бидат складни? Образложи.

Решение. Не мора! Разгледај ги четириаголниците: рамнокрак трапез со основи $4cm$ и $2cm$ и висина $1cm$ и делтоид со дијагонали $d_1 = 4cm$ и $d_2 = 2cm$, така што d_1 е оска на симетрија, а со пресекот на дијагоналите е поделена во однос $1:3$.

Пример 138: Пресметај ја плоштината на фигурата на цртежот.



Решение. 1 начин)

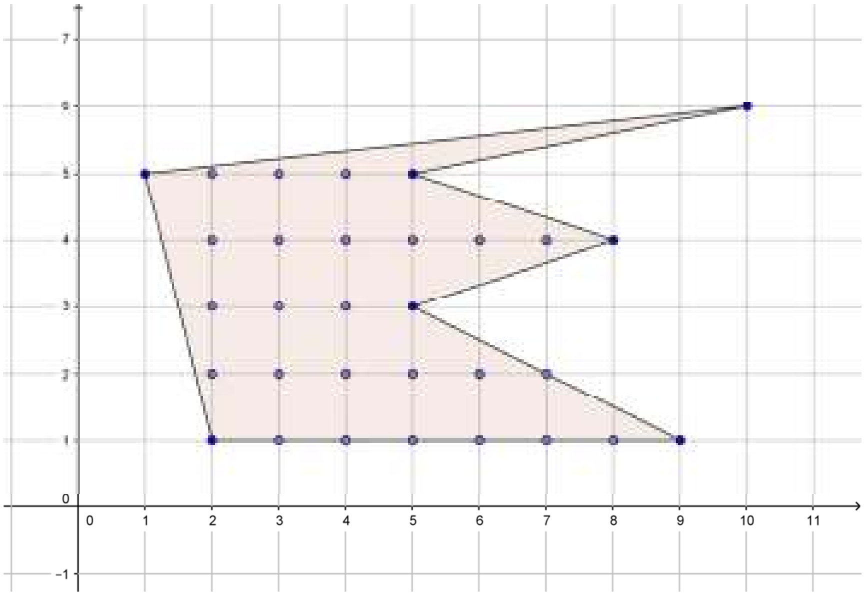


$$P_{ABCDEFG} = P_{HBC} + P_{CDE} + P_{GEF} + P_{AIG} + P_{AHEI} = \frac{4\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 3}{2} + \frac{4\cdot 1}{2} + \frac{1\cdot 4}{2} + 3\cdot 4 = 23$$

2 начин) Со помош на Пиковата теорема.

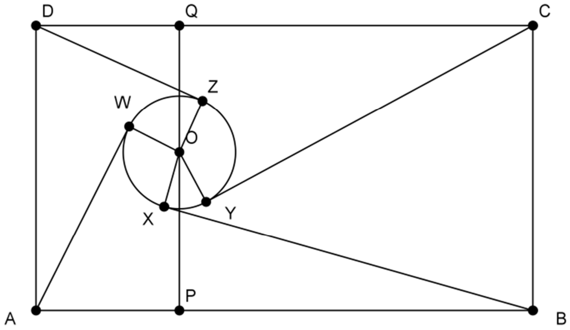
Нека е даден многуаголник чии темиња се точки во рамнината со целобројни координати. Ако v е бројот на внатрешни точки со целобројни координати, а g е бројот на точки со целобројни координати кои лежат на страните на многуаголникот, тогаш $P = v + \frac{g}{2} - 1$.

На цртежот се означени само точките со целобројни координати, па според тоа $v=17$, $g=14$, па $P=17+\frac{14}{2}-1=23$



Пример 139: Во правоаголникот $ABCD$ нацртана е кружница. Точките W, X, Y и Z лежат на кружницата така што правите AW, BX, CY и DZ се тангенти на кружницата. Одреди ја должината на DZ, ако $\overline{AW}=3, \overline{BX}=4$ и $\overline{CY}=5$.

Решение. Од Питагоровата теорема имаме:



$r^2=\overline{AO}^2-\overline{AW}^2=\overline{BO}^2-\overline{BX}^2=\overline{CO}^2-\overline{CY}^2=\overline{DO}^2-\overline{DZ}^2$ од каде се добива:

$\overline{AO}^2-\overline{BO}^2=\overline{AW}^2-\overline{BX}^2$ и

$\overline{DZ}^2-\overline{CY}^2=\overline{DO}^2-\overline{CO}^2$ (1)

Нека PQ минува низ центарот на кружницата и е нормална на AB и CD. Повторно, од Питагоровата теорема имаме:

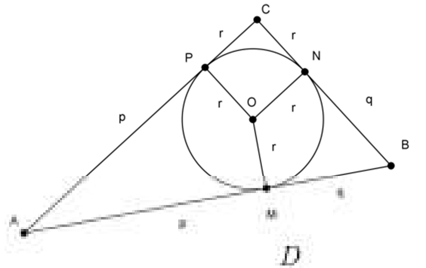
$$\begin{aligned}\overline{AO}^2-\overline{BO}^2&=\left(\overline{AP}^2+\overline{PO}^2\right)-\left(\overline{BP}^2+\overline{PO}^2\right)=\\&=\left(\overline{DQ}^2+\overline{QO}^2\right)-\left(\overline{CQ}^2+\overline{QO}^2\right)=\\&=\overline{DO}^2-\overline{CO}^2\end{aligned}$$

Со замена во (1) се добива дека $\overline{DZ}^2-\overline{CY}^2=\overline{AW}^2-\overline{BX}^2$, т.е. $\overline{DZ}=\sqrt{3^2-4^2+5^2}=3\sqrt{2}$.

Пример 140: Докажи дека плоштината на правоаголен триаголник е еднаква на производот на отсечоците p и q на кои вписаната кружница ја дели хипотенузата.

Решение. За плоштината на ΔABC важи:

$$P=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{2}=\frac{(p+r)(q+r)}{2}=\frac{pq+pr+qr+r^2}{2} \qquad (1)$$



Од Питагоровата теорема имаме:

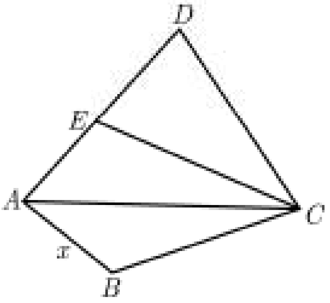
$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$ т.е.

$(p+r)^2+(q+r)^2=(p+q)^2$, односно

$pr+qr+r^2=pq$.

Со замена во (1) се добива $P=\dfrac{2pq}{2}=pq$.

Пример 141: Во четириаголникот $ABCD$, почнувајќи од страната AB, секоја соседна страна е поголема од претходната за $2cm$. Пресметај ја плоштината на четириаголникот ако неговиот периметар е $L=36cm$ и AC е симетрала на аголот во темето A.



Решение. Ако означиме $\overline{AB}=x,\overline{BC}=x+2,\overline{CD}=x+4,\overline{DA}=x+6$, тогаш $4x+12=36$ т.е. $x=6cm$, па страните на четириаголникот се $\overline{AB}=6cm,\overline{BC}=8cm,\overline{CD}=10cm,\overline{DA}=12cm$.

Избираме точка E која лежи на AD и $\overline{AE}=6cm$. Тогаш $\Delta ABC\cong\Delta AEC$ (признак САС), па $\overline{EC}=\overline{BC}=8cm$. Според тоа ΔECD е правоаголен со прав агол во темето E , а од $\overline{AE}=\overline{ED}=6cm$ следува дека ΔACD е рамнокрак, па $\overline{AC}=10cm$. Конечно плоштината на четириаголникот се добива како збир од плоштините на 3 складни правоаголни триаголници со катети $6cm$ и $8cm$, т.е.

$$P_{ABCD}=3\cdot\frac{6\cdot 8}{2}=72cm^2$$

ЗАДАЧИ ОД НИВО **В** И НИВО **Г**

1. Во ромб е впишана кружница со радиус r. Изрази ја должината на страната на ромбот преку радиусот, ако е познато дека таа е четири пати помала од збирот на дијагоналите.

2. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи $40cm$ и $24cm$ чии дијагонали се заемно нормални.

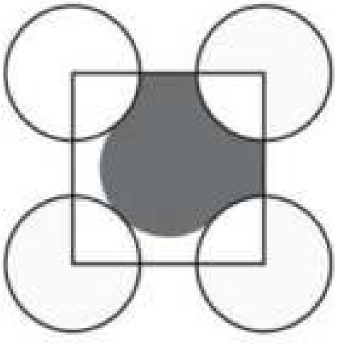
3. Докажи дека плоштината на рамнокрак трапез со основи a и b и заемно нормални дијагонали е $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

4. Во квадрат со страна a вписан е друг квадрат чии темиња ја делат страната на првиот квадрат во однос $1:4$. Одреди го односот на плоштините на квадратите.

5. Пресметај ја плоштината на трапезот со основи $a=9cm$, $b=3cm$ и краци $c=8cm$ и $d=10cm$.

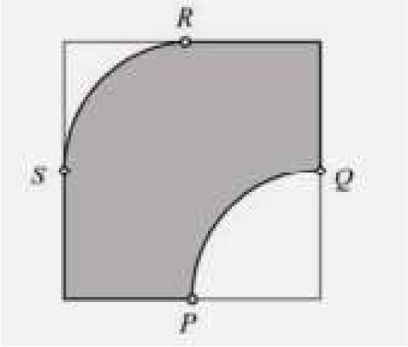
6. Даден е правоаголник $ABCD$ со страни $8cm$ и $6cm$. Со дијагоналата AC поделен е на два триаголници во кои се впишани кружници. Одреди го збирот од плоштините на кружниците.

7. Кружницата k е опишана околу правилниот шестаголник $ABCDEF$ со страна $a=6cm$, а k_1 е кружницата впишана во триаголникот ACE. Пресметај ја плоштината на кружниот прстен образуван од кружниците k и k_1.

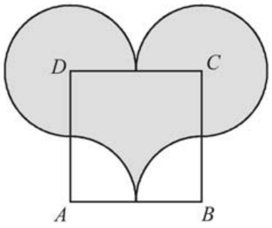


8. Пресметај ја плоштината на осенчениот дел ако сите кружници имаат радиус $1cm$. Притоа четирите кружници имаат центри во темињата на квадратот и ја допираат петтата кружница однадвор.

9. На цртежот точките P,Q,R и S се средини на квадрат со страна $a=6cm$. Одреди ја плоштината на исенчената фигура, ако должините на лаците PQ и RS се една четвртина од должината на две кружници.



10. Квадратот $ABCD$ има страна $12cm$ и околу секое негово теме се опишани кружници со радиус $r=6cm$. Одреди ја плоштината на исенчената фигура.



11. Докажи дека плоштината на ARBELOS е еднаква на плоштината на кругот чиј дијаметар е отсечката која е нормална на најголемиот дијаметар, минува низ допирната точка на помалите полукругови, а завршува на најголемата полукружница.

12. Во круг со радиус r од иста страна на центарот повлечени се две паралелни тетиви така што едната гради централен агол од 60^0, а другата од 45^0. Пресметај ја плоштината на делот од кругот зафатен межу тетивите.

13. Плоштината на кружен прстен е еднаква на k. Радиусот на поголемата кружница е еднаков на должината на помалата. Најди го радиусот на помалата кружница.

14. Најди ја плоштината на кругот впишан во правоаголен триаголник, ако висината спуштена кон хипотенузата ја дели хипотенузата на отсечки со должина $25,6m$ и $14,4m$.

15. Во рамнокрак трапез, опишан околу круг, остриот агол е еднаков на α. Најди го односот на плоштината на кругот и плоштината на трапезот.

16. Основите на трапез се 4 и 16 и околу него може да се опише кружница и во него може да се впише кружница. Најди ги радиусите на тие кружници.

17. Кај правоаголен триаголник со дијаметри неговите страни констуирани се кругови. Тогаш збирот од плоштините на круговите со дијаметри катетите е еднаков на плоштината на кругот со дијаметар хипотенузата. Докажи!

18. На кружница со радиус r повлечени се четири тетиви кои формираат ромб со поголема дијагонала $4r$. Најди ја плоштината на фигурите ограничени со две тангенти и соодветниот лак од кружницата.

19. Најди ја плоштината на правоаголен трапез со остар агол α ако во него е впишан круг со радиус r.

20. Од темето на тапиот агол на ромбот спуштени се нормали на неговите страни. Секоја од нормалите има должина a, а растојанието меѓу нивните подножја е k. Најди ја плоштината на ромбот.

21. Периметарот на ромбот е $2p$, збирот на неговите дијагонали е c. Најди ја плоштината на ромбот.

22. Во правоаголник со страни 3 и 4 впишан е друг правоаголник чии страни се однесуваат како $1:3$. Најди ја плоштината на тој правоаголник.

23. Во кружница е впишан рамнокрак триаголник со основа со должина k и агол при основата α. Надвор од триаголникот е конструирана кружница која ја допира првата кружница и ја допира основата на триаголникот во нејзината средина. Најди ја плоштината на вториот круг.

ПИСМЕНА РАБОТА 7

Задачи со заокружување:

1. А **(5)( )** Плоштината P на ромб со страна a и дијагонали d_1 и d_2 се пресметува со формулата:

А) $P=\frac{(d_1+d_2)\cdot a}{2}$ Б) $P=\frac{d_1+d_2}{2}$ В) $P=a\cdot d_1$ Г) $P=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$ Д) друг одговор

2. Б **(5)( )** Плоштината P на рамнокрак трапез со основи $a=12\text{cm}$, $b=6\text{cm}$ и остар агол $\alpha=45^0$ изнесува:

А) 108cm^2 Б) 54cm^2 В) $36\sqrt{2}\text{cm}^2$ Г) 27cm^2 Д) друг одговор

3. В **(5)( )** Радиусот r на кружницата впишана во рамностран триаголник со страна $a=\sqrt{3}cm$ изнесува:

А) 3cm^2 Б) $\frac{1}{2}\text{cm}^2$ В) 6cm^2 Г) $\frac{1}{4}\text{cm}^2$ Д) друг одговор

4. Г**(5)( )** Ако дијагоналите на ромбот се a и $a\sqrt{3}$, тогаш висината на ромбот е

А) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ Б) a В) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ Г) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ Д) друг одговор

Задачи со дополнување:

5. А **(5)( )** Рамностран триаголник со плоштина $P=24\sqrt{3}dm^2$ има висина $h=$ ________________________ dm

6. Б **(5)( )** Кружен исечок со плоштина $P=42\pi\text{cm}^2$ и централен агол 60^0 е дел од кружница со периметар $L=$ ____________ cm

7. В **(5)( )** Рамнокрак трапез со основи $a=32\text{cm}$, $b=12\text{cm}$ и крак $c=26\text{cm}$ има висина $h=$ ____________________ cm

8. Г **(5)( )** 8. Ромб со плоштина $P=24dm^2$ кај кој дијагоналите се однесуваат како $3:4$ има периметар $L=$ ____________ dm

---

Задачи со целосна постапка:

9. А **(15)( )** Даден е триаголник со страни 25cm, 24cm и 7cm. Пресметај го радиусот на опишаната кружница околу триаголникот

10. Б **(15)( )** Во рамнокрак трапез со основи 18cm и 8cm е впишан круг. Пресметај ја плоштината на кругот.

11. В **(15)( )** Пресметај ја плоштината на кружниот прстен образуван од опишаната и впишаната кружница на рамностран триаголник со страна a.

12. Г **(15)( )** Триаголникот има една страна 1 и внатрешните агли на таа страна се 30^0 и 45^0. Најди ги периметарот и плоштината на триаголникот.

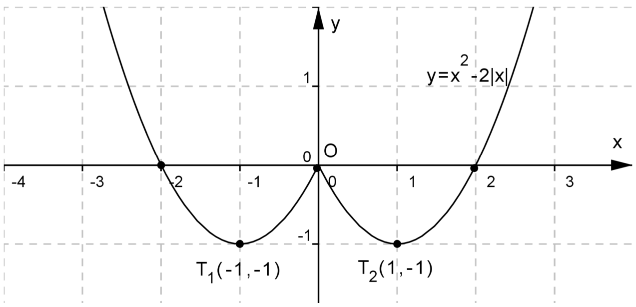
Бодови (Оценка)	0-26 (1)	27-42 (2)	43-60 (3)	61-76 (4)	77-100 (5)

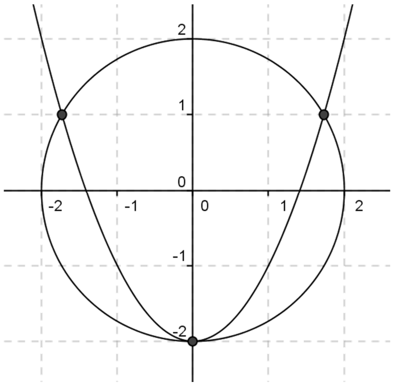
Решенија, одговори и упатства

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	F_1
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤

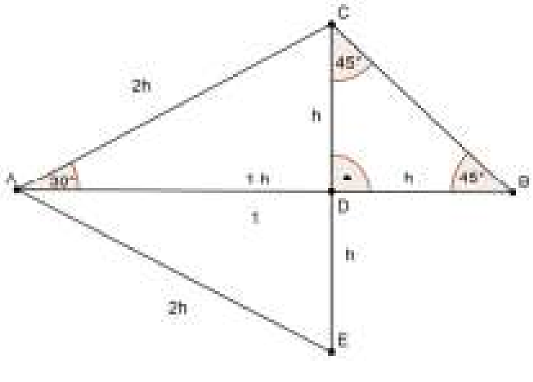
$$\left|z_1+z_2\right|^2=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$$

$$\left|z_1-z_2\right|^2=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$$





$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{b}{c}\\[2mm] \cos\alpha=\dfrac{q}{b}\end{cases}\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{q}{b}\Rightarrow b^2=qc \qquad \begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{a}{c}\\[2mm] \sin\alpha=\dfrac{p}{a}\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{p}{a}\Rightarrow a^2=pc$$



$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-42)}}{2\cdot1}$$

Решенија на задачите од ниво А и ниво Б од тема 1: Математичка логика

1. а) ⊥ б) ⊤ в) ⊥ г) ⊥ 2. Б 3. Б и В

4. а) $3>5$ б) $7\le 3$ в) $(\forall x\in\mathbb{N})(5\nmid x)$ г) $(\exists x\in\mathbb{N})(x+2=3)$

5. а) ⊤ б) ⊤ в) ⊥ г) ⊤

6. а), в), г) се тавтологии б) неутрална

7. а) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A\cap B=\{3,4\}$, $A\setminus B=\{1,2\}$, $B\setminus A=\{5,6\}$, $A\triangle B=\{1,2,5,6\}$, $(A\setminus B)\times(B\setminus A)=\{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)\}$.

8. $M_{P(x)}=\{0,4,8,12,16,20\}$, $M'_{P(x)}=D\setminus M_{P(x)}\{1,2,3,5,6,7,9,10,11,13,14,15,17,18,19\}$

9. $M_{P(x,y,z)}=\{(3,4,5)\}$

10. Равенството важи

11. а) $x=0\wedge y=0\Rightarrow x+y=0$ б) $x=0\vee y=0\Rightarrow x\cdot y=0$

12. F (⊤)= ⊤ , F (⊥)=⊥ F (F (⊤))= ⊤

13. Во третата е црното , во првата е зеленото, во втората кутија е белото топче.

14. а) $x=2$ б) $x=5$ в) $x=\{1,5\}$

15. Само кафе пијат 39-16=23 наставници, само чај 28-16=12, ниту кафе, ниту чај 60-(23+13-16)=9.

16. а) $\tau(p)=\top$ б) $\tau(p)=\top$ в) $\tau(p)=\top$, $\tau(p)=\bot$

17. а) $\tau(p)=\bot$ б) $\tau(q)=\top$

18. $F(1):1|4\Rightarrow 1|2$, $\tau(F(1))=\top$; $F(2):2|4\Rightarrow 2|2$, $\tau(F(2))=\top$; $F(3):3|4\Rightarrow 3|2$, $\tau(F(3))=\top$

19. а , в

20. Тврдењето е изведено, користено е основното тврдење $c+(-c)=0$

21.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\vee q$	$\neg q\vee p$	F_1
⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤

p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	F_1
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤

Решенија на задачите од ниво В и ниво Г од тема 1: Математичка логика

1.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$	F
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$	F
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤

2. Слично како задача 1

3. а)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	F
⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤

б) Од табелата за еквиваленција:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$ 1.
$\bot$	$\top$	$\bot$ 2.
$\bot$	$\bot$	$\top$

Добиваме дека треба да покажеме два случаи дека се контрадикторни.

1. $\tau(p \Rightarrow q) = \top$	$\tau(\neg q \Rightarrow \neg p) = \bot$
$\tau(p) = \top \quad \tau(q) = \top$	$\tau(q) = \bot \quad \tau(p) = \top$
$\tau(p) = \bot \quad \tau(q) = \top$	конртадикција
$\tau(p) = \bot \quad \tau(q) = \bot$	

2. $\tau(\neg q \Rightarrow \neg p) = \top$	$\tau(p \Rightarrow q) = \bot$
$\tau(q) = \bot \quad \tau(p) = \bot$	$\tau(p) = \top \quad \tau(q) = \bot$
$\tau(q) = \top \quad \tau(p) = \bot$	контрадикција
$\tau(q) = \top \quad \tau(p) = \top$	

в) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$

$\Leftrightarrow \quad \neg p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg q \vee \neg p$

$\Leftrightarrow \quad \neg p \vee q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

$\Leftrightarrow \quad \top$

4. $p \Rightarrow q \Rightarrow \neg p \Rightarrow \neg q$

$\Leftrightarrow \quad \neg p \vee q \Rightarrow \neg p \Rightarrow \neg q$

$\Leftrightarrow \quad \neg(\neg p \vee q) \vee \neg p \Rightarrow \neg q$

$\Leftrightarrow \quad (p \wedge \neg q) \vee \neg p \Rightarrow \neg q$

$\Leftrightarrow \quad \neg((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \vee \neg q$

$\Leftrightarrow \quad (\neg(p \wedge \neg q) \wedge p) \vee \neg q$

$\Leftrightarrow \quad ((\neg p \vee q) \wedge p) \vee \neg q$

$\Leftrightarrow \quad (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p) \vee \neg q$

$\Leftrightarrow \quad \bot \vee (q \wedge p) \vee \neg q$

$\Leftrightarrow \quad (q \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg q)$

$\Leftrightarrow \top \wedge (p \vee \neg q)$

$\Leftrightarrow p \vee \neg q$.

5. $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$

$\Leftrightarrow \quad (\neg p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$ - замена за импликација

$\Leftrightarrow \quad (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$ - дистрибутивен закон

$\Leftrightarrow \quad (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$ - противречност и $A \vee \top \Leftrightarrow A$

$\Leftrightarrow \quad \neg(\neg p \wedge \neg q) \vee ((\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p))$- замена за импликација и еквиваленција

$\Leftrightarrow \quad (\neg(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (q \wedge p)$- асоцијативен закон

$\Leftrightarrow \quad \top \vee (q \vee p)$ - ($\neg A \vee A \Leftrightarrow \top$)

$\Leftrightarrow \quad \top$ - ($\top \vee A \Leftrightarrow \top$)

6. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$

$\Leftrightarrow \quad (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge r)$ - замена за импликација

$\Leftrightarrow \quad \neg p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge r)$- дистрибутивен закон

$\Leftrightarrow \quad \top$ - ($A \Leftrightarrow A \Leftrightarrow \top$)

7. $(\neg p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow p$

$\Leftrightarrow \quad (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \Leftrightarrow p$- замена за импликација

$\Leftrightarrow \quad p \vee (q \wedge \neg q) \Leftrightarrow p$- дистрибутивен закон

$\Leftrightarrow \quad p \vee \bot \Leftrightarrow p$ - ($q \wedge \neg q \Leftrightarrow \bot$)

$\Leftrightarrow \quad (p \Leftrightarrow p)$ - ($p \vee \bot \Leftrightarrow p$)

$\Leftrightarrow \quad \top$ - ($A \Leftrightarrow A \Leftrightarrow \top$)

8. Бидејќи $p \wedge (p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge p) \vee (p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad p \vee (p \wedge q)$
доволно е да покажеме: $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

$\Leftrightarrow \quad (p \vee (p \wedge q) \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow p \vee (p \wedge q))$- замена за еквиваленција

$\Leftrightarrow \quad (\neg(p \vee (p \wedge q)) \vee p) \wedge (\neg p \vee (p \vee (p \wedge q)))$ - замена за импликација

$\Leftrightarrow \quad (\neg p \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee p \wedge ((\neg p \vee p) \vee (p \wedge q))$ - Де Морганови закони

$\Leftrightarrow \quad ((\neg p \wedge \neg p) \vee (\neg p \vee \neg q)) \wedge (\top \vee (p \wedge q))$ - дистрибутивен закон и - ($\top \vee A \Leftrightarrow \top$)

$\Leftrightarrow \quad (\neg p \vee (\neg p \wedge \neg p) \vee p) \wedge \top$ - ($\top \vee A \Leftrightarrow \top$)

$\Leftrightarrow \quad \top \wedge \top$

$\Leftrightarrow \quad \top$

9. Јанко –оцена 2 ; Љупчо–оцена 3 ; Горан –оцена 5 ; Валентин –оцена 4

10. А-син ; В-црвен ; С- бел

11. $p: x \in A \quad q: x \in B \quad r: x \in C$

$(\forall x)$ ($(p \veebar q) \wedge \neg r \Leftrightarrow (p \veebar r) \wedge \neg (q \wedge \neg r)$ е тавтологија

12. Ставајќи $p: x \in A \quad q: x \in B \quad r: x \in C$ се добива Дедекиндовата тавтологија

$$(\forall x)\big((p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)\big)$$

13. $p: a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$

$$\Downarrow$$

$$r_1: 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0$$

$$\Downarrow$$

$$r_2: (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$r_3: \begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \\ (a-c)^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$q: a = b = c$, т.е. триаголникот е рамностран

14. $p: x, y \in \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

$$r_1: \begin{cases} |-x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{cases}$$

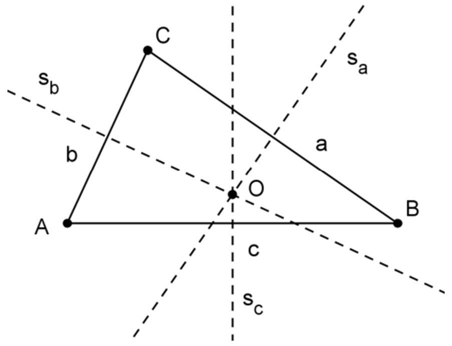
$$\Downarrow$$

$$r_2: -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

$$\Downarrow$$

$$q: |x + y| \leq |x| + |y|$$

15.



$p: s_a, s_b, s_c$ се симетрали на страните на $\triangle ABC$.

$$\Downarrow$$

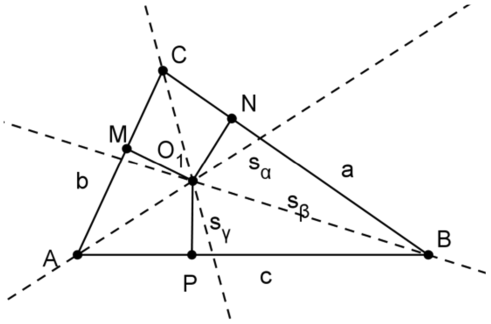
$$r_1: \begin{cases} \overline{OA} = \overline{OB} \\ \overline{OA} = \overline{OC} \\ \overline{OB} = \overline{OC} \end{cases} \Rightarrow r_2: \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$$

$$\Downarrow$$

q: O е центар на опишана кружница.

Забелешка: Ако земеме дека M е друга точка во која се сечат симетралите на страните, добиваме $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}$, што значи дека $O\equiv M$.

16.



$p: s_a, s_b, s_c$ се симетрали на аглите на $\triangle ABC$.

$$\Downarrow$$

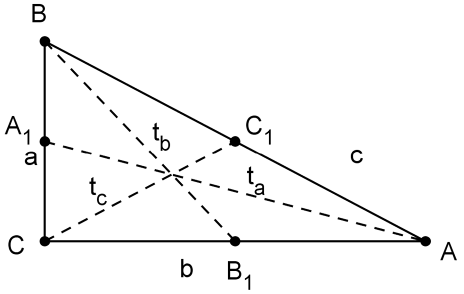
$$r_1: \begin{cases} \overline{O_1M}=\overline{O_1P} \\ \overline{O_1P}=\overline{O_1N} \\ \overline{O_1N}=\overline{O_1M} \end{cases} \Rightarrow r_2: \overline{O_1P}=\overline{O_1N}=\overline{O_1M}$$

$$\Downarrow$$

q: O_1 е центар на впишана кружница.

Забелешка: Ако земеме дека O_2 е друга точка во која се сечат симетралите на аглите, добиваме $\overline{O_2P}=\overline{O_2N}=\overline{O_2M}$, што значи дека $O_1\equiv O_2$.

17. p: $\triangle ABC$ е правоаголен и t_a, t_b, t_c се тежишни линии



$$\Downarrow$$

$$r_1: \begin{cases} {t_a}^2=\frac{a^2}{4}+b^2 \\ {t_b}^2=a^2+\frac{b^2}{4} \end{cases} \Rightarrow r_2: {t_a}^2+{t_b}^2=\frac{5}{4}\left(a^2+b^2\right)$$

$$\Downarrow$$

$$r_3: {t_a}^2+{t_b}^2=\frac{5}{4}c^2 \wedge c=2t_c \Rightarrow q: {t_a}^2+{t_b}^2=5{t_c}^2$$

18. $p: h_1, h_2, h_3$ се висини и $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2+\left(\frac{h_1}{h_3}\right)^2=1$ и a_1, a_2, a_3 се соодветни страни во $\triangle ABC$.

$$\Downarrow$$

$$r_1: \frac{a_1h_1}{2}=\frac{a_2h_2}{2}=\frac{a_3h_3}{2}=P$$

$$\Downarrow$$

$$r_2: \begin{cases} \frac{h_1}{h_2}=\frac{a_2}{a_1} \\ \frac{h_1}{h_3}=\frac{a_3}{a_1} \end{cases} \wedge \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2+\left(\frac{h_1}{h_3}\right)^2=1$$

$$\Downarrow$$

$$r_3: \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2+\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2=1$$

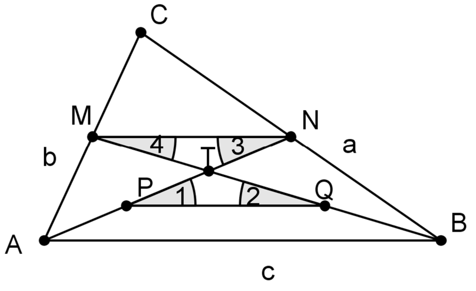
$$\Downarrow$$

$$r_4 : a_2^{\,2} + a_3^{\,2} = a_1^{\,2}$$

$$\Downarrow$$

$q : \triangle ABC$ е правоаголен

19.

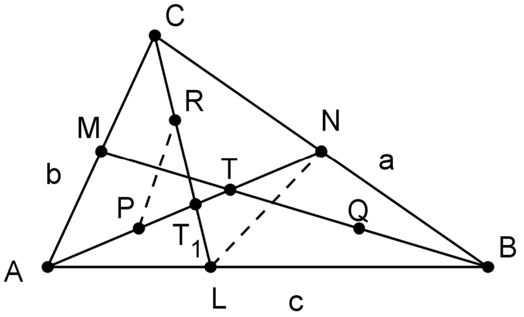


Да ја означиме со P средината на отсечката AT, а со Q средината на отсечката BT и да ги воочиме $\triangle MNT$ и $\triangle QPT$. Отсечката MN е средна линија на $\triangle ABC$, а PQ е средна линија на $\triangle ABT$, па $MN \parallel AB$ и $\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$, а $PQ \parallel AB$ и $\overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$. Значи, $MN \parallel PQ$ и $\overline{MN} = \overline{PQ}$.

Потоа, $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ односно $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$ како наизменични агли на трансверзалата AN, односно BM од паралелните прави MN и PQ. Од тоа следува дека $\triangle MNT \cong \triangle QPT$ (според признакот АСА).

Од складноста на $\triangle MNT$ и $\triangle QPT$ следува дека $\overline{PT} = \overline{TN}$, а бидејќи $\overline{AP} = \overline{PT} = \overline{TN}$, односно $\overline{AT} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AN}$.

20.

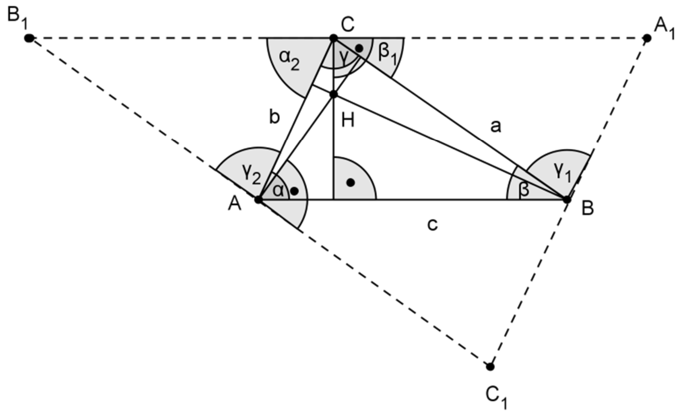


Нека тежишните линии AN и BM од $\triangle ABC$ се сечат во точката T, а да претпоставиме дека тежишните линии AN и CL се сечат во точката T_1. Да ги воочиме сега $\triangle PRT_1$ и $\triangle LNT_1$ каде што P е средина на отсечката и AT_1, а R е средина на CT_1. Лесно се заклучува дека $\triangle PRT_1 \cong \triangle LNT_1$ од каде што ќе добиеме $\overline{AT_1} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AN}.$

Ако го споредиме овој резултат со резултатот $\overline{AT} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AN}$ ќе добиеме $\overline{AT} = \overline{AT_1}$. Но, бидејќи T и T_1 се точки од тежишната линија AN, следува дека равенството $\overline{AT} = \overline{AT_1}$ е можно само ако $T \equiv T_1$.

Со тоа докажавме дека тежишните линии во било кој триаголник се сечат во една точка, што е оддалечена од секое теме за две третини од должината на соодветната тежишна линија.

21.



Низ темињата A, B и C на $\triangle ABC$ се повлечени прави што се паралелни на спротивните страни. Тие го образуваат помошниот $\triangle A_1B_1C_1$. Да го разгледаме $\triangle A_1BC$ и $\triangle ABC$. Ако правата BC ја земеме за трансверзала на паралелните прави AB и A_1B_1, тогаш $\beta_1 = \beta$ како наизменични агли. Исто така,ако истата права BC ја земеме за трансверзала на паралелните прави AC и A_1C_1, тогаш $\gamma_1 = \gamma$ како наизменични агли. Поради тоа што $\beta_1 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma$ и поради тоа што отсечката BC им е заедничка страна, според признакот АСА, триаголниците ABC и A_1BC се складни, од каде што следува дека $\overline{AB} = \overline{CA_1}$. Аналогно се докажува и складноста на триаголниците ABC и AB_1C, од каде што добиваме дека $\overline{AB} = \overline{CB_1}$. Од $AB \parallel A_1B_1$ и $\overline{AB} = \overline{CA_1}$, $\overline{AB} = \overline{CB_1}$, (т.е. отсечката AB е половина од отсечката A_1B_1), заклучуваме дека AB е средна линија на $\triangle A_1B_1C_1$. Значи, A, B и C се средини на страните B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 на $\triangle A_1B_1C_1$. Сега, лесно се заклучува дека правите што се определени со висините на $\triangle ABC$ во исто време се и симетрали на страните на $\triangle A_1B_1C_1$. Бидејќи, пак, овие последниве се сечат во една иста точка, следува дека и правите определени со висините на триаголникот се сечат во една иста точка.

Решение на писмена работа 1

1. В 2. Д 3. Г 4. Б 5. $\left(A\cup B\right)\setminus\left(A\cap B\right)$ или $A\triangle B$. 6. Логичко следство

7. $\neg\neg p \Leftrightarrow p$; Скопје е главен град на Р. Македонија 8. $M_{P(x)}\cup M_{Q(x)}$.

9. $A\cap B=\{6\}$, $A\cup B=\{2,3,4,6,8,9\}$, $A\setminus B=\{2,4,8\}$, $B\setminus A=\{3,9\}$, $A\triangle B=\{2,3,4,8,9\}$

10. Имаме $\neg\left(p\vee q\right)\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg q$. Значи $2+3\neq 6$ и 3 не е делител на 6.

11. $p:\ 2\,|\,x\wedge 3\,|\,x\wedge 5\,|\,x$

$$\Downarrow$$

$$r_1:\begin{cases}x=2a\\ x=3b\quad a,b,c\in\mathbb{Z}\\ x=5c\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$r_2:\begin{cases}15x=30a\\ 10x=30b\quad a,b,c\in\mathbb{Z}\\ 6x=30c\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$r_3:10x+6x-15x=30\left(b+c-a\right)=30d\ ,\ d\in\mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$q:\ 30\,|\,x$$

$\dfrac{p\Rightarrow r_1\ ,r_1\Rightarrow r_2\ ,r_2\Rightarrow r_3, r_3\Rightarrow q}{p\Rightarrow q}$ - Хипотетичен силогизам; $\dfrac{p\Rightarrow q,\ p}{q}$ - Модус поненс

Значи, $30\,|\,x$ е правилно изведен заклучок.

12. $\left(p\wedge q\right)\vee\left(q\wedge r\right)\vee\left(r\wedge p\right)$

$$\Leftrightarrow\quad\left(p\wedge\left(q\vee r\right)\right)\vee\left(q\wedge r\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad\left(p\wedge A\right)\vee B$$

$$\Leftrightarrow\quad\left(p\vee B\right)\wedge\left(A\vee B\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad\left(p\vee\left(q\wedge r\right)\right)\wedge\left(A\vee\left(q\wedge r\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad\left(\left(p\vee q\right)\wedge\left(p\vee r\right)\right)\wedge\left(\left(A\vee q\right)\wedge\left(A\vee r\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad\left(\left(p\vee q\right)\wedge\left(p\vee r\right)\right)\wedge\left(q\vee r\vee q\right)\wedge\left(q\vee r\vee r\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad\left(p\vee q\right)\wedge\left(q\vee r\right)\wedge\left(r\vee p\right)$$

Решенија на задачите од ниво А и ниво Б од тема 2: Тригонометриски функции од остар агол во правоаголен триаголник

1. В 2. $\frac{12}{13}$ 3. $82{,}117^\circ$ 4. $30^\circ 57' 36''$ 5. $\cos 62^\circ, \sin 36^\circ, ctg 2^\circ, tg 68^\circ$

6. а) $\alpha = 40^\circ$ б) $\alpha = 18^\circ$ 7. $-\frac{3}{10}$ 8. в 9. 1 10. $\sqrt{2}$ 11. 3 12. $\frac{4}{3}$

13. $\frac{12}{13}$ 14. $\sin\alpha = \frac{40}{41}, tg\alpha = \frac{40}{9}, \sin\alpha = \frac{9}{40}$ 15. $\sin\alpha = \frac{7}{25}, \cos\alpha = \frac{24}{25}, ctg\alpha = \frac{24}{7}$

16. а) $\sin\alpha$ б) $\cos\alpha$ 17. а) $\sin\alpha\cos\alpha$ б) $\sin\alpha\cos\alpha$ 21. $x^2 + y^2 = 9$

22. $tg10^\circ < tg50^\circ < ctg10^\circ$ 23. а) негативен б) позитивен 24. $a = 3, b = 4, \beta = 53^\circ 8'$

25. $b = 63, \alpha = 14^\circ 15', \beta = 75^\circ 45'$ 26. $a = 6, c = 10, \alpha = 36^\circ 52', \beta = 53^\circ 8'$

Решенија на задачите од ниво В и ниво Г од тема 2: Тригонометриски функции од остар агол во правоаголен триаголник

1. $\cos\alpha = \frac{4}{5}, \cos\beta = \frac{3}{5}, \sin\beta = \frac{4}{5}$; $\dfrac{\frac{3}{4} - \frac{4}{5}}{\frac{3}{5} - \frac{3}{4}} = \dfrac{\frac{15-16}{20}}{\frac{12-15}{20}} = \frac{1}{3}$

2. 1, бидејќи $\sin 10^\circ = \cos 80^\circ, \sin 30^\circ = \cos 60^\circ, \sin 50^\circ = \cos 40^\circ, \sin 70^\circ = \cos 20^\circ$

3. $ctg\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = ctg\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = tg\frac{\alpha}{2}$. 4. $tg\alpha = \frac{h}{q}$ и $tg\alpha = \frac{p}{h} \Rightarrow tg^2\alpha = \frac{p}{q}$

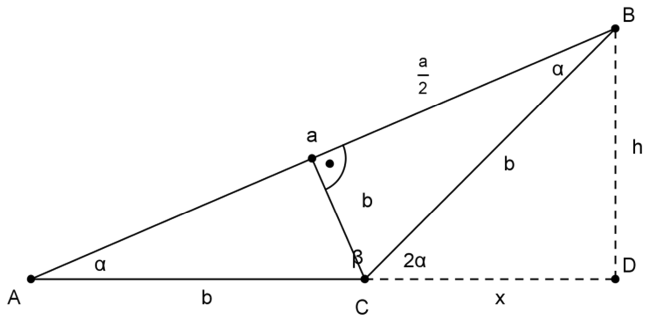
5. $\sin\alpha = \frac{1}{2}, tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, ctg\alpha = \sqrt{3}$ 6. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}, ctg\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

7. $\sin\alpha = \frac{2a^2b^2}{a^4 + b^4}, tg\alpha = \frac{2a^2b^2}{a^4 - b^4}$ 8. 40 9. $ctg\alpha$ 10. $ctg^2\alpha$

11. $-3tg^2\alpha$. Упатство: $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \left(\sin^2\alpha\right)^3 + \left(\cos^2\alpha\right)^3$

17. $\sqrt{3^x} - 2^x = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1 \Rightarrow \left(\sin 60^\circ\right)^x + \left(\cos 60^\circ\right)^x = 1 \Rightarrow x = 2$

18.



$h = a\sin\alpha = b\sin 2\alpha$, т.е. $\sin 2\alpha = \frac{a}{b}\sin\alpha$

$$\frac{\frac{a}{2}}{b} = \sin\frac{\beta}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = 2\sin\left(90^\circ - \alpha\right) = 2\cos\alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - (\sin 2\alpha)^2} = \sqrt{\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \sqrt{\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha} =$$

$$= \left|\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right| = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$tg2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

19. $\alpha = 53^\circ 8', \beta = 28^\circ 7', \gamma = 98^\circ 45'$ 20. $c = 53{,}7; a = 50{,}7; b = 30{,}2$

21. $T = \left\{102, 304, 321, 18^\circ 32', 71^\circ 28', 90^\circ\right\}$

Решение на писмена работа 2

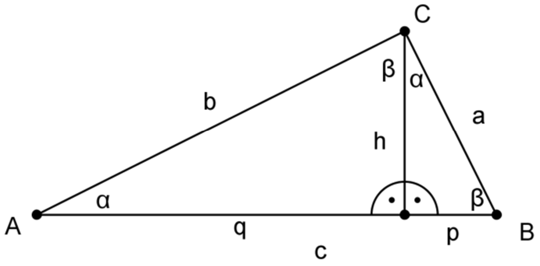
1. Б 2. А 3. В 4. Г 5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{3}$ 6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 7. 45° 8. 194

9. $\cos\alpha = \frac{24}{25}, tg\alpha = \frac{7}{24}, ctg\alpha = \frac{24}{7}$ 10. а) $tg\alpha$ б) 2 в) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$

11. $a = c\sin\alpha, b = c\cos\alpha$. Од $\frac{ab}{2} = p \Rightarrow c^2\sin\alpha\cos\alpha = 2p \Rightarrow c = \sqrt{\frac{2p}{\sin\alpha\cos\alpha}} \Rightarrow c = 6$ cm

$a = 6\sin 15^\circ = 1{,}556$ cm, $b = 6\cos 15^\circ = 5{,}79$ cm.

12.



$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{a}{c} \\ \sin\alpha = \dfrac{p}{a} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{p}{a} \Rightarrow a^2 = pc$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{b}{c} \\ \cos\alpha = \dfrac{q}{b} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{q}{b} \Rightarrow b^2 = qc$$

$$\begin{cases} tg\alpha = \dfrac{h}{q} \\ tg\alpha = \dfrac{p}{h} \end{cases} \Rightarrow \frac{h}{q} = \frac{p}{h} \Rightarrow h^2 = pq.$$

Решенија на задачите од ниво А и ниво Б од тема 3: Комплексни броеви

1. $(0,1)$ 2. $\sqrt{-4}=2i, \sqrt{-9}=3i, \sqrt{-3}=i\sqrt{3}$ 3. Б 4. 0 5. а) i б) -1 в) $-8i$ г) -9 д) $8i$

6. а) $2i, -2i$ б) $14i, -14i$ в) $19i, -19i$ г) $32i, -32i$ 7. а) $x=i$ б) $x=i$ в) $x=3i$ г) $x=-i$

8. а) -28 б) -44 в) $-28i$ г) 90 9. Г 10. $a+c+(b+d)i$ 11. $-3+5i$

12. а) $7+9i$ б) $-7-9i$ в) $0+0i$ г) $3-3i$ 13. а) $-2-8i$ б) $0+10i$ в) $0+0i$ г) $-9-2i$

14. а) $18+13i$ б) $41-9i$ в) $16-8i$ г) $-23-41i$ 15. а) $1+i$ б) $1-i$ в) $-i$ г) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

16. а) $(7,7)$ б) $(1,0)$ в) $(-55,0)$ г) $(-1,0)$ 18. $z_1=2+3i$, $z_2=3-4i$, $z_3=-5+i$, $z_4=-2-5i$

19. $\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=(7,6)$, $z_1+z_2=7+6i=(7,6)$ 20. а) $\overline{z}=3+4i; -z=-3+4i$

б) $\overline{z}=-2-5i; -z=2-5i$ в) $\overline{z}=0-i; -z=0-i$ г) $\overline{z}=0-0i; -z=0-0i$ 21. а) $\overline{z}=2+7i$

б) $\overline{\overline{z}}=2-7i$ в) $\overline{\overline{\overline{z}}}=2+7i$ г) $-\overline{\overline{z}}=2+7i$ 22. а) $5+3i$ б) $2-5i; 3+2i$ в) $5-3i$ г) $5-3i$;

$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ 23. а) 10 б) 5 в) 50 г) 50 д) 50 24. а) 3 б) 3 в) 3 г) 3;

$|z|=|\overline{z}|=|-z|=|-\overline{z}|$ 25. а) $x=2, y=-2$ б) $x=1, y=1$ в) $x=1, y=3$

26. а) $(x+3i)(x-3i)$ б) $(2x+5i)(2x-5i)$

Решенија на задачите од ниво В и ниво Г од тема 3: Комплексни броеви

1. i 2. а) $9+3i$ б) $14-17i$ 3. а) $3+13i$ б) $23+21i$ 4. а) $-\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i$ б) $\frac{7}{2}+\frac{3}{2}i$

5. а) $-\frac{6}{5}-\frac{12}{5}i$ б) $-\frac{3}{5}+\frac{11}{5}i$ 6. $1;0$ 7. $\frac{13}{10}, -\frac{9}{10}$ 8. 0 9. $20+38i$

10. а) $z=2+i$ б) $z=4+6i$ 11. $z=-1-i$ 12. а) $x=2, y=-3$ б) $x=1, y=1$

13. а) $x=-\frac{11}{29}, y=\frac{13}{29}$ б) $x=1, y=1$ 14. а) $(x-7i)(x+7i)$ б) $(\sqrt{a}+i\sqrt{b})(\sqrt{a}-i\sqrt{b})$

в) $(4-3i)(4+3i)$ 15. $|z|=|\overline{z}|=|-z|=|-\overline{z}|=17$ 16. а) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ б) $\frac{\sqrt{130}}{5}$

20. Користиме $2+11i=(2+i)^3$ и $2-11i=(2-i)^3$ (трети корен од комплексен број има три вредности)

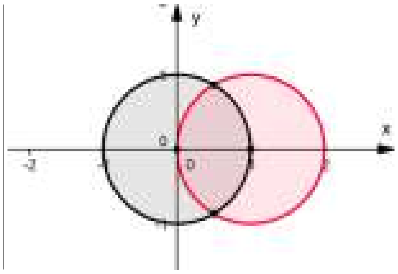
21. Користиме $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$ и $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$

Решение на писмена работа 3

1. В 2. А 3. Б 4. Г 5. -1; -1 6. права; рамнина 7. 10; 10 8. $z=a+bi;\overline{z}=a-bi$

9. а) $-1+i$ б) $5-7i$ в) $6+17i$

10.



11. $\operatorname{Re}=7;\operatorname{Im}=-8$

Решенија на задачите од ниво А и ниво Б од тема 4: Квадратни равенки, дискриминанта и виетови формули

1. $x_1 = 0, x_2 = 0$
2. $x_1 = 0, x_2 = 0$
3. $x_1 = 0, x_2 = 0$
4. $x_1 = 0, x_2 = 2$
5. $x_1 = 3, x_2 = -2$
6. $x_1 = 2, x_2 = -1$
7. $x_1 = 0, x_2 = -1$
8. $x_1 = 0, x_2 = 7$
9. $x_1 = 0, x_2 = \frac{9}{2}$
10. $x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{3}$
11. $x_1 = 3, x_2 = -3$
12. $x_1 = 3i, x_2 = -3i$
13. $x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}, x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}}$
14. $x_1 = \frac{2}{3}i, x_2 = -\frac{2}{3}i$
15. $x_1 = 2, x_2 = 3$
16. $x_1 = 2, x_2 = 5$
17. $x_1 = -3, x_2 = 2$
18. $x_1 = 4, x_2 = 3$
19. $x_1 = -5, x_2 = 4$
20. $x_1 = -6, x_2 = 5$
21. $x_1 = -2, x_2 = -5$
22. $x_1 = 3 + 2i, x_2 = 3 - 2i$
23. $x_1 = 5 + 3i, x_2 = 5 - 3i$
24. $x_1 = 7 + 3i, x_2 = 7 - 3i$
25. $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -\frac{1}{2}$
26. $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -\frac{3}{2}$
27. $x_1 = -\frac{5}{4}, x_2 = -\frac{2}{3}$
28. $x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = -\frac{1}{6}$
29. а) Реални и различни б) Реални и еднакви в) Конјугирано комплексни
30. $m = 1$
31. $m = -2$
32. $m = 2$
33. $m = 3$
34. $m = 0$
35. $m = 3$
36. $p = -2, q = 7$
37. $p = -2, q = 1$
38. $p = -4, q = 3, a = 3$
39. $x^2 + 3x - 10 = 0$
40. $x_1 > 0, x_2 > 0$
41. $(x+5)(x-4)$
42. $(2x-1)(x+2)$
43. $x(3x-2)(2x+1)$

Решенија на задачите од ниво В и ниво Г од тема 4: Квадратни равенки, дискриминанта и виетови формули

1. $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$ 2. $x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}$ 3. $x_1 = 5, x_2 = -\frac{1}{20}$ 4. $m \neq 1$ 5. $m = 1$

6. $m = 4$ 7. $m = -3$ 8. $m_1 = 2, m_2 = -2$ 9. $m_1 = 2, m_2 = -2$ 10. $m_1 = 4, m_2 = -4$

11. $m_1 = 6, m_2 = -6$ 12. $m = 0$ 13. $m_1 = 0, m_2 = 1$ 14. $m \in [0, \infty)$

15. $m \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ 16. $m \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 17. $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{11}{2}$

18. $m \in (-\infty, 2] \cup [6, \infty)$ 19. $x_1 + x_2 = 7$, $x_1 \cdot x_2 = 12$ 20. $x^2 - 4x - 3 = 0$

21. $x^2 - 4x + 13 = 0$ 22. $\frac{3}{4}$ 23. -13

24. Различен знак и негативното решение по апсолутна вредност е поголемо.

25. $p > 0, q > 0$ 26. $p = 0$ 27. $p = 0, q < 0$ 28. $p = 0, q > 0$

29. а) $\frac{x+3}{x+2}, x \neq 1$ б) $\frac{3x+2}{x+1}, x \neq \frac{3}{2}$ 30. $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$. Со замена за $x = 0$ добиваме $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0$ 31. $x \neq \pm 2$. Смена $\frac{x+2}{x-2} = Y$, $x = 10, x = -10.$

32. $x \neq 2, x \neq 1$.Решението е $x = 7$ 33. $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, нема решение 34. $x_1 = \sqrt[3]{2}, x_2 = \sqrt{2}$

35. За $x \neq a, x \neq b$ се добива равенката $2x^2 - 3(a+b)x + (a+b)^2 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}(a+b), x_2 = a + b$, за $a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$ 37. $m = -\frac{16}{33}$ 38. $a \in (-\infty, 4] \cup [12, \infty)$ 43. $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{-a-b}{a}$

44. $a = 0, b = 0$ или $a = \frac{9}{4}, b = \frac{9}{2}$ или $a = -\frac{7}{4}, b = \frac{7}{2}$

45. $m = 4, x_1 = 4, x_2 = 1$; $m = -4, x_1 = 4, x_2 = -1$

Решение на писмена работа 4

1. В 2. А 3. А 4. Д 5. $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ 6. $\mathbb{R} \setminus \{2,1\}$ 7. -1 8. $\frac{x-\sqrt{2}}{x-1}$

9. а) $a=1, b=1, c=-42$ б) $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-42)}}{2\cdot1}$ в) $x_1=-7, x_2=6$

10. а) $m<2$ б) $m=2$ в) $m>2$

11. а) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ б) $4x^2-17x+4=0$ в) $x_1=4, x_2=\frac{1}{4}$

12. а) $p \Rightarrow q:$

$$p: x^2+px+q=0$$
$$\Downarrow$$
$$r_1: x^2-(x_1+x_2)+x_1x_2=0$$
$$\Downarrow$$
$$r_2: x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=0$$
$$\Downarrow$$
$$r_3: x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=0$$
$$\Downarrow$$
$$q: (x-x_1)(x-x_2)=0$$

$q \Rightarrow p:$

$$q: (x-x_1)(x-x_2)=0$$
$$\Downarrow$$
$$s_1: x^2-xx_2-xx_1+x_1x_2=0$$
$$\Downarrow$$
$$s_2: x^2-(x_1+x_2)+x_1x_2=0$$
$$\Downarrow$$
$$p: x^2+px+q=0$$

б) $\neg q \Rightarrow \neg p:$

$$\neg q: (x-x_1)(x-x_2)\neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$t_1: x^2-xx_2-xx_1+x_1x_2\neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$t_2: x^2-(x_1+x_2)+x_1x_2\neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$\neg p: x^2+px+q\neq 0$$

$\neg p \Rightarrow \neg q:$

$$\neg p: x^2+px+q\neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$s_1: x^2-(x_1+x_2)+x_1x_2\neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$s_2: x^2-xx_2-xx_1+x_1x_2\neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$s_3: x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$\neg q: (x-x_1)(x-x_2)\neq 0$$

Решенија на задачите од ниво А и ниво Б од тема 5: Равенки што се сведуваат на решавање квадратни равенки

1. $y = x - 1$ за $x \neq 1$ 2. б 3. а 4. $(x-3)(x=3)(x-5)(x+5)$

5. $y = x^2 + 3x$ 6. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2i, x_4 = 2i$ 7. в 8. б 9. $D = \mathbb{R}$

10. $D = [2, \infty)$ 11. а 12. 2 13. $x = y^2$ 14. Втор степен; две; линеарна; две.

15. Подредени парови; вистинит исказ 16. подредени парови; вистинит исказ.

17. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases}$ 18. $x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm 3$ 19. $x_{1,2} = \pm i, x_{3,4} = \pm 3i$ 20. $D = \mathbb{R}$, $x = 18$

21. $D = \mathbb{R}$, $x = 1$ 22. $\{(2,5),(5,2)\}$ 23. $\{(4,1)\}$ 24. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$, $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

25. $\sqrt{3x+3} - \sqrt{3x} = 1$ 26. $\{(3,2),(2,3)\}$

Решенија на задачите од ниво В и ниво Г од тема 5: Равенки што се сведуваат на решавање квадратни равенки

1. $x_1 = -2 + \sqrt{3}, x_2 = -2 - \sqrt{3}, x_3 = 2, x_4 = \frac{1}{2}$ 2. $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}, x_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

3. $x_1 = 3, x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = 2, x_4 = -\frac{1}{2}$ 4. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$, $x \neq \pm\sqrt{2}$

5. $D = \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$, $x_1 = -1, x_2 = -4$ 6. $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, -2, -1, 1\}$, $x_1 = 0, x_2 = -3, x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{73}}{2}$

7. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$ 8. $m \neq 0, x_{1,2} = \pm m^3, x_{3,4} = \pm \frac{1}{m^3}$

10. $\frac{m^3 - m}{m^2 - 3}$, $m \neq \pm \frac{2}{3}$ 11. а) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ б) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

12. $x_1 = -\frac{3}{2}, x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{10}}{2}$ 13. $x = 4$ 14. $x = 1$ 15. $x = 4$ 16. $\{(3a,2a),(2a,3a)\}$

17. $\left\{\left(\pm\frac{m}{2}, \pm m\right), \left(\pm m, \pm\frac{m}{2}\right)\right\}$ 18. $\{(\pm 1, \pm 1)\}$ 19. 20 дена и 30 дена 20. 24 cm и 32 cm

21. а) $a_1 = -\sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2}$ б) $a \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ в) $a \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 23. $M = \{(3,2),(3,-2)\}$

24. I начин

$\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x-4}=2/(\ )^3$

$x+4-3\sqrt[3]{(x+4)^2(x-4)}+3\sqrt[3]{(x+4)(x-4)^2}-x+4=8$

$-3\sqrt[3]{(x+4)(x-4)}\left(\sqrt[3]{(x+4)}-\sqrt[3]{x-4}\right)=0$

$x=4\vee x=-4$

II начин

$x+4=t^3$

$x-4=t^3-8$

$t-\sqrt[3]{t^3-8}=2$

$t-2=\sqrt[3]{t^3-8}$

$t^3-6t^2+12t-8=t^3-8$

$6t(t-2)=0$, од каде $t=0\vee t=2$

т.е. $x=-4\vee x=4$

25. Упатство: $x-2=t^3$, т.е. $x+1=t^3+3$

26. Упатство: $x+8=t^4$, т.е. $x-8=t^4-16$

27. $x+3=t^3$, т.е. $x-3=t^3-6$

Заменуваме во равенката и добиваме:

$t-\sqrt[3]{t^3-6}=\sqrt[3]{6}$

$t-\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{t^3-6}\,/(\ )^3$

$t^3-3\sqrt[3]{6}t^2+3\sqrt[3]{36}t-6=t^3-6$

$3\sqrt[3]{6}t\left(t-\sqrt[3]{6}\right)=0$, од каде $t=0\vee t=\sqrt[3]{6}$ т.е. $x=-3\vee x=3$

28. $x+1=t^2$, т.е. $x-2=t^2-3$

Заменуваме во равенката и добиваме:

$t-\sqrt{t^2-3}=1$

$\sqrt{t^2-3}=t-1/(\ )^2$

$t^2-3=t^2-2t+1$

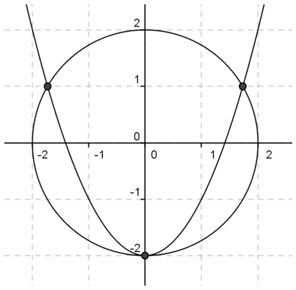
$2t=4$, од каде $t=2$, т.е. $x=3$

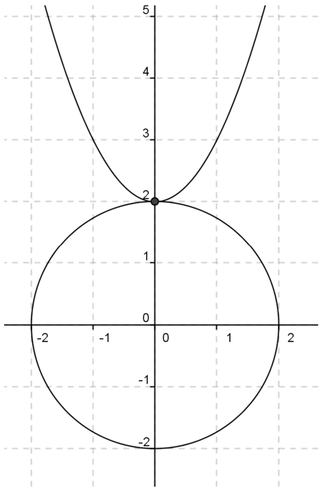
Решение на писмена работа 5

1. Б 2. В 3. А 4. Д 5. $x-5\geq 0; 11-x\geq 0$; $x-5=(11-x)^2$

6. 2 ; 0 7. 15 cm, 8 cm

8.





9. а) $y^2-3y+2=0$ б) $y^2+y-3=0$ в) $\begin{cases} 2y^2-2y-5=0 \\ x=y-1 \end{cases}$

10. а) $x_{1,2}=\pm 1, x_{3,4}=\pm 2$ б) $x=11$ в) $(1,1)$

11. 6,8

12. Упатство: $x^2-\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

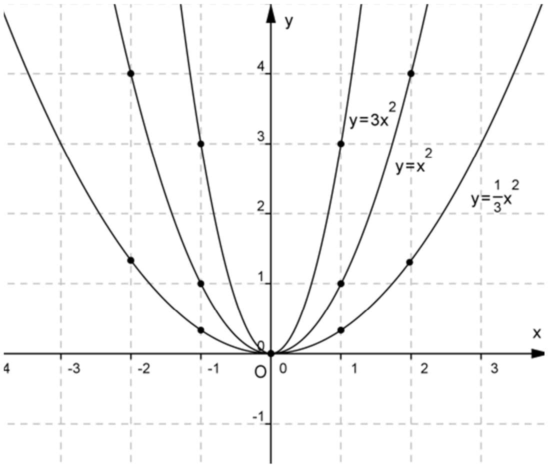
$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=y^2-4$$

Решенија на задачите од ниво А и ниво Б тема 6: Квадратна функција и квадратна неравенка

1. А 2. $\mathbb{R};\mathbb{R};\left[-\frac{b}{2a},\infty\right)a>0$ или $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]a<0$ 3. В 4. $y=(x-2)^2-3$ 5. $19;4$

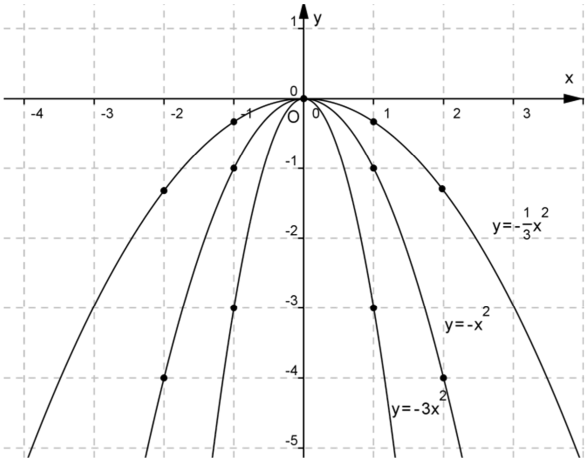
6.

x	0	±1	±2
x^2	0	1	4
$3x^2$	0	3	12
$\frac{1}{3}x^2$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$



7.

x	0	±1	±2
x^2	0	1	-4
$3x^2$	0	-3	-12
$\frac{1}{3}x^2$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$



9. $D_f=\mathbb{R},V_f=[-3,\infty)$ 10. $A\left(\frac{1}{2},0\right);B\left(-\frac{1}{3},0\right);C(0,-1);$ 11. $x=\frac{7}{2}$ 12. $x=1$

13. $x=-14;(-\infty,-2)$ f опаѓа 14. $x\in\left(-2,\frac{1}{3}\right)$ 15. $T(1,4);x=1;V_f=(-\infty,4]$

16. $M(-2,7)$ 17. $x\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ 18. $M=(-2,2)$

19. $M=\varnothing$ 20. $\begin{cases}x^2+2x\geq0\\x^2-2x<0\end{cases}$ или $\begin{cases}x^2+2x\leq0\\x^2-2x>0\end{cases}$

Решенија на задачите од ниво В и ниво Г од тема 6: Квадратна функција и квадратна неравенка

1. 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) а) нема нули б) Пресек со $y-$оската е $(0,4)$ 3) Теме $T(-3,1)$

4) график 5) $V_f = [1,\infty)$ 6) Правата $x=-3$ е оска на симетрија на параболата.

7) Монотоност: за $x \in (-\infty,-3)$ f опаѓа, а за $x \in (-3,\infty)$ f расте.

8) Знак:за $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

2. 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) а) нули: $x_1 = -2, x_2 = 8$ б) Пресек со $y-$оската е $(0,8)$ 3) Теме $T\left(3,\frac{25}{2}\right)$

4) график 5) $V_f = \left(-\infty,\frac{25}{2}\right]$ 6) Правата $x=3$ е оска на симетрија на параболата

7) Монотоност: за $x \in (-\infty,3)$ f расте, а за $x \in (3,\infty)$ f опаѓа

8) Знак: за $x \in (-2,8)$ $f(x) > 0$, а за $x \in (-\infty,-2)\cup(8,\infty)$ $f(x) < 0$.

3. 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) а) нули: $x_1 = -5, x_2 = 3$ б) Пресек со $y-$оската е $\left(0,\frac{15}{8}\right)$ 3) Теме $T(-1,2)$

4) график 5) $V_f = (-\infty,2]$ 6) Правата $x=-1$ е оска на симетрија на параболата

7) Монотоност: за $x \in (-\infty,-1)$ f расте, а за $x \in (-1,\infty)$ f опаѓа

8) Знак:за $x \in (-5,3)$ $f(x) > 0$, а за $x \in (-\infty,-5)\cup(3,\infty)$ $f(x) < 0$.

4. 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) а) нули: $x_1 = -3-\sqrt{3}, x_2 = -3+\sqrt{3}$ б) Пресек со $y-$оската е $(0,2)$
3) Теме $T(-3,-1)$ 4) график 5) $V_f = [-1,\infty)$ 6) Правата $x=-3$ е оска на симетрија на параболата.

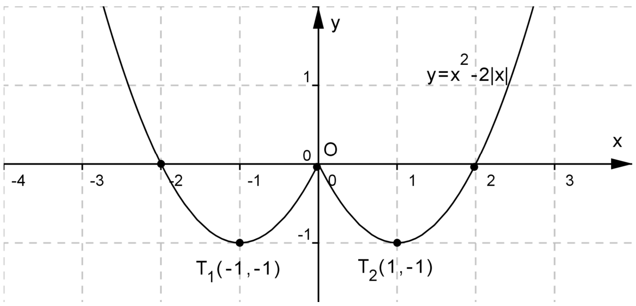
7) Монотоност: за $x \in (-\infty,-3)$ f опаѓа, а за $x \in (-3,\infty)$ f расте.

8) Знак: за $x \in \left(-3-\sqrt{3},-3+\sqrt{3}\right)$ $f(x) < 0$, а за $x \in \left(-\infty,-3-\sqrt{3}\right)\cup\left(-3+\sqrt{3},\infty\right)$ $f(x) > 0$.

7. 1) $D_f = \mathbb{R}$ 2) а) нули: $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$ б) Пресек со $y-$оската е $(0,0)$

3) Теме $T_1(-1,-1)$, $T_2(1,-1)$

4) график:



5) $V_f = [-1,\infty)$ 6) Правата $x=0$ е оска на симетрија

7) Монотоност: за $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$ f опаѓа, а за $x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$ f расте.

8) Знак:за $x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$ $f(x) > 0$, а за $x \in (-2,0) \cup (0,2)$ $f(x) < 0$.

8. Упатство: $y = |x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x \ , \ x \in (-\infty,0] \cup [1,\infty) \\ -x^2 + x \ , \ x \in (0,1) \end{cases}$

9. Упатство: $|x| = \begin{cases} x \ , \ x \geq 0 \\ -x \ , \ x < 0 \end{cases}$, $y = \begin{cases} 2x^2 - 4x + 6 \ , \ x \geq 0 \\ 2x^2 + 4x - 6 \ , \ x < 0 \end{cases}$

10. $a=-1, b=-2, c=8$ 11. $p=-4, q=3$

12. $\Rightarrow$: $ax^2 + bx + c = (mx+n)^2 \Rightarrow a = m^2, b = 2mn, c = n^2 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$.

$\Leftarrow$: $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{ac} \Rightarrow y = ax^2 + bx + c = x^2 \pm 2\sqrt{ac}x + c = \left(x\sqrt{a} \pm \sqrt{c}\right)^2$.

13. Ако $x + a = t, x = t - a$, тогаш $f(t) = (t-a)^2 + (t-a) + 2$.

Значи, $f(x-a) = (x-2a)^2 + (x-2a) + 2.$

14. Нека DM е висина на трапезот $ABCD$ и нека $\overline{AD} = x$ е крак, а $\overline{CD} = y$ е помалата основа, тогаш $\overline{AM} = 5 - \frac{y}{2}$. Од правоаголниот ΔABD имаме $x^2 = \left(5 - \frac{y}{2}\right) \cdot 10$, т.е.

$y = \frac{50 - x^2}{5}$. $L_{ABCD} = 10 + \frac{50 - x^2}{5} + 2x = \frac{1}{5}x^2 + 2x + 20$, $L_{\max} = 25\,cm$, ако $x = 5\,cm, y = 5\,cm.$

15. $S = x_1^3 + x_2^3 = -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a + 1$. За $a = -\frac{1}{2}$, $S_{\max} = \frac{9}{8}$.

16. Упатство: Користи го тврдењето за $a > 0$ дадено во НИВО Г.

17. Упатство: Докажи дека $D < 0$ за секое m .

18. $a < 0 : b = -a, c = -2a.$

19. Упатство: $b^2 > 0, D = -(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b).$

20. $D_f = (-\infty, 1) \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right] \cup (3, \infty)$

21. $M = (-\infty, -3) \cup \left(-2, -\frac{2}{3}\right) \cup (1, \infty)$

22. За $m < -3$ двете решенија се негативни; за $-3 < m < 1$ решенијата се со спротивен знак; за $1 < m < \frac{3}{2}$ двете решенија се позитивни; за $m > \frac{3}{2}$ решенијата се конјугирано комплексни.

Решение на писмена работа 6

1. В 2. А 3. Б 4. Д 5. $y = ax^2 + bx + c; y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ 6. $D < 0$

7. $4 - x^2 \geq 0, D_f = [-2, 2]$ 8. $(1, \infty)$

9. а) $a = -1, b = -2, c = 3$ б) $\alpha = -1, \beta = 4$ в) $y = -(x+1)^2 + 4$

10. $x \in [-14, 1) \cup (1, \infty)$

11. а) $x_1 = -3, x_2 = 1$ б) $T\left(-1, \frac{16}{3}\right)$ в) $x \in (-3, 1)$ $f(x) > 0$, $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ $f(x) < 0$.

12. $f(\alpha - t) = a(\alpha - t)^2 + b(\alpha - t) + c = a\alpha^2 - 2\alpha at + at^2 + b\alpha - bt + c =$

$$= a\alpha^2 + (-2\alpha a - b)t + b\alpha + c = a\alpha^2 + \left(-2a\frac{-b}{2a} - b\right)t + b\alpha + c =$$

$$= a\alpha^2 + (-b + b)t + b\alpha + c = a\alpha^2 + (2\alpha a + b)t + b\alpha + c = f(\alpha + t).$$

Решенија на задачите од ниво А и ниво Б од тема 7: Плоштина на рамнински фигури

1. $P = 9cm^2$, $L = 13cm$

2. $P = 12 \cdot 13 \cdot \sin 45^0 = 78\sqrt{2}cm^2$

3. $\frac{3\sqrt{15}}{4}$

4. 90

5. $P = 84$, $R = \frac{65}{8}$ $r = 4$

6. 15,4 cm

7. $48cm^2$

8. $32cm^2$

9. $36cm^2$

10. $\frac{2\sqrt{3}h^2}{2}$

11. 120

12. $1053cm^2$

13. 300

14. 8

15. $l = 4\pi cm$

16. $P = 84\pi$

17. $\sqrt{2} : 2$

18. $18\sqrt{3}$

19. 2

20. $P = 8 \cdot 10 \frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3}$

21. $d_2 = \frac{2P}{d_1} = \frac{90}{7}$.

22. $L = 21$, $P = 63$

23. $L = 36$, $P = 6 \cdot 36 \sin 354\sqrt{3}$

Решенија на задачите од ниво В и ниво Г од тема 7: Плоштина на рамнински фигури

1. $a = \frac{2}{3}r$

2. $1024cm^2$

4. $\frac{P}{P_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{25k^2}{17k^2} = \frac{25}{17}$

5. $P = 48cm^2$

6. 8π

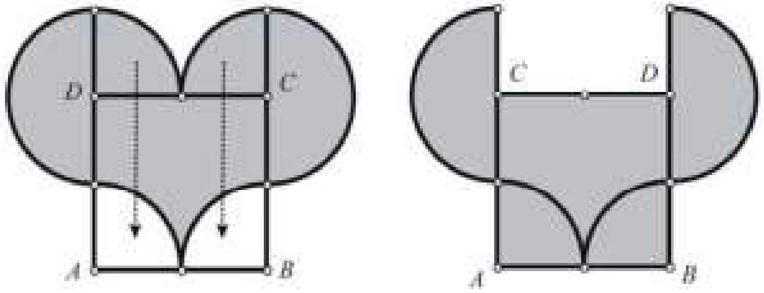
7. $P = 27\pi cm^2$

8. $P = 4cm^2$

9. $P = \frac{3}{4}a^2 = 27cm^2$

10. $P=\left(144+36\pi\right)cm^2$

Упатство:



12. $\frac{\pi r^2}{6}-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\frac{r^2}{2}$

13. $\sqrt{\frac{k}{\pi(4\pi^2-1)}}$

14. $64\pi m$

15. $\frac{\pi\sin\alpha}{4}$

16. 4 и $\frac{5\sqrt{41}}{4}$

18. $\frac{r^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{3}$ и $\frac{r^2\left(2\sqrt{3}-\pi\right)}{6}$

19. $2r^2\left(1+\frac{1}{tg\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{tg\alpha}\right)$

20. $\frac{2a^4}{\sqrt{k\left(4a^2-k^2\right)}}$

21. $\frac{c^2-p^2}{4}$

22. $\frac{159}{32}$

23. $\left(\frac{k}{4}ctg\alpha\right)^2\pi$

Решение на писмена работа 7

1. Г   2. Г   3. В   4. Г   5. $a=4\sqrt{6}$ 6. $r=6\sqrt{7}$ 7. $h=24cm$

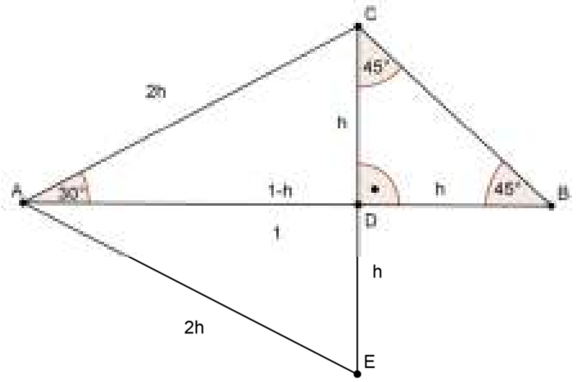
8. $L=20cm$ 9. Триаголникот е правоаголен со $c=2R$, па $R=\frac{c}{2}=12,5cm$

10. Од $a+b=2c$, $c=13$; $x=\frac{a-b}{2}$, $x=5$; $h^2=c^2-x^2$, $h=12$;

$$P=\frac{a+b}{2}h=\frac{26}{2}\cdot 12=156cm^2.$$

11. $P=R^2\pi-r^2\pi=\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2\pi-\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2\pi=\frac{3a^2}{9}\pi-\frac{3a^2}{36}\pi=\frac{a^2}{4}\pi$

12.



$\triangle DBC$ е рамнокрак правоаголен, па $\overline{BC}=h\sqrt{2}$.

$\triangle AEC$ е рамнокрак, па $\overline{EC}=2h$.

$$1-h=\frac{\cancel{2}h\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$h\sqrt{3}+h=1$$

$$h\left(1+\sqrt{3}\right)=1$$

$$h=\frac{1}{1+\sqrt{3}}$$

$$P=\frac{1\cdot\frac{1}{1+\sqrt{3}}}{2}=\frac{1}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}cm^2\ ;\quad L=1+2h+h\sqrt{2}=1+\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\,cm.$$

Литература

1. Ѓорѓијевски Трајче, Миладиновиќ Боривоје, Петрески Никола: Математика за I година – гимназиско образование; Скопје 2002.

2. Ѓорѓијевски Трајче, Миладиновиќ Боривоје, Петрески Никола: збирка задачи по математика за I година – гимназиско образование; Скопје 2002.

3. Миладиновиќ Боривоје, Ѓорѓијевски Трајче, Петрески Никола: Математика за II година – гимназиско образование; Скопје 2002.

4. Спасовска Бинчева Катица, Ѓорѓијевски Трајче, Миладиновиќ Боривоје, Петрески Никола: збирка задачи по математика за II година – гимназиско образование; Скопје 2002.

5. Целакоски Наум, Мадевски Живко: Математика за I година – природно-математичка струка, Скопје 1995.

6. Обрадовић Милутин, Геогријевић Душан: Одабрани задаци за други разред средњих школа, Београд 1995.

7. Mr Bogoslavov T. Vene: Zbirka rešenih zadatka iz matematike 2, Beograd 1989.

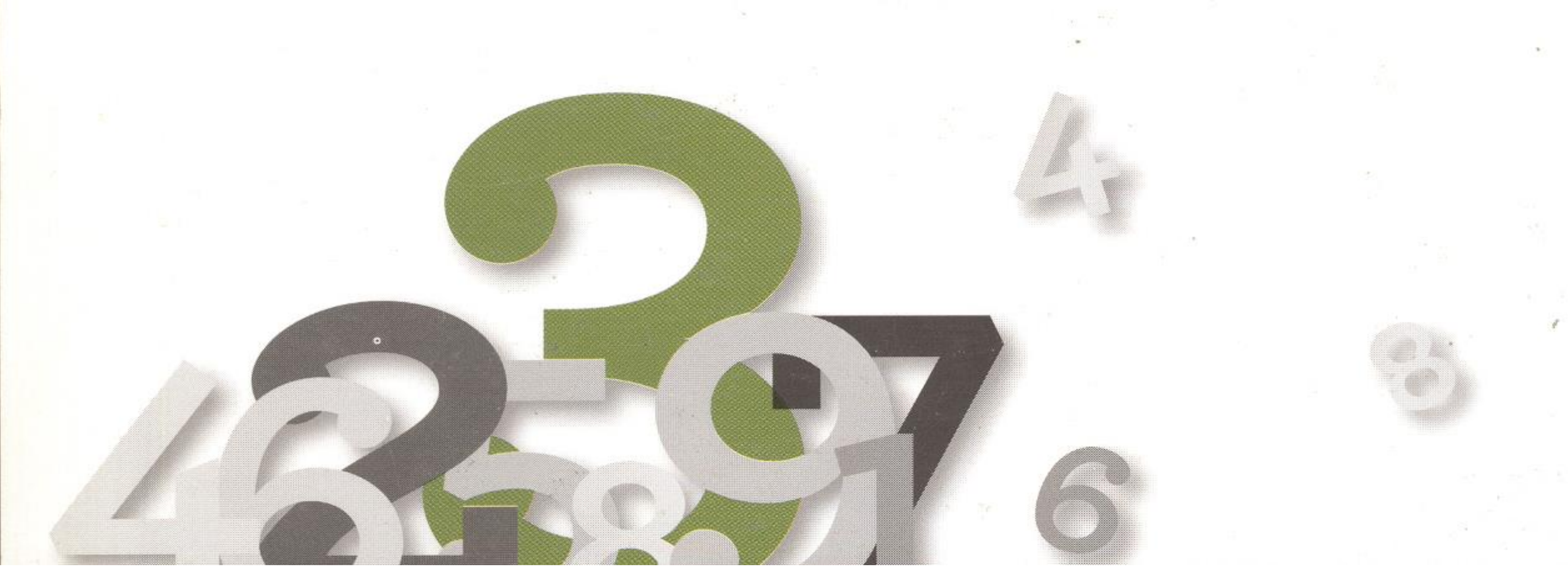
8. Božić Milan, Vulić Slobodan: Matematićka logika sa elementima opšte logike za III razred srednjeg usmerenog obrayovanja matematićko tehnićke struke, Beograd 1988.

9. Dr Prešić B. Slaviša: Savremeni pristup nastavi matematike, Beograd 1975.

10. Dr Devide Vladimir: Zadaci iz apstraktne algebre, Beograd 1979.

11. Целакоски Наум: Дидактика на математиката, Скопје 1993.

12. Задачи од натпревари, Сојуз на математичари на Македонија.



Биро за развој на образованието